Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
Dr. Abdelhadi Es-Sarhir

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5. Juli 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 12

Gruppenübung

G 38 (Punktweise Konvergenz vs. gleichmäßige Konvergenz).

Wir betrachten die stetigen Funktionen $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \sqrt[n]{x}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in [0,1]$ der Grenzwert $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert, und berechnen Sie ihn. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also punktweise gegen f.

(b) Ist die Grenzfunktion f stetig?

(c) Konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f?

G 39 (Ableitungen).

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x^3 + 5)$;

(b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$, wobei $a > 0$ gegeben ist und $a^x := \exp(x \cdot \log a)$;

(c) $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log(x^2 + 2x + 2)$;

(d) $k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{3x-1}{x^2+1}$;

(e) $\ell\colon\ ]0,\infty[\ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^x$.

G 40 (Gleichmäßige Konvergenz).

Die gegebenen Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n\colon [0,\infty[\ \to \mathbb{R}$ konvergieren punktweise. Berechnen Sie die Grenzfunktion f und entscheiden Sie, ob die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert.

(a) $f_n(x) := \frac{x}{1+nx}$;

(b) $f_n(x) := \frac{1}{1+nx}$.

Hausübung

H 42 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen).

Untersuchen Sie die jeweilige Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n\colon [0,\infty[\ \to \mathbb{R}$ auf punktweise sowie auf gleichmäßige Konvergenz. Berechnen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion f.

(a) $f_n(x) := \frac{nx}{1+nx}$;

(b) $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x}$.

H 43 (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen).

Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ mit $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{(1+x^2)^n}$ konvergiert punktweise gegen eine Grenzfunktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}$ für $x \in \mathbb{R}$.

(b) Ist die Konvergenz gleichmäßig?

H 44 (Differenzierbarkeit).

Es seien f und g Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Ist $f \cdot g$ an der Stelle 0 differenzierbar, so ist eine der Funktionen f und g an der Stelle 0 differenzierbar.

(b) Sind f und $f \cdot g$ an der Stelle 0 differenzierbar, so ist auch g an der Stelle 0 differenzierbar.

(c) Sind f und $f \cdot g$ an der Stelle 0 differenzierbar und ist $f(0) \neq 0$, so ist auch g an der Stelle 0 differenzierbar.

(d) Ist f differenzierbar und g stetig an der Stelle 0, so ist $f \cdot g$ differenzierbar an der Stelle 0.

(e) Ist f differenzierbar sowie g stetig an der Stelle 0 und gilt $f(0) = 0$, so ist $f \cdot g$ differenzierbar an der Stelle 0.

H 45 (Eine Anwendung gleichmäßiger Stetigkeit).

Es sei $\phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$, welche gleichmäßig gegen eine Funktion $f \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ konvergiert.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $r > 0$ gibt derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ das Bild von f_n im Intervall $[-r, r]$ enthalten ist, sowie das Bild von f.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(\phi \circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Kompositionen $\phi \circ f_n \colon [0,1] \to \mathbb{R}$ für $n \to \infty$ gleichmäßig gegen $\phi \circ f$ konvergiert.

[Die Abbildung $C[0,1] \to C[0,1]$, $f \mapsto \phi \circ f$ ist also stetig].