Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

7. Juni 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 8

Gruppenübung

G 23 (Häufungspunkte, Limes superior und Limes inferior). Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der gegebenen reellen Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie ihren Limes superior und Limes interior.

(a) $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$;

(b) $x_n = (-1)^n$;

(c) $x_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 1 + 2 \cdot (-1)^{\frac{n}{2}} & \text{falls } n \text{ gerade.} \end{cases}$

G 24 (Häufungspunkte und Teilfolgen).

(a) Finden Sie eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, welche $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ als Häufungspunkte hat. Geben Sie eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ an, die gegen 5 konvergiert (d.h. geben Sie $n_1 < n_2 < \cdots$ explizit an).

(b) Finden Sie eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, welche alle natürlichen Zahlen als Häufungspunkte hat.

(c) Finden Sie eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen, die (mindestens) alle rationalen Zahlen als Häufungspunkte hat.

G 25 (Cauchy-Folgen).

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X derart, dass

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad d(x_n, x_{n+1}) \; < \; 2^{-n} \,.$$

Zeigen Sie, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Hinweis: Für alle natürlichen Zahlen $m \geq n$ erhalten wir mit der Summenformel aus Aufgabe **G9**:

$$\sum_{k=n}^{m} (\tfrac{1}{2})^k \;=\; (\tfrac{1}{2})^n \sum_{k=0}^{m-n} (\tfrac{1}{2})^k \;=\; (\tfrac{1}{2})^n \frac{1-(\frac{1}{2})^{m-n+1}}{1-\frac{1}{2}} \;<\; (\tfrac{1}{2})^{n-1} \,.$$

G 26 (Grenzwert arithmetischer Mittel).

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen, mit Grenzwert $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Zeigen Sie, dass dann auch $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \;=\; x$.

Hinweis: es ist

$$\Big|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k - x\Big| = \Big|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x\Big| = \Big|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x)\Big| \,.$$

Gegeben $\varepsilon > 0$, spalten Sie die Summe rechts geschickt in zwei Anteile auf.

Hausübung

H 26 (Satz von Bolzano-Weierstraß im Komplexen).

Zeigen Sie, dass jede beschränkte Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen eine konvergente Teilfolge besitzt.

H 27 (Nullfolgen).

Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge komplexer Zahlen und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, d.h. $z_n \to 0$. Zeigen Sie, dass dann auch $(b_n z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

H 28 (Limes superior und Limes inferior).

(a) Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass

$$\liminf x_n \;\leq\; \limsup x_n$$

(wobei $\liminf = \underline{\lim}$ den Limes inferior meint, $\limsup = \overline{\lim}$ den Limes superior).

(b) Gilt für beliebige beschränkte Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ stets

$$\limsup\,(x_n + y_n) \;=\; \limsup x_n \;+\; \limsup y_n\,?$$

H 29 (Limes superior und Limes inferior).

Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen und

$$s \;:=\; \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup\,\{x_m \colon m \geq n\}\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $s = \limsup x_n$.

(b) Sei $s_n := \sup\,\{x_m \colon m \geq n\}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und nach unten beschränkt ist. Folgern Sie, dass

$$\limsup x_n \;=\; \lim_{n\to\infty} s_n\,.$$

Es gilt also $\limsup x_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \sup\,\{x_m \colon m \geq n\}$.

Am Montag, den 12. Juni 2006, 18:00-20:00 Uhr findet in S2 06/030 eine freiwillige

Probeklausur zur Analysis I

statt. Wir empfehlen allen die Teilnahme zur Übung und Selbstkontrolle!