Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006
Tutorium 4, Lösungsskizze

Rechenregeln und Gruppenaxiome

Gegeben sei eine Menge G mit einer Abbildung $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x * y$. Wir betrachten die folgenden Eigenschaften:

(A) *Assoziativgesetz*: $(\forall x, y, z \in G)\ \ x * (y * z) = (x * y) * z$;

(N) *Neutrales Element*: $(\exists e \in G)\ (\forall x \in G)\ \ e * x = x * e = x$;

(I) *Existenz eines Inversen*: $(\forall x \in G)\ (\exists y \in G)\ \ x * y = y * x = e$.

Gelten (A), (N) und (I), so heißt G eine *Gruppe*. Gelten (A) und (N), so nennt man G ein *Monoid*. Gilt (A), so ist G eine *Halbgruppe*.

Aufgaben

T 14 (Rechenregeln).

Es sei $(G, *)$ eine Gruppe und $(M, *)$ ein Monoid.

(a) (Eindeutigkeit des Neutralelements). Zeigen Sie: Sind $e, e' \in M$ beides Neutralelemente, so ist $e = e'$. Im Folgenden (wie auch schon in (I)) bezeichne e das eindeutige Neutralelement.

(b) (Eindeutigkeit des Inversen). Es sei $x \in M$ und es gebe sowohl ein Element $\ell \in M$ mit $\ell * x = e$ (ein "linksinverses Element" zu x) und ein $r \in M$ mit $x * r = e$ (ein "Rechtsinverses"). Zeigen Sie, dass dann $\ell = r$. Folgern Sie, dass es zu jedem $x \in M$ höchstens ein inverses Element gibt. Aufgrund der Eindeutigkeit können wir dieses Element fortan mit x^{-1} bezeichnen.

(c) Zeigen Sie, dass das Neutralelement $e \in M$ ein Inverses hat, nämlich $e^{-1} = e$.

(d) Zeigen Sie: Ist $x \in M$ invertierbar, so auch x^{-1}, und es ist $(x^{-1})^{-1} = x$.

(e) Zeigen Sie: Sind $x, y \in M$ beide invertierbar, so auch $x * y$, und es ist $(x * y)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$.

(f) Zeigen Sie: Sind $x, y, z \in G$, so gilt $x * y = z$ genau dann, wenn $x = z * (y^{-1})$. Weiter gilt $x * y = z$ genau dann, wenn $y = x^{-1} * z$.

(g) Zeigen Sie auch, dass für jeden Körper K und $x, y \in K$ gilt:

$$(-x)y = -(xy) \quad \text{und} \quad (-x)(-y) = xy\,.$$

(a) Da e ein Neutralelement ist, ist $e * e' = e'$. Da e' ein Neutralelement ist, ist $e * e' = e$. Also ist $e = e'$.

(b) Nach dem Assoziativgesetz ist $(\ell * x) * r = \ell * (x * r)$. Da $(\ell * x) * r = e * r = r$ und $\ell * (x * r) = \ell * e = \ell$, folgt $r = \ell$. Sind nun sowohl y als auch z inverse Elemente zu x, so können wir $\ell := y$, $r := z$ nehmen und erhalten $y = z$.

(c) Setzen wir $y := e$, so ist $y * e = e * e = e$ und $e * y = e * e = e$. Also ist e invertierbar mit $e^{-1} = y = e$.

(d) Da $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$, *ist* x^{-1} *invertierbar mit* $(x^{-1})^{-1} = x$.

(e) Setze $z := y^{-1} * x^{-1}$. *Dann ist (wenn wir alle Klammern sauber hinschreiben)* $z * (x * y) = (y^{-1} * x^{-1}) * (x * y) = ((y^{-1} * x^{-1}) * x) * y = (y^{-1} * (x^{-1} * x)) * y = (y^{-1} * e) * y = y^{-1} * y = e$ *und analog* $(x * y) * z = e$. *Also ist* $x * y$ *invertierbar mit* $(x * y)^{-1} = z = y^{-1} * x^{-1}$.

(f) Gilt $x * y = z$, *so ist auch* $(x * y) * y^{-1} = z * y^{-1}$, *wobei sich die linke Seite noch umschreiben lässt:* $(x * y) * y^{-1} = x * (y * y^{-1}) = x * e = x$. *Also folgt* $x = z * y^{-1}$. *Gilt umgekehrt* $x = z * y^{-1}$, *so folgt* $x * y = (z * y^{-1}) * y = z$.

Die zweite Äquivalenz zeigt man analog.

