Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

14. Juni 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 9

Gruppenübung

G 27 (Majorantenkriterium).

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^3+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{n^2}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1+(\frac{1}{2})^n}{3^n}$.

G 28 (Weitere Konvergenzkriterien).

Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz. Ist das vorgeschlagene Kriterium anwendbar ?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (Leibnizkriterium ?);

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1+(\tfrac{1}{2})^n)$ (Leibnizkriterium ?);

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+n+1}{2n^2+3}\right)^n$ (Wurzelkriterium ?);

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{\sqrt{n!}}$ (Quotientenkriterium ?).

G 29 (Eine Teleskopsumme).

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n := \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$. Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auf Konvergenz. Hinweis: Was ist die n-te Partialsumme der Reihe ?

Hausübung

H 30 (Konvergenz konkreter Beispiele von Reihen).

Welche der folgenden Reihen sind beschränkt, konvergent bzw. absolut konvergent?

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^n$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+2}{2n^2}$;

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n+1}{3^n+5}$.

H 31 (Minorantenkriterium).

Beweisen Sie das folgende Divergenz-Kriterium durch Zurückführen auf Bekanntes:

Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ eine positive Reihe. Gibt es eine divergente, positive Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ derart, dass $a_n \le c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ divergent.

Welche Information erhalten Sie damit im Falle einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ mit beliebigen komplexen Koeffizienten, wenn $a_n \le |c_n|$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ wie zuvor?

H 32 (Cauchy-Produkt). Es seien $p, q \in \mathbb{C}$.

(a) Zeigen Sie, dass im Falle $p \neq q$

$$(\forall n \in \mathbb{N}_0) \qquad \sum_{k=0}^{n} p^k q^{n-k} \;=\; \frac{q^{n+1}-p^{n+1}}{q-p}\,.$$

Was ist der Wert der Summe, wenn $p = q$?

(b) Berechnen Sie das Cauchy-Produkt der geometrischen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} p^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, wenn $|p|, |q| < 1$ (d.h. was sind die Summanden dieser Reihe?)

(c) Berechnen Sie den Grenzwert des Cauchy-Produkts aus (b) im Falle $|p|, |q| < 1$, $p \neq q$. Zeigen Sie, dass das Produkt der Grenzwerte der beiden geometrischen Reihen gleich dem Grenzwert ihres Cauchy-Produkts ist.

H 33 (Noch eine Teleskopsumme).

Gegeben sei eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derart, dass $|f(x)| \le |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren $a_n := f(\frac{1}{n}) - f(\frac{1}{n+1})$.

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

(b) Finden Sie einen zweiten Beweis für die Konvergenz der Reihe, indem Sie die Bedingungen des Cauchy-Kriteriums für die Folge der Partialsummen nachweisen.