Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

26. 5. 2006

# Analysis 1 für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 6

## Vollständig angeordnete Körper

**T 21 (Intervalle rationaler Zahlen)**
Sei $K$ ein vollständig angeordneter Körper.

1. Zeigen Sie, daß die Abbildung
$$\psi : K \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}), x \mapsto \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}$$
injektiv ist.
*Hinweis:* Verwenden Sie, daß jedes offene Intervall eine rationale Zahl enthält.
2. Zeigen Sie, daß das Bild von $\psi$ genau aus denjenigen nach unten unbeschränkten und nach oben beschränkten Intervallen in $\mathbb{Q}$ besteht, die kein Maximum besitzen.
3. Zeigen Sie, daß die rationalen Zahlen in $K$ genau auf diejenigen Intervalle aus 2. abgebildet werden, die in $\mathbb{Q}$ ein Supremum haben.
4. Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}$ nicht vollständig angeordnet ist.

**T 22 (Bijektivität von $\Phi$)**
Seien $K$ und $L$ zwei vollständig angeordnete Körper. Wie im Beweis von Satz II.2.24 sei
$$\Phi : K \to L, x \mapsto \sup_L\{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}.$$

Vollziehen Sie anhand des Skriptes nach, daß

1. $\Phi$ eine wohldefinierte Abbildung von $K$ nach $L$ ist,
2. $\Phi$ injektiv ist,
3. $\Phi$ surjektiv ist.

**T 23 (Monotonie von $\Phi$)**
Zeigen Sie, daß $\Phi(K_+) \subseteq L_+$.
*Hinweis:* Verwenden Sie, daß jedes offene Intervall eine rationale Zahl enthält, insbesondere also $]0, x[$ für beliebiges $0 < x \in K$.

# Analysis 1 für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 6, Lösungsvorschlag

## Vollständig angeordnete Körper

**T 21 (Intervalle rationaler Zahlen)**
Sei $K$ ein vollständig angeordneter Körper.

1. Zeigen Sie, daß die Abbildung
$$\psi : K \to \mathcal{P}(\mathbb{Q}), x \mapsto \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}$$
injektiv ist.
*Hinweis:* Verwenden Sie, daß jedes offene Intervall eine rationale Zahl enthält.
2. Zeigen Sie, daß das Bild von $\psi$ genau aus denjenigen nach unten unbeschränkten und nach oben beschränkten Intervallen in $\mathbb{Q}$ besteht, die kein Maximum besitzen.
3. Zeigen Sie, daß die rationalen Zahlen in $K$ genau auf diejenigen Intervalle aus 2. abgebildet werden, die in $\mathbb{Q}$ ein Supremum haben.
4. Zeigen Sie, daß $\mathbb{Q}$ nicht vollständig angeordnet ist.

Lösung:

1. *Seien $x, y \in K$ verschieden, etwa $x < y$. Dann enthält $]x, y[$ nach Folgerung II.2.20 eine rationale Zahl $r$. Folglich gilt $r \notin \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}$, aber $r \in \{q \in \mathbb{Q} \mid q < y\}$, woraus die Injektivität von $\psi$ folgt.*
2. *Definiere $\pi : \psi(K) \to K, X \mapsto \sup_K X$. Da $\psi(K)$ offensichtlich aus nach oben beschränkten Mengen besteht, ist die Abbildung $\pi$ wohldefiniert, da jedes $X \in \psi(K)$ nach dem Vollständigkeitsaxiom (Definition II.2.13) ein Supremum besitzt. Wegen $\pi \circ \psi = \mathrm{id}$ und $\psi \circ \pi = \mathrm{id}$ (verwende Folgerung II.2.20), sind $\pi$ und $\psi$ zueinander invers. Falls nun $X \in \psi(K)$ ein Maximum $x \in \mathbb{Q}$ hätte, dann wäre $\psi(\pi(X)) = \psi(x) = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\} \neq X$, ein Widerspruch, also ist jedes $X$ nach oben beschränkt, hat aber kein Maximum in $\mathbb{Q}$. Umgekehrt ist aber jedes nach unten unbeschränkte und nach oben beschränkte Intervall $X$ von $\mathbb{Q}$ ohne Maximum in $\mathbb{Q}$ von der Form $\{q \in \mathbb{Q} \mid q < \sup_K(X)\}$ (Vollständigkeitsaxiom).*
3. *Wegen $\psi \circ \pi = \mathrm{id}$, gilt für jede Zahl $x \in K$ die Gleichheit $x = \sup_K\{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}$. Ist $x$ rational, so gilt also auch $x = \sup_{\mathbb{Q}}\{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}$. Die umgekehrte Implikation folgt aus $\pi \circ \psi = \mathrm{id}$.*
4. *Betrachte $\{q \in \mathbb{Q} \mid q^2 < 2\}$. Diese Menge besitzt kein Supremum in $K$, denn $\sqrt{2}$ ist irrational.*

**T 22 (Bijektivität von $\Phi$)**
Seien $K$ und $L$ zwei vollständig angeordnete Körper. Wie im Beweis von Satz II.2.24 sei
$$\Phi : K \to L, x \mapsto \sup_L\{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}.$$

Vollziehen Sie anhand des Skriptes nach, daß

1. $\Phi$ eine wohldefinierte Abbildung von $K$ nach $L$ ist,
2. $\Phi$ injektiv ist,
3. $\Phi$ surjektiv ist.

Lösung: *Siehe Skript.*

**T 23 (Monotonie von $\Phi$)**

Zeigen Sie, daß $\Phi(K_+) \subseteq L_+$.
*Hinweis:* Verwenden Sie, daß jedes offene Intervall eine rationale Zahl enthält, insbesondere also $]0, x[$ für beliebiges $0 < x \in K$.

Lösung: *Sei $x \in K$ mit $x > 0$. Wir müssen zeigen, daß $\sup_L\{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\} > 0$. Nach Folgerung II.2.20 existiert ein $p \in \mathbb{Q}$ mit $p \in ]0, x[$, also $p > 0$. Die Behauptung folgt nun aus $0 < p < \sup_L\{q \in \mathbb{Q} \mid q < x\}$.*