Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006
Tutorium 2, Lösungsskizze

Mächtigkeit von Mengen

Zur Erinnerung: Eine Menge M heißt *abzählbar*, wenn sie leer ist oder eine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to M$ existiert. Ist M nicht abzählbar, so wird M *überabzählbar* genannt.

Aufgaben

T 5 (Teilmengen abzählbarer Mengen).

(a) Es sei M eine abzählbare Menge. Zeigen Sie, dass dann auch jede Teilmenge $N \subseteq M$ abzählbar ist.

(b) Nun sei M eine Menge, welche eine überabzählbare Teilmenge N besitzt. Zeigen Sie, dass dann auch M überabzählbar ist. (Hinweis: indirekter Beweis!)

(a) Ist $N = \emptyset$, so ist N abzählbar. Ist $N \neq \emptyset$, so ist auch $M \neq \emptyset$. Da M zudem abzählbar ist, existiert also eine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to M$. Wir wählen nun ein $x_0 \in N$ und definieren

$$g\colon \mathbb{N} \to N\,, \qquad g(n) \;:=\; \begin{cases} f(n) & \text{falls } f(n) \in N; \\ x_0 & \text{falls } f(n) \notin N. \end{cases}$$

Dann ist g surjektiv, denn ist $x \in N$, so existiert wegen der Surjektivität von f ein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = x$ und dann ist auch $g(n) = x$. Also ist N abzählbar.

(b) In (a) haben wir gezeigt: "M abzählbar $\Longrightarrow$ N abzählbar." Nach Bemerkung I.1.3 (3) ("Kontraposition") ist vorige Aussage äquivalent zur Aussage: "N ist nicht abzählbar $\Longrightarrow$ M ist nicht abzählbar." Dies hatten wir zu zeigen.

T 6 (Abzählbarkeit und injektive Abbildungen nach $\mathbb{N}$)

Zeigen Sie, dass eine Menge M genau dann abzählbar ist, wenn es eine injektive Abbildung $f\colon M \to \mathbb{N}$ gibt.

Wir zeigen zuerst: 'M abzählbar $\Rightarrow$ es existiert eine injektive Abbildung $f\colon M \to \mathbb{N}$.' *Ist $M = \emptyset$, so gibt es genau eine Abbildung $f\colon \emptyset \to \mathbb{N}$ (mit leerem Graphen), und diese ist injektiv. Ist M abzählbar und nicht leer, so gibt es eine surjektive Abbildung $g\colon \mathbb{N} \to M$. Für jedes $x \in M$ gibt es wegen der Surjektivität von g ein Element $n \in \mathbb{N}$ mit $g(n) = x$. Wir schreiben $f(x) := n$ für dieses Element und erhalten so eine Abbildung $f\colon M \to \mathbb{N}$. Diese erfüllt per Konstruktion $g(f(x)) = x$ für alle x, also $g \circ f = \mathrm{id}_M$. Daraus folgt, dass f injektiv ist: Sind nämlich $x, y \in M$ mit $f(x) = f(y)$, so ist $x = g(f(x)) = g(f(y)) = y$.*

Nun zeigen wir: "Existiert eine injektive Abbildung $f\colon M \to \mathbb{N}$, so ist M abzählbar." *Ist M leer, so ist M abzählbar. Ist M nicht leer und existiert f, so wählen wir irgendein $x_0 \in M$ und definieren*

$$g\colon \mathbb{N} \to M\,, \qquad g(n) \;:=\; \begin{cases} x & \text{falls } x \in M \text{ existiert mit } f(x) = n; \\ x_0 & \text{falls } n \notin f(M). \end{cases}$$

Da f injektiv ist, gibt es zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ höchstens ein $x \in M$ mit $f(x) = n$. Daher ist g wohldefiniert. Per Konstruktion ist $g(f(x)) = x$ für alle $x \in M$. Daraus folgt, dass g surjektiv ist und somit ist M abzählbar.