(g) Es ist $(-x)y + xy = ((-x) + x)y = 0y = 0$ *und analog* $xy + (-x)y = 0$. *Somit ist* $(-x)y = -xy$ *das additive Inverse von* xy.

Analog sieht man übrigens, dass $x(-y) = -xy$. *Somit ist* $(-x)(-y) = -x(-y) = -(-xy) = xy$ *(vgl. Teil (d)).*

T 15 (Eine nicht abelsche Gruppe).

Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper und $K^\times := K \setminus \{0\}$. Wir versehen $G := K \times K^\times$ mit der folgenden Verknüpfung:

$$G \times G \to G\,, \qquad (x, a) * (y, b) := (x + a \cdot y, a \cdot b)\,.$$

Zeigen Sie, dass $(G, *)$ eine Gruppe ist, mit Neutralelement $e = (0, 1)$ und Inversen der Form $(x, a)^{-1} = (-a^{-1}x, a^{-1})$.

Assoziativgesetz: Für alle $(x, a), (y, b), (z, c) \in G$ *ist*

$$((x, a) * (y, b)) * (z, c) = (x + ay, ab) * (z, c) = (x + ay + abz, abc)\,,$$

was mit

$$(x, a) * ((y, b) * (z, c)) = (x, a) * (y + bz, bc) = (x + ay + abz, abc)$$

übereinstimmt.

$(0, 1)$ *ist Neutralelement: Für jedes* $(x, a) \in G$ *ist* $(0, 1) * (x, a) = (0 + 1 \cdot x, 1 \cdot a) = (x, a)$ *und* $(x, a) * (0, 1) = (x + a \cdot 0, a \cdot 1) = (x, a)$, *wie benötigt.*

Existenz von Inversen. Sei $(x, a) \in G$. *Dann ist auch* $(-a^{-1}x, a^{-1}) \in G$. *Wir zeigen, dass dieses Element invers zu* (x, a) *ist. Es ist nämlich*

$$(x, a) * (-a^{-1}x, a^{-1}) = (x + a \cdot (-a^{-1}x), aa^{-1}) = (x - x, 1) = (0, 1)$$

das Neutralelement und ebenso

$$(-a^{-1}x, a^{-1}) * (x, a) = (-a^{-1}x + a^{-1}x, a^{-1}a) = (0, 1)\,.$$

T 16 (Assoziativgesetz für mehrfache Produkte, I).

In dieser Aufgabe und der nächsten sei $(S, *)$ eine Halbgruppe. Unser Ziel ist ein "Allgemeines Assoziativgesetz": *Auch in Produkten von mehr als drei Elementen kommt es auf die Klammersetzung nicht an.* Wir beginnen mit einem Spezialfall.

Das Produkt *eines einzelnen* Elements von S sei das Element selbst. Gegeben $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und Elemente $x_1, \ldots, x_n \in S$, definieren wir rekursiv $x_1 * \cdots * x_n := (x_1 * \cdots * x_{n-1}) * x_n$ (was im Falle $n = 2$ als $x_1 * x_2$ zu lesen ist).

Zeigen Sie durch Induktion nach $k \in \mathbb{N}$, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_{n+k} \in S$:

$$x_1 * \cdots * x_{n+k} = (x_1 * \cdots * x_n) * (x_{n+1} * \cdots * x_{n+k}) .$$

Induktionsanfang $k = 1$: *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und Elemente $x_1, \ldots, x_{n+1} \in S$ haben wir*

$$x_1 * \cdots * x_{n+1} = (x_1 * \cdots * x_n) * x_{n+1}$$

per Definition der linken Seite. Also gilt die zu zeigende Behauptung im Falle $k = 1$.

Induktionsschritt. *Die Behauptung gelte für k (Induktionsvoraussetzung). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und Elemente $x_1, \ldots, x_{n+(k+1)} \in S$ gilt dann*

$$\begin{aligned} x_1 * \cdots * x_{n+(k+1)} &= (x_1 * \cdots * x_{n+k}) * x_{n+k+1} \\ &= \big((x_1 * \cdots * x_n) * (x_{n+1} * \cdots * x_{n+k})\big) * x_{n+k+1} \\ &= (x_1 * \cdots * x_n) * \big((x_{n+1} * \cdots * x_{n+k}) * x_{n+k+1}\big) \\ &= (x_1 * \cdots * x_n) * (x_{n+1} * \cdots * x_{n+k+1}) , \end{aligned}$$

wobei die erste und letzte Zeile auf der rekursiven Definition mehrfacher Produkte basiert, beim Übergang zur zweiten Zeile die Induktionsvoraussetzung benutzt wurde und beim Übergang zur dritten Zeile das Assoziativgesetz.

