Department of Mathematics
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dr. Abdelhadi Es-Sarhir
PD Dr. Helge Glöckner

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

12. Juli 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 13

Ableitungen und Extremwerte

Gruppenübung

G 41 Das Ziel dieser Aufgabe ist zu bestimmen den Grenzwert

$$\alpha = \lim_{t\to 0} \frac{(1+t)^{2006}-1}{t}.$$

Deshalb betrachten wir die Funktion f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $f(x) = (1+x)^{2006}$.

(a) Berechnen Sie die Ableitung f' der Funktion f. Bestimmen Sie $f'(0)$.

(b) Berechnen Sie die Differenzenquotienten der Funktion f zwischen 0 und t. Bestimmen Sie α.

G 42 (a) Sind $f,\, g:\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktionen mit $f(a) \geq g(a)$ und $f'(x) \geq g'(x)$ für alle $x \in]a,b[$, so gilt $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in [a,b]$.
(Hinweis: Benutzen Sie den Mittelwertsatz.)

(b) Beweisen Sie für alle $x \geq 1$ die Abschätzung

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1.$$

G 43 Beweisen Sie: Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt, $f:\ J \to \mathbb{R}$ stetig und $p \in J$. Ist $f_{|J\setminus\{p\}}$ differenzierbar und gilt

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x\neq p}} f'(x) = a,$$

so ist f differenzierbar auf J und es gilt $f'(p) = a$. (Hinweis: Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist $(\frac{1}{h}(f(p+h)-f(p)) = f'(p+\vartheta_h \cdot h)$ für ein geeignetes ϑ_h mit $0 < \vartheta_h < 1$. Hieraus schließe man die Differenzierbarkeit in p mit $f'(p) = a$.

G 44 Bestimmen Sie die Nullstellen und lokalen Extremwerte sowie deren Typen der Funktion

$$f(x) = 2x^4 - 8x^2 \quad \text{auf } \ D = [-1, 2].$$

Hausübung

H 46 Sei $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Untersuchen Sie die Differenzierbarkeit von f an der Stelle 0 und berechnen Sie in gegeben Fall die Ableitung.

H 47 Zeigen Sie anhand des Satzes von Rolle, dass die Gleichung $x^n + px + q = 0$ höchstens 2 reelle Lösungen besitzt, falls n gerade ist, und höchstens 3 reelle Lösungen, falls n ungerade ist.

H 48 Finden Sie die lokalen Maxima und Minima der folgenden Funktionen

(a) $f(x) = (x-4)(x+3)^3$ auf $D = [1, 4]$

(b) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$ auf $D = [0, 5]$.

H 49 Untersuchen Sie, ob die Funktion $f:\ \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \ln(|1-e^x|)$ einen lokales Maximum auf $\mathbb{R}^*$ besitzt.