T 7 **(Abbildungen zwischen Produktmengen)** Zeigen Sie: Sind $f\colon A \to X$ und $g\colon B \to Y$ surjektive Abbildungen, so ist auch die Abbildung $\phi\colon A \times B \to X \times Y$, $\phi(a, b) := (f(a), g(b))$ surjektiv.

Notation: Man schreibt $f \times g := \phi$ für Abbildungen der vorigen Bauart.

Ist $z \in X \times Y$, so ist $z = (x, y)$ für ein $x \in X$ und ein $y \in Y$. Da f surjektiv ist, existiert ein $a \in A$ mit $f(a) = x$. Da g surjektiv ist, existiert ein $b \in B$ mit $g(b) = y$. Dann ist $\phi(a, b) = (f(a), g(b)) = (x, y) = z$, also ϕ surjektiv.

T 8 **(Beispiele abzählbarer Mengen).**

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen abzählbar sind:

(a) Die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen.

(b) Die Menge $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (Skriptverweis).

(c) $M \times N$, wenn M und N abzählbar sind. (Hinweis: Aufgabe **T7**!)

(d) Die Menge $\mathbb{N}^3 = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(e) Die Menge $\mathbb{N}^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

(f) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

(g) Die Menge $\mathbb{Q}^m$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

(a) Es sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ die Abbildung, welche eine gerade Zahl n auf $n/2$, eine ungerade Zahl n auf $-(n-1)/2$ abbildet. Dann ist f surjektiv und somit $\mathbb{Z}$ abzählbar.

(b) Dies ist Satz I.3.13 im Skript.

*(c) Ist M oder N leer, so ist auch $M \times N$ leer und somit abzählbar. Sind M und N nicht leer, so gibt es surjektive Abbildungen $f\colon \mathbb{N} \to M$ und $g\colon \mathbb{N} \to N$. Dann ist $f \times g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to M \times N$ nach Aufgabe **T7** surjektiv. Weiter gibt es nach (b) eine surjektive Abbildung $h\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dann ist $(f \times g) \circ h\colon \mathbb{N} \to M \times N$ surjektiv und somit $M \times N$ abzählbar.*

(d) $\mathbb{N}$ ist abzählbar und nach (b) ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar. Also ist auch $\mathbb{N}^3 = \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}$ abzählbar, nach (c).

(e) Per Induktion nach $m \in \mathbb{N}$. Der Fall $m = 1$ ist trivial (denn $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} = \mathbb{N}^1$ ist surjektiv). Induktionsschritt: Sei $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $\mathbb{N}^m$ abzählbat ist (Induktionsannahme). Wir haben zu zeigen, dass $\mathbb{N}^{m+1}$ abzählbar ist (Induktionsbehauptung). Da $\mathbb{N}^{m+1} = \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}$, folgt dies mit (c) aus der Abzählbarkeit von $\mathbb{N}^m$ und $\mathbb{N}$.

Bemerkung: Streng genommen sind $\mathbb{N}^{m+1}$ und $\mathbb{N}^m \times \mathbb{N}$ nicht die gleichen Mengen (wenn $m \geq 2$): die erste besteht aus $(m+1)$-Tupeln $(k_1, \ldots, k_{m+1})$ natürlicher Zahlen, die zweite aus Paaren $((k_1, \ldots, k_m), k_{m+1}))$ eines m-Tupels und einer natürlichen Zahl. Offensichtlich ist jedoch die Abbildung $h\colon \mathbb{N}^m \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{m+1}$, $((k_1, \ldots, k_m), k_{m+1}) \mapsto (k_1, \ldots, k_{m+1})$ bijektiv. Komponiert man eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}$ mit dieser Bijektion, so erhält man eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}^{m+1}$.

Man identifiziert meist $\mathbb{N}^{m+1}$ mit $\mathbb{N}^m \times \mathbb{N}$ mittels der Bijektion h und überlässt es dem mathematisch gebildeten Leser, die fehlenden Bijektionen in Gedanken einzufügen.

(f) Die Abbildung $g\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $g(m, n) := \frac{m}{n}$ ist surjektiv. Da $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{N}$ abzählbar sind, ist nach (c) auch $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ abzählbar, es gibt also eine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Dann ist $g \circ f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ surjektiv (als Komposition surjektiver Abbildungen) und somit $\mathbb{Q}$ abzählbar.

