Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

20./21. 4. 2006

1. Tutorium zur Analysis 1

Verifizieren und Herleiten von Aussagen

T 1 (Verifizieren einer Aussage: beispielsweise durch Wahrheitstafeln)
Zeigen Sie, daß die Aussagen

$$\neg(\neg p) \Longleftrightarrow p \qquad \text{Prinzip der doppelten Negation}$$

und

$$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q \qquad \text{Erste de Morgansche Regel}$$

allgemeingültig sind, indem Sie geeignete Wahrheitstafeln aufstellen.

T 2 (Herleiten einer Aussage: am Beispiel der zweiten de Morganschen Regel)
Zeigen Sie, daß die Aussage

$$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q \qquad \text{Zweite de Morgansche Regel}$$

allgemeingültig ist, indem Sie diese aus dem Prinzip der doppelten Negation und der ersten de Morganschen Regel herleiten.

T 3 (Verifizieren und Herleiten, 1)
Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit der logischen Distributivgesetze

$$p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

und

$$p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r),$$

indem Sie

1. das erste mithilfe einer Wahrheitstafel verifizieren,
2. das zweite
   (a) mithilfe einer Wahrheitstafel verifizieren,
   (b) mithilfe des Prinzips der doppelten Negation und den de Morganschen Regeln aus dem ersten herleiten.

T 4 (Verifizieren und Herleiten, 2)

Diskutieren Sie die Unterschiede eines Beweises durch Verifizieren und eines Beweises durch Herleiten, insbesondere hinsichtlich der folgenden Fragen:

- Läßt sich jede Aussage verifizieren, die man hergeleitet hat?
  (Sind die Herleitungsregeln und Grundannahmen in einem gewissen Sinne korrekt? Gibt es Widersprüche in unserem formalen System?)
- Läßt sich jede Aussage herleiten, die man verifiziert hat?
  (Kennt man genügend viele Herleitungsregeln und Grundannahmen? Ist unser formales System vollständig in dem Sinne, daß wir von jeder Aussage zeigen können, daß sie allgemeingültig ist oder nicht?)

Das Teilgebiet, das sich mit Fragen obiger Art beschäftigt, heißt Logik. Beispielsweise gilt folgender Satz:

Vollständigkeitssatz der Aussagenlogik: *Jede allgemeingültige Aussage läßt sich herleiten, wenn man das Prinzip der doppelten Negation, eine der beiden de Morganschen Regeln, eines der beiden Kommutativgesetze, eines der beiden Assoziativgesetze, eines der beiden Distributivgesetze und*

$$p \wedge \mathbf{F} \Longleftrightarrow \mathbf{F}, \quad p \wedge \mathbf{W} \Longleftrightarrow p, \quad \neg\mathbf{W} \Longleftrightarrow \mathbf{F}$$

als Grundannahmen verwendet.

Es gilt aber auch folgender Unvollständigkeitssatz:

Gödelscher Unvollständigkeitssatz: *Jedes hinreichend mächtige formale System ist entweder widersprüchlich oder unvollständig.*

1. Tutorium zur Analysis 1, Lösungsvorschlag

Verifizieren und Herleiten von Aussagen

T 1 (Verifizieren einer Aussage: beispielsweise durch Wahrheitstafeln)
Zeigen Sie, daß die Aussagen

$$\neg(\neg p) \Longleftrightarrow p \qquad \text{Prinzip der doppelten Negation}$$

und

$$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q \qquad \text{Erste de Morgansche Regel}$$

allgemeingültig sind, indem Sie geeignete Wahrheitstafeln aufstellen.

Lösung:

p	W	W	F	F
q	W	F	W	F
$\neg p$	F	F	W	W
$\neg q$	F	W	F	W
$\neg(\neg p)$	W	W	F	F
$\neg p \wedge \neg q$	F	F	F	W
$p \vee q$	W	W	W	F
$\neg(p \vee q)$	F	F	F	W

T 2 (Herleiten einer Aussage: am Beispiel der zweiten de Morganschen Regel)
Zeigen Sie, daß die Aussage

$$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q \qquad \text{Zweite de Morgansche Regel}$$

allgemeingültig ist, indem Sie diese aus dem Prinzip der doppelten Negation und der ersten de Morganschen Regel herleiten.

