Department of Mathematics
Prof. Dr. K.-H. Neeb
Dr. Abdelhadi Es-Sarhir
PD Dr. Helge Glöckner

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

28. Juni 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Exercise 11

Stetige Funktionen

Groupwork

G 33 Bestimmen Sie die Punkte $x \in \mathbb{R}$, in denen die folgende Funktion stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ \frac{1}{x}, & 1 \le x \le 2, \\ x^2 + x - 5 & x > 2. \end{cases}$$

(Skizze!).

G 34 Sei $f:\ [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } \frac{1}{n} \le x < \frac{1}{n-1} \quad n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f an alle Punkten der Form $x = \frac{1}{n}$ unstetig ist, aber in 0 stetig ist.

G 35 Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto \sqrt{x}$ gleichmäßig stetig ist auf $[0,1]$ und auf $[0,+\infty[$.
(Hinweis: Betrachten Sie, $g(x) = x^2$ auf $[0,1]$ und zeigen Sie, dass g bijektiv ist und für alle $x \in [0,1]$, $\sqrt{x} = g^{-1}(x)$ gilt. Benutze Satz IV.1.24 im Skript.)

G 36 Es sei die Funktion $f:[-1,1] \to \mathbb{R}$ stetig in 0 mit $f(0) = 0$ und $g:[-1,1] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt. Zeigen Sie: Die Funktion $fg:\ [-1,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)g(x)$ ist stetig in 0.

G 37 Zeigen Sie, dass $f:x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ von $\mathbb{R}$ nach $]-1,1[$ bijektiv ist und berechnen Sie f^{-1}. (Skizze!).

Homework

H 39 Es seien f und g zwei Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit

$$f(x) = [x] + (x - [x])^2 \quad \text{und} \quad g(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}.$$

(i) Bestimmen Sie die Stetigkeitsstellen von f.

(ii) Für welchen Punkten x_0 gilt $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$?

(iii) Zeigen Sie, dass $g = f^{-1}$.

H 40 Sei f eine stetige Funktionen von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$, so dass $f(0) = f(1)$ gilt.

(i) Zeigen Sie, dass ein $x \in [0, \frac{1}{2}]$ existiert mit der Eigenschaft

$$f(x + \frac{1}{2}) = f(x).$$

(ii) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ ein $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$ existiert, so dass

$$f(x + \frac{1}{n}) = f(x).$$

H 41 Sei $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, mit $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}$ beschränkt ist.

(b) Zeigen Sie, dass f gleichmässig stetig ist.
(Hinweis: Benutze $\mathbb{R} = [-R, R] \cup]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$ für $R \in \mathbb{R}$.)