Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006
Tutorium 5, Lösungsskizze

Metrische Räume

Aufgaben

T 18 (Beispiele von Metriken)

(a) Es sei X eine Menge. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$d\colon X \times X \to [0, \infty[\,, \quad d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y; \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

eine Metrik auf X ist.

(b) (Manhattan-Metrik). Zeigen Sie, dass

$$d_1 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to [0, \infty[\,, \qquad d_1((x,y),(x',y')) := |x - x'| + |y - y'|$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}^2$ ist. Was bedeutet der so definierte Abstand geometrisch? (Skizze!)

(a) Für $x, y \in X$ gilt:

$$0 \neq d(x,y) \Leftrightarrow x \neq y$$

per Definition von d. Da $x = y$ genau dann, wenn $y = x$, ist also $d(x,y) = d(y,x)$, somit d symmetrisch. Zum Beweis der Dreiecksungleichung seien $x, y, z \in X$. Ist $x = z$, so ist

$$d(x,z) = 0 \leq d(x,y) + d(y,z)\,.$$

Ist $x \neq z$, so ist $d(x,z) = 1$. Weiter ist dann $x \neq y$ oder $y \neq z$. Im ersten Fall ist $d(x,y) = 1$, im zweiten ist $d(y,z) = 1$. In beiden Fällen ist

$$d(x,z) = 1 \leq d(x,y) + d(y,z)\,.$$

(b) Ist $0 = d_1((x,y),(x',y')) = |x - x'| + |y - y'|$, so folgt $x - x' = 0$ und $y - y' = 0$, also $(x,y) = (x',y')$. Symmetrie:

$$d_1((x',y'),(x,y)) = |x' - x| + |y' - y| = |x - x'| + |y - y'| = d_1((x,y),(x',y')).$$

Dreicksungleichung: Gegeben $(x,y), (x',y'), (x'',y'') \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} d_1((x,y),(x'',y'')) &= |x - x''| + |y - y''| = |x - x' + x' - x''| + |y - y' + y' - y''| \\ &\leq |x - x'| + |x' - x''| + |y - y'| + |y' - y''| \\ &= d_1((x,y),(x',y')) + d_1((x',y'),(x'',y''))\,. \end{aligned}$$

Die Zahl $d_1((x,y),(x',y'))$ ist die Länge des Weges, der zunächst parallel zur x-Achse von (x,y) nach (x',y), dann parallel zur y-Achse von (x',y) nach (x',y') führt.

T 19 (Metriken mit Werten zwischen 0 und 1) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(t) := \frac{t}{1+t}$ die folgenden Eigenschaften hat:

(a) Für alle $t \in [0, \infty[$ ist $0 \leq f(t) \leq 1$;

(b) Für $t \in [0, \infty[$ ist $f(t) = 0$ genau dann, wenn $t = 0$;

(c) f ist streng monoton wachsend, d.h. für alle $s, t \in [0, \infty[$ mit $s < t$ ist $f(s) < f(t)$.

(Hinweis: schreiben Sie $\frac{t}{1+t}$ geschickt um!)

Nun sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass dann auch

$$\delta\colon X \times X \to [0, \infty[\,, \qquad \delta(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

eine Metrik auf X ist, die zudem nur Werte zwischen 0 und 1 annimmt.

(a) Da $t \geq 0$ und $1 + t > 0$, ist $\frac{t}{1+t} \geq 0$. Da $1 + t > t$ und $1 + t > 0$, gilt weiter $1 = \frac{1+t}{1+t} > \frac{t}{1+t}$.

(b) $f(0) = 0$ ist klar und auch $f(t) = 0 \Rightarrow t = 0$.

(c) Es ist

$$f(t) \;=\; \frac{t}{1+t} \;=\; \frac{1+t-1}{1+t} \;=\; 1 - \frac{1}{1+t}\,.$$

Indem man Schritt für Schritt überlegt, wie der Ausdruck rechts gebildet wird, sieht man, dass f streng monoton wächst.

δ ist eine Metrik: Ist $0 = \delta(x, y) = f(d(x, y))$, so ist nach (b) $d(x, y) = 0$ und somit $x = y$.

