Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

17. Mai 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 5

Gruppenübung

G 14 (Ungleichungen).

Es sei (K, K_+) ein angeordneter Körper.

(a) Zeigen Sie, dass für $2 := 1 + 1$ die Beziehung $1 > \frac{1}{2} > 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie die sogenannte "Ungleichung vom arithmetischen Mittel":

$$(\forall x, y \in K) \quad x < y \quad \Rightarrow \quad x < \frac{x+y}{2} < y\,.$$

(c) Zeigen Sie durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$ die folgende Aussage:

$$(\forall x, y \in K) \quad 0 < x < y \quad \Rightarrow \quad 0 < x^n < y^n\,.$$

G 15 (Intervalle) In dieser Aufgabe sei (K, K_+) ein angeordneter Körper.

(a) Zeigen Sie: Der Durchschnitt $I \cap J$ zweier Intervalle $I, J \subseteq K$ ist ein Intervall.

(b) Es seien $a, b, c, d \in K$ mit $a < b$ und $c < d$. Wann ist $[a, b[\cup [c, d[$ ein Intervall?

(c) Zeigen Sie, dass für jedes Intervall $I \subseteq K$ mit $0 \notin I$ auch $J := \{x^{-1} \colon x \in I\}$ ein Intervall ist. Von welcher Form ist J, wenn $I = [a, b[$?

G 16 (Suprema und Maxima).

Es sei (K, K_+) ein angeordneter Körper. Eine Funktion $f \colon K \to K$ heißt *monoton wachsend*, wenn

$$(\forall a, b \in K) \quad a \leq b \quad \Rightarrow \quad f(a) \leq f(b)\,.$$

(a) Zeigen Sie: Ist K vollständig angeordnet und $f \colon K \to K$ monoton wachsend, so gilt für jede nichtleere Teilmenge $A \subseteq K$ mit $\sup(A) < \infty$

$$\sup f(A) \;\leq\; f(\sup A)\,. \tag{1}$$

(b) Zeigen Sie, dass in (1) Gleichheit gilt, wenn A ein Maximum $\max(A)$ besitzt.

(c) Finden Sie eine monoton wachsende Funktion $f \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ derart, dass $\sup f(A) < f(\sup A)$ für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{Q}$, beispielsweise für $A :=]-\infty, 0[$.

Hausübung

H 16 (Ungleichungen).

Es sei (K, K_+) ein angeordneter Körper.

(a) Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ folgende Aussage mittels vollständiger Induktion: Für alle $a, b \in K$ gilt

$$(a \geq 0 \wedge a + b \geq 0) \quad \Rightarrow \quad (a+b)^n \geq a^n + na^{n-1}b\,.$$

(b) Zeigen Sie auch, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in K$ mit $a, b \geq 0$ gilt

$$(a+b)^n \geq a^n + b^n$$

(diesmal brauchen Sie keine Induktion).

H 17 (Rationale Potenzen).

Es sei (K, K_+) ein vollständiger angeordneter Körper. Zeigen Sie:

(a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall a, b \in K)\ \ 0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$.

(b) Für alle $q \in \mathbb{Q}_+$ und $a, b \in K_+$ mit $a < b$ ist $a^q < b^q$.

(c) Für alle $q \in \mathbb{Q}$ und $a, b \in K_+$ gilt $(ab)^q = a^q b^q$.

Hinweis: Man betrachte zuerst den Fall $q \in \mathbb{N}$ bzw. $q \in \mathbb{Z}$ und dann den Fall $q = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Schließlich setze man beides zusammen.

(d) Man rechne nach, dass die in Definition II.2.22 eingeführte rationale Potenz $a^{\frac{p}{q}}$ für $a \in K_+$ und $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ wohldefiniert ist, d.h. ist $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$ mit $p, p' \in \mathbb{Z}$, $q, q' \in \mathbb{N}$, so ist $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[q']{a^{p'}}$. Man rechne auch nach, dass $\sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a}\,)^p$ gilt (wie in Definition II.2.22 behauptet).

H 18 (Iterierte Suprema).

Es sei K ein vollständig angeordneter Körper, I, J nicht-leere Mengen und $a_{i,j} \in K$ für $(i,j) \in I \times J$. Wir nehmen an, dass $S := \sup\{a_{i,j} \colon (i,j) \in I \times J\} < \infty$.

(a) Für festes $i \in I$ setzen wir

$$s_i := \sup\{a_{i,j} \colon j \in J\}\,.$$

Zeigen Sie, dass $s_i \leq S$. Insbesondere ist also $s_i < \infty$.

(b) Zeigen Sie, dass $\sup\{a_{i,j} \colon (i,j) \in I \times J\} = \sup\{s_i \colon i \in I\}$, also

$$\sup_{(i,j) \in I \times J} a_{i,j} = \sup_{i \in I} \sup_{j \in J} a_{i,j}\,.$$

(Hinweis: Zeigen Sie, dass die linke Seite kleiner gleich der rechten ist und umgekehrt. Lemma II.2.14 hilft beim Beweis einer der Ungleichungen).