Lösung:

$$\neg p \vee \neg q \Longleftrightarrow \neg(\neg(\neg p \vee \neg q)) \Longleftrightarrow \neg(\neg(\neg p) \wedge \neg(\neg q)) \Longleftrightarrow \neg(p \wedge q)$$

T 3 (Verifizieren und Herleiten, 1)
Beweisen Sie die Allgemeingültigkeit der logischen Distributivgesetze

$$p \wedge (q \vee r) \Longleftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

und

$$p \vee (q \wedge r) \Longleftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r),$$

indem Sie

1. das erste mithilfe einer Wahrheitstafel verifizieren,
2. das zweite
   (a) mithilfe einer Wahrheitstafel verifizieren,
   (b) mithilfe des Prinzips der doppelten Negation und den de Morganschen Regeln aus dem ersten herleiten.

Lösung:

p	W	W	W	W	F	F	F	F
q	W	W	F	F	W	W	F	F
r	W	F	W	F	W	F	W	F
$p \wedge q$	W	W	F	F	F	F	F	F
$p \wedge r$	W	F	W	F	F	F	F	F
$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	W	W	W	F	F	F	F	F
$q \vee r$	W	W	W	F	W	W	W	F
$p \wedge (q \vee r)$	W	W	W	F	F	F	F	F

Die Wahrheitstafel des zweiten Distributivgesetzes erhält man analog.

Herleiten kann man das zweite Distributivgesetz wie folgt:

$$\begin{aligned}
p \vee (q \wedge r) &\iff \neg(\neg(p \vee (q \wedge r))) \\
&\iff \neg(\neg p \wedge \neg(q \wedge r)) \\
&\iff \neg(\neg p \wedge (\neg q \vee \neg r)) \\
&\iff \neg((\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r)) \\
&\iff \neg(\neg p \wedge \neg q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg r) \\
&\iff (\neg\neg p \vee \neg\neg q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg\neg r) \\
&\iff (p \vee q) \wedge (p \vee r)
\end{aligned}$$

T 4 (Verifizieren und Herleiten, 2)

Diskutieren Sie die Unterschiede eines Beweises durch Verifizieren und eines Beweises durch Herleiten, insbesondere hinsichtlich der folgenden Fragen:

- Läßt sich jede Aussage verifizieren, die man hergeleitet hat?
  (Sind die Herleitungsregeln und Grundannahmen in einem gewissen Sinne korrekt? Gibt es Widersprüche in unserem formalen System?)
- Läßt sich jede Aussage herleiten, die man verifiziert hat?
  (Kennt man genügend viele Herleitungsregeln und Grundannahmen? Ist unser formales System vollständig in dem Sinne, daß wir von jeder Aussage zeigen können, daß sie allgemeingültig ist oder nicht?)

Das Teilgebiet, das sich mit Fragen obiger Art beschäftigt, heißt Logik. Beispielsweise gilt folgender Satz:

Vollständigkeitssatz der Aussagenlogik: *Jede allgemeingültige Aussage läßt sich herleiten, wenn man das Prinzip der doppelten Negation, eine der beiden de Morganschen Regeln, eines der beiden Kommutativgesetze, eines der beiden Assoziativgesetze, eines der beiden Distributivgesetze und*

$$p \wedge \mathbf{F} \Longleftrightarrow \mathbf{F}, \quad p \wedge \mathbf{W} \Longleftrightarrow p, \quad \neg\mathbf{W} \Longleftrightarrow \mathbf{F}$$

als Grundannahmen verwendet.

Es gilt aber auch folgender Unvollständigkeitssatz:

Gödelscher Unvollständigkeitssatz: *Jedes hinreichend mächtige formale System ist entweder widersprüchlich oder unvollständig.*