Symmetrie: Es ist $\delta(y, x) = f(d(y, x)) = f(d(x, y)) = \delta(y, x)$.

Dreiecksungleichung: Da $d(x, z) \leq d(x, y)+d(y, z)$, folgt wegen der Monotonie von f

$$\begin{aligned}
\delta(x, z) \;&=\; f(d(x, z)) \;\leq\; f(d(x, y) + d(y, z)) \\
&=\; \frac{d(x, y) + d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \;=\; \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(x, y) + d(y, z)} \\
&\leq\; \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} \;=\; \delta(x, y) + \delta(y, z)\,.
\end{aligned}$$

T 20 (Abstand zweier Mengen) Ist (X, d) ein metrischer Raum, so definiert man den *Abstand* zwischen zwei nicht-leeren Teilmengen $A, B \subseteq X$ als

$$\operatorname{dist}(A, B) \;:=\; \inf\{d(a, b)\colon a \in A, b \in B\}\,.$$

Wir betrachten nun $\mathbb{R}$ mit der üblichen Metrik, $d(x, y) = |x - y|$. Bestimmen Sie $\operatorname{dist}(A, B)$ für die folgenden Mengen:

(a) $A := \{0\}$, $B := [1, 2]$;

(b) $A := \{0\}$, $B :=]1, 2]$;

(c) $A := \mathbb{N}$, $B := \{n - \frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Es ist dist$(A, B) = 1$. *Begründung: Ist* $a \in A$ *und* $b \in B$, *so ist* $a = 0$ *und* $b \geq 1$, *somit* $d(a, b) = |a - b| = |b| = b \geq 1$. *Also ist* 1 *eine untere Schranke für* $\{d(a, b) \colon a \in A, b \in B\}$ *und folglich* $\mathrm{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b) \colon a \in A, b \in B\} \geq 1$ *(denn die größte untere Schranke ist größer oder gleich jeder anderen). Nehmen wir* $a = 0$, $b = 1$, *so erhalten wir* $d(a, b) = 1$ *und somit* $\mathrm{dist}(A, B) \leq 1$ *(denn als untere Schranke muss* $\mathrm{dist}(A, B) \leq d(a, b) = 1$ *sein). Es folgt* $\mathrm{dist}(A, B) = 1$.

(b) Es ist $\mathrm{dist}(A, B) = 1$. *Begründung: Wie in* (a) *sehen wir, dass* $\mathrm{dist}(A, B) \geq 1$. *Für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *ist* $b := 1 + \frac{1}{n} \in B$ *und* $d(0, b) = b = 1 + \frac{1}{n}$, *somit* $\mathrm{dist}(A, B) \leq 1 + \frac{1}{n}$. *Es folgt* $\mathrm{dist}(A, B) \leq 1$ *(Details sofort!) und somit* $\mathrm{dist}(A, B) = 1$. *Details: Wäre* $\mathrm{dist}(A, B) > 1$, *so gäbe es nach dem Satz von Archimedes (Satz II.2.19 auf Seite 31) ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $n > \frac{1}{\mathrm{dist}(A,B)-1}$, *also* $1 + \frac{1}{n} < \mathrm{dist}(A, B)$. *Nach dem Vorigen ist aber* $\mathrm{dist}(A, B) \leq 1 + \frac{1}{n}$, *Widerspruch. Also muss doch* $\mathrm{dist}(A, B) \leq 1$ *sein.*

(c) Es ist $\mathrm{dist}(A, B) = 0$. *Begründung: Sei* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $a := n \in A$, $b := 1 - \frac{1}{n} \in B$ *und* $|a - b| = \frac{1}{n}$. *Folglich ist* $\mathrm{dist}(A, B) \leq \frac{1}{n}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und somit* $\mathrm{dist}(A, B) \leq 0$ *(für diese Folgerung benutzt man ähnlich wie in (b) den Satz von Archimedes). Da auch* $\mathrm{dist}(A, B) \geq 0$, *folgt* $\mathrm{dist}(A, B) = 0$.