(g) Per Induktion nach m. Induktionsanfang $m = 1$: Nach (f) ist $\mathbb{Q}^1 = \mathbb{Q}$ abzählbar. Induktionsschritt: Sei $m \in \mathbb{N}$ derart, dass $\mathbb{Q}^m$ abzählbar ist. Wir haben zu zeigen, dass $\mathbb{Q}^{m+1}$ abzählbar ist. Da $\mathbb{Q}^{m+1} = \mathbb{Q}^m \times \mathbb{Q}$, wobei $\mathbb{Q}^m$ und $\mathbb{Q}$ abzählbar sind, ist $\mathbb{Q}^{m+1}$ nach (c) abzählbar.

T 9 (Weitere Konstruktionen abzählbarer Mengen).

(a) Zeigen Sie: Ist M_n eine abzählbare Menge für jedes $n \in \mathbb{N}$, so ist auch die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ abzählbar. (Hinweis: Nehmen Sie der Einfachheit halber an, dass keine der Mengen M_n leer ist. Finden Sie nun zunächst eine surjektive Abbildung $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$).

(b) Zeigen Sie, dass für jede abzählbare Menge M auch die Menge $\mathcal{E}(M)$ aller endlichen Teilmengen von M abzählbar ist.

(c) Vergleichen Sie (b) für $M := \mathbb{N}$ mit dem Satz von Cantor-Russel (Satz I.3.16).

(a) Ist jedes M_n leer, so auch $M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n$ und somit abzählbar. Andernfalls ist $M_{n_0} \neq \emptyset$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$. Ersetzen wir jedes M_n mit $M_n = \emptyset$ durch M_{n_0}, so bleibt M unverändert. Wir dürfen daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $M_n \neq \emptyset$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Somit gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine surjektive Abbildung $f_n\colon \mathbb{N} \to M_n$. Wir betrachten nun die Abbildung

$$f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to M\,, \qquad f(n, m) := f_n(m)\,.$$

Gegeben $x \in M$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x \in M_n$ und dann ist $x = f_n(m) = f(n, m)$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Daher ist f surjektiv. Da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar ist und nicht leer, gibt es eine surjektive Abbildung $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dann ist $f \circ g\colon \mathbb{N} \to M$ surjektiv, somit M abzählbar.

(b) Ist $M = \emptyset$, so hat M nur eine Teilmenge (die leere) und somit ist $\mathcal{E}(M)$ abzählbar. Sei nun $M \neq \emptyset$ und $f\colon \mathbb{N} \to M$ surjektiv. Gegeben $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{E}(M)_n$ die Menge aller nicht-leeren Teilmengen von M mit höchstens n Elementen. Weiter sei

$\mathcal{E}(M)_0 = \{\emptyset\}$. Dann ist $\mathcal{E}(M)_0$ eine ein-elementige Menge und somit abzählbar. Weiter ist $\mathcal{E}(M)_n$ abzählbar für jedes $n \in \mathbb{N}$, denn $\mathcal{E}(M)_n$ ist das Bild der Abbildung $f_n \colon \mathbb{N}^n \to \mathcal{E}(M)_n$, $(k_1, \ldots, k_n) \mapsto \{f(k_1), \ldots, f(k_n)\}$. Als abzählbare Vereinigung von abzählbaren Mengen ist nach Teil (a) auch

$$\mathcal{E}(M) \;=\; \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{E}(M)_n$$

abzählbar (wenn Sie unbedingt $\mathbb{N}$ als Indexmenge nehmen wollen, verschieben Sie den Index um 1).

(c) Nach dem Satz von Cantor-Russel (angewandt mit $X := \mathbb{N}$) gibt es keine surjektive Funktion $\mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Also ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$ überabzählbar. Die Menge $\mathcal{E}(\mathbb{N})$ der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$ ist nach (b) jedoch abzählbar und somit "viel kleiner" als die volle Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.