Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

24. Mai 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 6

Gruppenübung

G 17 (Betrag reeller Zahlen und Ungleichungen).

(a) Machen Sie sich kurz klar, dass für eine reelle Zahl x gilt: $|x| = x$ falls $x \geq 0$, $|x| = -x$ falls $x < 0$.

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $r \in [0, \infty[$. Zeigen Sie, dass $|x| \leq r \Leftrightarrow (x \leq r$ und $-x \leq r)$. Folgern Sie, dass $|x| > r \Leftrightarrow (x > r$ oder $-x > r)$.

G 18 (Metriken und ε-Umgebungen).

(a) Es sei $d\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to [0, \infty[$, $d(z, w) := |z-w|$ die übliche Metrik auf $\mathbb{C}$. Skizzieren Sie die ε-Umgebung (offene Kugel) $U_\varepsilon(z)$ für $\varepsilon = 1$ und $z = 0$.

(b) Zeigen Sie, dass auch

$$d_\infty\colon \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to [0, \infty[\,, \quad d_\infty(z, w) := \max\{|\operatorname{Re}(z - w)|, |\operatorname{Im}(z - w)|\}$$

eine Metrik auf $\mathbb{C}$ ist. Skizzieren Sie die Einheitskugel $U_1(0)$.

(c) Von Aufgabe **T18** des vorigen Tutoriums wissen wir, dass $d_1\colon \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to [0, \infty[$, $d_1(z, w) := |\operatorname{Re}(z-w)|+|\operatorname{Im}(z-w)|$ ebenfalls eine Metrik auf $\mathbb{C}$ ist. Skizzieren Sie auch für diese Metrik die Einheitskugel $U_1(0)$.

G 19 (Offene Mengen, abgeschlossene Mengen).

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Untersuchen Sie, welche der Teilmengen $]a, b[$, $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, von $\mathbb{R}$ offen bzw. abgeschlossen sind im Sinne von Definition III.1.4.

(b) Berechnen und skizzieren Sie die Mengen

$$M_1 := \{x \in \mathbb{R}\colon |x| < 2 \text{ und } |x| > 1\}$$

sowie

$$M_2 := \{x \in \mathbb{R}\colon |x - 1| \leq 2 \text{ und } |x - 2| \geq 1\}\,.$$

Untersuchen Sie auch, ob diese Mengen in $\mathbb{R}$ offen bzw. abgeschlossen sind.

Hausübung

H 19 (Teilmengen der komplexen Zahlen).

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ und untersuchen Sie, welche offen bzw. abgeschlossen sind:

(a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| > 1\}$;

(b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \colon \frac{1}{2} \leq |z-1| \leq \sqrt{2}\}$;

(c) $M_3 := \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}(z) > 0 \text{ und } \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$.

H 20 (Abgeschlossene Mengen).

Zeigen Sie, dass für jeden metrischen Raum (X, d) gilt:

(a) Die Mengen $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.

(b) Sind die Mengen $A_1, \ldots, A_n \subseteq X$ abgeschlossen, so ist auch ihre Vereinigung $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ abgeschlossen.

(c) Ist $(A_i)_{i \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X, so ist auch $\bigcap_{i \in I} A_i$ abgeschlossen.

Finden Sie zudem eine Folge $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ abgeschlossener Teilmengen $A_k \subseteq \mathbb{R}$ derart, dass $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ keine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

H 21 ("Umgekehrte Dreiecksungleichung").

Es sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Zeigen Sie, dass $(\forall x, y, z \in X)\ d(x,y) - d(x,z) \leq d(y,z)$.

(b) Folgern Sie, dass $(\forall x, y, z \in X)\ |d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$.

H 22 (Metriken).

Sei M eine Menge und $f \colon M \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir definieren eine Funktion

$$d \colon M \times M \to [0, \infty[\,, \qquad d(x,y) := |f(x) - f(y)|\,.$$

Welche Eigenschaften muss f haben, damit d eine Metrik ist?