Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

31. Mai 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 7

Gruppenübung

G 20 (Folgen)
Untersuchen Sie die untenstehenden Folgen auf Beschränktheit, Konvergenz, Divergenz, bestimmte Divergenz:

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{4n^3+n+1}{3n^3+5n^2+2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;
2. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(3-n)^3}{3n^3-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;
3. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(n+1)^3}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;
4. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(-1)^n n^2+10}{1+n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;
5. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1-n}{1-(-1)^n n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

G 21 (Rekursive Folge)
Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n$. Zeigen Sie, daß diese Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

G 22 (Reelle und komplexe Folgen)

1. Beweisen Sie, daß eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + iy_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen die komplexe Zahl $z = x+iy$ konvergiert, wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$ gilt $(x, x_n, y, y_n \in \mathbb{R})$.
2. Zeigen Sie, daß $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1} + i\frac{n^2}{2^n+1}\right) = 1$.

Hausübung

H 23 (Folge mit Parameter)
Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{tn^2}{n+1} + \frac{n^3}{n^2+4n+1}$ konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls den jeweiligen Grenzwert.

H 24 (Sandwichkriterium)

1. Sei M eine Menge von reellen Zahlen und x eine obere Schranke von M. Zeigen Sie, daß x genau dann Supremum von M ist, wenn es eine Folge von Elementen von M gibt, die gegen x konvergiert.
2. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $a_n \le b_n \le c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, daß aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = c = \lim_{n\to\infty}(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt, daß $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert c.
3. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $|b_n| \le a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, daß aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$ folgt, daß $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert 0.

H 25 (Folgen in metrischen Räumen)
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X, d).

1. Genau dann gilt $x = \lim_{n\to\mathbb{N}} x_n$, wenn die reelle Folge $(d(x_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.
2. Zeigen Sie, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn jede Teilfolge konvergiert.