T 17 (Assoziativgesetz für mehrfache Produkte, II).

Das Produkt *eines* Elements aus S wurde bereits definiert. Rekursiv definieren wir:

Seien $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in S$. Ein Element $p \in S$ heiße ein *Produkt der n Elemente* $x_1, \ldots, x_n$, wenn es ein $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ gibt, ein Produkt p_1 der k Elemente $x_1, \ldots, x_k$ und ein Produkt p_2 der $n - k$ Elemente $x_{k+1}, \ldots, x_n$ derart, dass $p = p_1 * p_2$.

(a) Um sich die Bedeutung der Definition klarzumachen, bestimme man Formeln für alle möglichen Produkte von 2, 3 oder 4 Elementen.

(b) Zeigen Sie durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$: Ist $p \in S$ ein Produkt der n Elemente $x_1, \ldots, x_n \in S$, so gilt

$$p = x_1 * \cdots * x_n ,$$

wobei die rechte Seite wie in **T16** definiert ist. Insbesondere stimmen alle möglichen Produkte der n Elemente $x_1, \ldots, x_n$ überein.

(a) $n = 2$: Ist $p \in S$ ein Produkt der zwei Elemente $x_1, x_2 \in S$, so gibt es ein $k \in \{1\}$ (also $k = 1$), ein Produkt p_1 von x_1 (also $p_1 = x_1$) und ein Produkt p_2 von x_2 (also $p_2 = x_2$) mit $p = p_1 * p_2$. Also $p = x_1 * x_2$.

$n = 3$: Ist $p \in S$ ein Produkt der drei Elemente $x_1, x_2, x_3 \in S$, so gibt es ein $k \in \{1, 2\}$, ein Produkt p_1 der k Elemente $x_1, \ldots, x_k$ und ein Produkt p_2 der $3 - k$ Elemente $x_{k+1}, \ldots, x_3$ mit $p = p_1 * p_2$.

1. Fall: $k = 1$. Dann ist $p_1 = x_1$ und $p_2 = x_2 * x_3$ (da wir bereits wissen, wie alle Produkte von einem bzw. zwei Elementen aussehen), also

$$p = x_1 * (x_2 * x_3)\,.$$

2. Fall: $k = 2$. Dann ist $p_1 = x_1 * x_2$ und $p_2 = x_3$, also

$$p = (x_1 * x_2) * x_3\,.$$

$n = 4$: Analog sehen wir mittels unserer Kenntnis aller Produkte von 1, 2 oder 3 Elementen, dass die Produkte p von 4 Elementen $x_1, x_2, x_3, x_4 \in S$ genau die folgenden sind:

$$x_1 * (x_2 * (x_3 * x_4)), \quad x_1 * ((x_2 * x_3) * x_4), \quad (x_1 * x_2) * (x_3 * x_4),$$
$$(x_1 * (x_2 * x_3)) * x_4, \quad ((x_1 * x_2) * x_3) * x_4\,.$$

(b) Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n.

Induktionsanfang. *Der Fall $n = 1$ ist klar, da wir in* **T16** *und* **T17** *das Produkt eines Elements x_1 in gleicher Weise definiert haben (nämlich als x_1).*

Induktionsschritt. *Wir nehmen an, die Aussage gelte bis zu einem gewissen $n \in \mathbb{N}$ (Induktionsvoraussetzung). Sei nun $p \in S$ ein Produkt von $n + 1$ Elementen $x_1, \ldots, x_{n+1} \in S$. Dann existieren (per Definition eines Produkts) ein $k \in \{1, \ldots, n\}$, ein Produkt p_1 der k Elemente $x_1, \ldots, x_k$ und ein Produkt p_2 der $n+1-k$ Elemente $x_{k+1}, \ldots, x_{n+1}$ derart, dass*

$$p = p_1 * p_2\,.$$

Da $k \leq n$ und $n + 1 - k \leq n$, gilt per Induktionsvoraussetzung

$$p_1 = x_1 * \cdots * x_k \qquad \text{und} \qquad p_2 = x_{k+1} * \cdots * x_{n+1}\,.$$

Nach Aufgabe **T16** *ist also*

$$p = p_1 * p_2 = (x_1 * \cdots * x_k) * (x_{k+1} * \cdots * x_{n+1}) = x_1 * \cdots * x_{n+1}\,,$$

was zu zeigen war.