Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
Dr. Abdelhadi Es-Sarhir

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

19. Juli 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 14

Gruppenübung

G 45 (Regeln von de l'Hospital).

Finden Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x}$;

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$;

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos \frac{x}{2}}{1-\cos x}$;

(d) $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^2}$.

G 46 (Satz über die Umkehrfunktion).

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \frac{1}{2}\sin x$.

(a) Machen Sie sich kurz klar, dass f differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

(b) Zeigen Sie, dass f streng monoton wächst.

(c) Wie verhält sich $f(x)$ für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$?

(d) Zeigen Sie, dass $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(e) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktion $g := f^{-1}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist. Berechnen Sie $g(\pi)$ und $g'(\pi)$.

G 47 (Eine C^n-Funktion, die nicht C^{n+1} ist).

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [0,\infty[\, \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^{n+\frac{1}{2}}$ eine C^n-Funktion ist, nicht aber C^{n+1}. Bestimmen Sie auch $f^{[k]}$ für $k \in \{1,\ldots,n\}$.

G 48 (Eine nützliche glatte Funktion).

Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{falls } x > 0; \\ 0 & \text{falls } x \le 0 \end{cases}$$

beliebig oft differenzierbar ist, und $f^{[n]}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

[Hinweis: Zeigen Sie per Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, dass f eine C^n-Funktion ist und es eine Polynomfunktion $p_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gibt derart, dass $f^{[n]}(x) = p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ für alle $x > 0$.]

Die folgenden Hausübungen geben keine Punkte mehr und werden nicht mehr korrigiert. Sie enthalten jedoch Wichtiges für die mathematische Allgemeinbildung und sollten daher dennoch ernst genommen werden.

Hausübung

H 50 (Regeln von de l'Hospital).

Finden Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{e^x-1}$;

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha}$ sowie $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}$ mit $\alpha, \beta > 0$;

(c) $\lim_{x\searrow 0} x^\alpha \ln x$ mit $\alpha > 0$;

(d) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

H 51 (C^n-Funktionen).

Zeigen Sie die folgenden Aussagen durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

(a) Für alle C^n-Funktionen $f, g\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist auch $\lambda f + \mu g$ eine C^n-Funktion.

[Hinweis: Berechnen Sie $(\lambda f + \mu g)'$ und überprüfen Sie, dass dies eine C^{n-1}-Funktion ist.]

(b) Für alle C^n-Funktionen $f, g\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$ ist auch ihr Produkt $f \cdot g\colon\ ]a,b[\ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ eine C^n-Funktion.

[Hinweis: Sie kennen eine Formel für $(f \cdot g)'$. Überprüfen Sie, dass diese Funktion C^{n-1} ist.]

(c) Für alle C^n-Funktionen $f\colon]a,b[\ \to \mathbb{R}$ und $g\colon]c,d[\ \to\ ]a,b[$ ist auch ihre Komposition $f \circ g\colon\ ]c,d[\ \to \mathbb{R}$ eine C^n-Funktion.

[Hinweis: Sie kennen eine Formel für $(f \circ g)'$. Überprüfen Sie, dass diese Funktion C^{n-1} ist.]

H 52 (Lineare Approximation).

Für welche $\alpha \in [0, \infty[$ konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \tfrac{1}{n}\right)^\alpha$?

[Finden Sie zunächst mit Lemma V.1.5 ein $r > 0$ derart, dass $\frac{1}{2}x \le \sin x \le \frac{3}{2}x$ für alle $x \in [0, r[$.]

H 53 (Weitere nützliche Funktionen). Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in **G48**.

(a) Zeigen Sie, dass f monoton wächst und bestimmen Sie $\lim_{x\to\infty} f(x)$ und $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Skizzieren Sie f grob.

(b) Zeigen Sie, dass die glatte Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := -f(1-2f(x))$ monoton wächst, für große x einen konstanten Wert M annimmt und für $-x$ groß einen konstanten Wert $m < M$. Skizzieren Sie g grob.

(c) Basteln Sie aus g eine glatte Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit analogen Eigenschaften, jedoch mit $m = 0$ und $M = 1$.

(d) Skizzieren Sie eine glatte Funktion $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den folgenden Eigenschaften: Es existieren $a < b < c < d$ derart, dass $k(x) = 0$ gilt falls $x < a$ oder $x > d$, $k(x) = 1$ ist für alle $x \in [b, c]$, die Einschränkung $k|_{[a,b]}$ monoton wächst und $k|_{[c,d]}$ monoton fällt. Basteln Sie mit Hilfe von h eine solche Funktion k.

Bem.: Man nennt eine solche Funktion k eine "Abschneidefunktion" oder auch "cut-off."