Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4./5. 5. 2006

Analysis 1 für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 3

Abzählen von Mengen

T 10 (Binomialkoeffizienten und die Kardinalität der Potenzmenge)

1. Berechnen Sie die folgenden Summen :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$

2. Sei M eine endliche Menge. Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.

T 11 (Catalan-Zahlen) Abzählprobleme spielen in der Kombinatorik, einem Teilgebiet der diskreten Mathematik, eine wichtige Rolle. In dieser Aufgabe wollen wir uns einige sehr berühmte Beispiele ansehen.

1. (a) Seien A und B gegenüberliegende Ecken eines $(n \times m)$-Gitters (bestehend aus Einheitsquadraten). Weisen Sie die Existenz eines kürzesten Weges von A nach B nach, bestimmen Sie dessen Länge und zählen Sie die Anzahl solcher kürzester Wege.
   Wenn man davon ausgehen würde, daß in Manhattan, New York überall derselbe Verkehr herrschen würde, dann gibt diese Zahl die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten an, auf denen ein Taxifahrer in Manhattan sinnvoll von A nach B fahren kann. (Diese *Manhattan-Metrik* werden Sie später noch kennenlernen.)
   (b) Sei nun $n = m$. Bestimmen Sie die Anzahl der kürzesten Wege, die niemals unterhalb der Diagonalen von A nach B verlaufen. Diese Anzahl wird mit C_n bezeichnet und heißt $n$te **Catalan-Zahl**.
2. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Anordnungen von jeweils n Symbolen (und), so daß niemals eine Klammer geschlossen wird, bevor sie geöffnet wurde.
3. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen vollständigen Klammerungen der Summe $\sum_{k=0}^{n} a_k$. Dies ist die Anzahl der Terme, die Sie betrachten müßten, wenn Sie die Gültigkeit des Assoziativgesetzes bei einer Summe mit $n+1$ Summanden nachweisen wollten!
4. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, ein konvexes $(n+2)$-Eck Γ in Dreiecke zu zerlegen, deren Eckpunkte schon Eckpunkte von Γ sind.

T 12 (Innenwinkelsumme konvexer Vielecke)
Bestimmen Sie die Innenwinkelsumme eines konvexen $(n+2)$-Eckes.
Hinweis: Zerlegen Sie das $(n+2)$-Eck so wie in Aufgabe **T 11**.4.

T 13 (Schubfachprinzip) Das Schubfachprinzip ist ebenfalls eine beliebte und hilfreiche Beweismethode in der Kombinatorik. Es basiert auf der folgenden Feststellung:

1. Seien X und Y endliche Mengen mit $|X| > |Y|$. Dann gibt es keine injektive Funktion $f : X \to Y$.

2. Stellen Sie sich vor, Sie haben im Supermarkt billig drei Zehnerpacks Socken gekauft (jeweils zehn Paar Socken, die völlig identisch sind). Zur Sicherheit waschen Sie alle neu erworbenen Socken vor dem ersten Tragen.

   Wie viele Socken müssen Sie nach dem Waschen aus der Waschmaschine herausnehmen, damit Sie sicher ein Paar gleicher Socken in der Hand halten,

   (a) wenn Sie nicht zwischen linken und rechten Socken unterscheiden können oder wollen,

   (b) wenn Sie eine linke und eine dazu passende rechte Socke anziehen wollen.

   Wo und wie können Sie hierbei das Schubfachprinzip anwenden?

Analysis 1 für M, LaG und Ph, SS 2006, Tutorium 3, Lösungsvorschlag

Abzählen von Mengen

T 10 (Binomialkoeffizienten und die Kardinalität der Potenzmenge)

1. Berechnen Sie die folgenden Summen :
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}.$$
2. Sei M eine endliche Menge. Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$.

