Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

21. Juni 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 10

Gruppenübung

G 30 (Konvergenzkriterien für Reihen).

(a) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+(-1)^k}$ mit Hilfe des Quotientenkriteriums und des Wurzelkriteriums auf Konvergenz.

(b) Nach Bemerkung III.4.11 (c) divergiert eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ mit $c_n \neq 0$, wenn $\liminf \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| > 1$. Folgt die Divergenz auch schon, wenn nur

$$\limsup \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \; > \; 1 \quad ?$$

Hinweis: Aufgabenteil (a).

G 31 (Konvergenz von Potenzreihen).

(a) Für welche $z \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$? Was ist der Konvergenzradius dieser Potenzreihe?

(b) Finden Sie den Konvergenzradius der komplexen Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit

$$a_{2k} = 0\,, \qquad a_{2k+1} \;=\; \frac{(-1)^k}{2k+1} \qquad \text{für } k \in \mathbb{N}_0.$$

(c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die unendliche Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{3^{2k+1} \cdot k} \;\; ?$$

G 32 (Konvergenzradien).

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$. Zeigen Sie:

(a) Für jedes $m \in \mathbb{N}$ hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^m a_n z^n$ ebenfalls den Konvergenzradius R.

(b) Ist $p\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion der Form

$$p(x) \;=\; c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \cdots + c_0$$

mit $m \in \mathbb{N}_0$, $c_0, \ldots, c_m \in \mathbb{C}$ und $c_m \neq 0$, so hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) a_n z^n$ ebenfalls den Konvergenzradius R.

(c) Für p wie in (b) hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n$ den Konvergenzradius 1.

Hausübung

H 34 (Konvergenzradien).

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in [0, \infty]$ und $p \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Polynomfunktion derart, dass $p(n) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass auch die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p(n)} z^n$ den Konvergenzradius R hat.

H 35 (Konvergenz in Abhängigkeit von Parametern).

(a) Für welche $\alpha \in \mathbb{Q}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^3+2n+5}\right)^{\alpha}$?

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{Q}_+$ und $x \geq 0$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{n^3+2n+5}\right)^{\alpha} x^n$?

H 36 (Verdichtungskriterium).

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge nicht negativer reeller Zahlen. Zeigen Sie: Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} n\, a_n \;=\; 0\,.$$

H 37 (Zusammenfassen von Blöcken in konvergenten Reihen). Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe komplexer Zahlen und $1 = n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$. Zeigen Sie, dass dann auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} c_n \Big)$ konvergiert, mit Grenzwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{n=n_k}^{n_{k+1}-1} c_n \Big) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n\,.$$

H 38 (Dezimalentwicklungen und rationale Zahlen).

Wir betrachten eine reelle Zahl $x \geq 0$, mit Dezimalentwicklung $x = \sum_{k=-m}^{\infty} d_k \cdot 10^{-k}$, wobei $d_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

(a) Zeigen Sie: Ist die Dezimalentwicklung *periodisch* in dem Sinne, dass es ein $m_0 \geq -m$ und ein $\ell \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $d_k = d_{k+\ell}$ für alle $k \geq m_0$, so ist x eine rationale Zahl.

Hinweis: Fast alle Summanden können zu Blöcken der Form $C \cdot 10^{-\ell \cdot k}$ zusammengefasst werden mit einer Konstanten $C \in \mathbb{N}_0$. Wenden Sie nun die geometrische Summenformel an.

(b) Zeigen Sie, dass umgekehrt auch jede Dezimalentwicklung einer rationalen Zahl $x \geq 0$ periodisch ist.

Hinweis: Nach Abziehen einer ganzen Zahl (die wir problemlos durch Zehnerpotenzen ausdrücken können) dürfen wir annehmen, dass $x \in [0, 1[$, etwa $x = \frac{z}{n}$ mit $z \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$ und $n > z$. Eine Dezimalentwicklung $x = 0.d_1 d_2 \cdots$ erhält man wie folgt:

Es existiert genau ein $d_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ derart, dass

$$10 \cdot z \;=\; d_1 \cdot n \;+\; r_1$$

für ein $r_1 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Dann ist also $\frac{z}{n} = \frac{d_1}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{r_1}{n}$. Nun existiert genau ein $d_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ derart, dass

$$10 \cdot r_1 \;=\; d_2 \cdot n \;+\; r_2$$

für ein $r_2 \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. Dann ist $\frac{z}{n} = \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{1}{10^2} \cdot \frac{r_2}{n}$. Analog geht es weiter.

Können die Zahlen r_k für $k \in \mathbb{N}$ alle verschieden sein?

(c) Ist die reelle Zahl $x := \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k^2}$ rational?

(d) Warum gilt $0.999999\ldots = 1$?