Lösung:

1. *Es gilt*
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$
und
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0.$$
2. *Sei $|M| = n$. Wir beweisen per Induktion, daß $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$. Für $n = 0$ (d.h. $M = \emptyset$) ist die Behauptung korrekt. Sei nun $n > 0$ und sei $x \in M$. Jedes Element Z von $\mathcal{P}(M)$ ist entweder schon enthalten in $\mathcal{P}(M \backslash \{x\})$ oder es gibt ein eindeutiges Element $Y \in \mathcal{P}(M \backslash \{x\})$ mit $Z = \{x\} \cup Y$. Daher gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2 \cdot |\mathcal{P}(M \backslash \{x\})| = 2 \cdot 2^{n-1}$ nach Induktionsvoraussetzung.*

T 11 (Catalan-Zahlen) Abzählprobleme spielen in der Kombinatorik, einem Teilgebiet der diskreten Mathematik, eine wichtige Rolle. In dieser Aufgabe wollen wir uns einige sehr berühmte Beispiele ansehen.

1. (a) Seien A und B gegenüberliegende Ecken eines $(n \times m)$-Gitters (bestehend aus Einheitsquadraten). Weisen Sie die Existenz eines kürzesten Weges von A nach B nach, bestimmen Sie dessen Länge und zählen Sie die Anzahl solcher kürzester Wege.
   Wenn man davon ausgehen würde, daß in Manhattan, New York überall derselbe Verkehr herrschen würde, dann gibt diese Zahl die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten an, auf denen ein Taxifahrer in Manhattan sinnvoll von A nach B fahren kann. (Diese *Manhattan-Metrik* werden Sie später noch kennenlernen.)

   (b) Sei nun $n = m$. Bestimmen Sie die Anzahl der kürzesten Wege, die niemals unterhalb der Diagonalen von A nach B verlaufen. Diese Anzahl wird mit C_n bezeichnet und heißt $n$te **Catalan-Zahl**.
2. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen Anordnungen von jeweils n Symbolen (und), so daß niemals eine Klammer geschlossen wird, bevor sie geöffnet wurde.
3. Berechnen Sie die Anzahl der möglichen vollständigen Klammerungen der Summe $\sum_{k=0}^{n} a_k$. Dies ist die Anzahl der Terme, die Sie betrachten müßten, wenn Sie die Gültigkeit des Assoziativgesetzes bei einer Summe mit $n+1$ Summanden nachweisen wollten!
4. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, ein konvexes $(n+2)$-Eck Γ in Dreiecke zu zerlegen, deren Eckpunkte schon Eckpunkte von Γ sind.

Lösung:

1. (a) *Offensichtlich gibt es einen Weg von A nach B. Da Weglängen in diesem Gitter nichtnegative ganze Zahlen sind, gibt es wegen der Wohlordnung der nichtnegativen ganzen Zahlen (jede nichtleere Teilmenge hat ein kleinstes Element) einen Weg von A nach B kürzester Länge. Um von A nach B zu gelangen, muß man mindestens n Schritte in vertikaler Richtung und m Schritte in horizontaler Richtung laufen, also ist die Länge eines beliebigen Weges von A nach B mindestens $n+m$. Offensichtlich gibt es einen Weg der Länge $n+m$ von A nach B, also ist $n+m$ die Länge eines kürzesten Weges von A nach B. Die Anzahl dieser kürzesten Wege wird parametrisiert durch die Anzahl der unterschiedlichen Permutationen von n Buchstaben o (wie ‚nach oben') und m Buchstaben r (wie ‚nach rechts'). Davon gibt es aber genau $\binom{n+m}{n} = \binom{n+m}{m}$ verschiedene Permutationen.*

   (b) *Sei γ ein beliebiger kürzester Pfad von A nach B, der die Diagonale schneidet oder der unter der Diagonalen anfängt. Bestimme den ersten Gitterpunkt C des Weges, der unterhalb der Diagonalen liegt und spiegele den Pfad ab diesem Punkt C an der Parallelen zur Diagonalen durch diesen Punkt C. Der entstehende Pfad ist ein kürzester Pfad in einem $(n+1)\times(n-1)$-Gitter. Umgekehrt kann jeder kürzeste Pfad in einem $(n+1)\times(n-1)$-Gitter auf genau diese Art und Weise aus einem kürzester Pfad im $n\times n$-Gitter, der die Diagonale schneidet oder unter der Diagonalen anfängt, gewonnen werden. Nach Teilaufgabe (a) sind von den $\binom{2n}{n}$ kürzesten Pfaden von A nach B genau $\binom{2n}{n-1}$ zu irgendeinem Zeitpunkt unter der Diagonalen. Also gibt es genau*

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$$

   kürzeste Pfade von A nach B, die stets über der Diagonalen sind.
   Es gilt $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, was aber nicht Gegenstand dieser Aufgabe sein soll.

2. *Ersetze den Buchstaben o in Teilaufgabe 1(a) durch das Symbol (und den Buchstaben r durch das Symbol). Nach 1(b) erhalten wir $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$ Möglichkeiten.*

3. *Mit dem folgenden Algorithmus kann man das Problem auf Teilaufgabe 2 reduzieren: Es gibt bei jeder möglichen Klammerung genau ein $+$, das nicht innerhalb von Klammern steht. Zerlege die Summe in die Summe $T_1 + T_2$, wobei T_1 der (beklammerte) Term vor diesem $+$ ist und T_2 der (beklammerte) Term hinter diesem $+$ ist. Setze das Symbol (vor alle noch aus T_1 zu bestimmenden Klammern, setze das Symbol) hinter alle noch aus T_1 zu bestimmenden Klammern, und setze alle aus T_2 zu bestimmenden Klammern rechts daneben. Führe eine Rekursion durch, bis man bei Termen, die nur noch aus genau einem Element bestehen, ankommt, welche man dann ersatzlos streicht.*

4. *Beschrifte im Uhrzeigersinn alle bis auf eine Kante des $(n+2)$-Eckes mit a_0 bis a_n durch. Beschrifte nun iterativ bei Dreiecken, bei denen schon zwei Kanten mit den Ausdrücken T_1 und T_2 beschriftet sind mit $(T_1)+(T_2)$, wobei die Klammern um T_i weggelassen werden, wenn T_i nur aus genau einem a_j besteht. Dieser Algorithmus liefert eine Bijektion zwischen den unterschiedlichen Zerlegungen des $(n+2)$-Eckes und den unterschiedlichen Klammerungen von $\sum_{k=0}^{n} a_k$. (Diese Summe wird an der am Anfang unbeschrifteten Außenseite des $(n+2)$-Eckes erscheinen.)*

T 12 (Innenwinkelsumme konvexer Vielecke)
Bestimmen Sie die Innenwinkelsumme eines konvexen $(n+2)$-Eckes.
Hinweis: Zerlegen Sie das $(n+2)$-Eck so wie in Aufgabe **T 11**.4.

Lösung: *Das $(n+2)$-Eck wird in n Dreiecke zerlegt. Also ist die Innenwinkelsumme gleich $n \cdot 180°$.*

T 13 (Schubfachprinzip) Das Schubfachprinzip ist ebenfalls eine beliebte und hilfreiche Beweismethode in der Kombinatorik. Es basiert auf der folgenden Feststellung:

1. Seien X und Y endliche Mengen mit $|X| > |Y|$. Dann gibt es keine injektive Funktion $f : X \to Y$.
2. Stellen Sie sich vor, Sie haben im Supermarkt billig drei Zehnerpacks Socken gekauft (jeweils zehn Paar Socken, die völlig identisch sind). Zur Sicherheit waschen Sie alle neu erworbenen Socken vor dem ersten Tragen.

   Wie viele Socken müssen Sie nach dem Waschen aus der Waschmaschine herausnehmen, damit Sie sicher ein Paar gleicher Socken in der Hand halten,

   (a) wenn Sie nicht zwischen linken und rechten Socken unterscheiden können oder wollen,

   (b) wenn Sie eine linke und eine dazu passende rechte Socke anziehen wollen.

   Wo und wie können Sie hierbei das Schubfachprinzip anwenden?

Lösung:

1. *Gäbe es eine injektive Abbildung $f : X \to Y$, so wäre $f(X) \subseteq Y$ mit $|X| = |f(X)| > |Y|$, ein Widerspruch.*
2. *(a) Hier kann man das Schubfachprinzip direkt anwenden: Wähle als Menge X die aus der Waschmaschine genommenen Socken und als Menge Y die drei Zehnerpacks. Nach (a) hat man, sobald man vier Socken in der Hand hält, mindestens zwei Socken aus demselben Zehnerpack.*

   (b) Hier ist das Schubfachprinzip wie in (a) beschrieben nicht anwendbar. Man kann erst ab 31 Socken sicher sein, dass man von einer Sorte sowohl einen linken als auch einen rechten Socken gezogen hat.