Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. Mai 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 4

Gruppenübung

G 11 (Die Uhr als Gruppe)
Sei $G = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 23\}$ mit der Addition $a \oplus b := c$, falls c der Rest bei Division von $a + b$ durch 24. Zeigen Sie, daß $(G, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist. Haben Sie in dieser Gruppe schon einmal gerechnet?

G 12 (Vollständige Induktion)
Zeigen Sie:

1. Für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ gilt $2n + 1 \leq n^2$.
2. Für jede natürliche Zahl $n \neq 3$ gilt $n^2 \leq 2^n$.
3. Für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ gilt $2^n < n!$.

G 13 (Konstruktion der komplexen Zahlen über $\mathbb{Q}$)
Sei $\mathbb{Q}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Auf $\mathbb{Q}^2$ definieren wir Addition und Multiplikation durch

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, bc + ad).$$

Weiter definieren wir eine Funktion

$$N : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}, (a, b) \mapsto a^2 + b^2.$$

Zeigen Sie:

1. $N(xy) = N(x)N(y)$ für $x, y \in \mathbb{Q}^2$.
2. $(\mathbb{Q}^2, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
3. Für $x = (a, b)$ mit $N(x) \neq 0$ ist

$$x^{-1} := \left(\frac{a}{N(x)}, -\frac{b}{N(x)}\right)$$

   ein multiplikatives Inverses.
4. $(\mathbb{Q}^2, +, \cdot)$ ist ein Körper.
   Hinweis: Überlegen Sie sich bei der Überprüfung des Assoziativgesetzes der Multiplikation nur, was Sie beweisen müßten, führen Sie den konkreten Nachweis aber nicht durch! Das direkte Nachrechnen ist viel zu umständlich und langwierig. Später werden Sie in der Linearen Algebra und in der Algebra Methoden kennenlernen, die die Rechnung sehr stark verkürzen.
   Verwenden Sie außerdem ohne Beweis: $(\forall a, b \in \mathbb{Q}) a^2 + b^2 = 0 \iff a = 0 = b$. Diese Aussage basiert auf der Anordnung von $\mathbb{Q}$, die Sie in Kürze in der Vorlesung kennenlernen werden.

5. Sei i ein abstraktes Symbol und sei $\mathbb{Q}(i) := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Auf $\mathbb{Q}(i)$ definieren wir Addition und Multiplikation durch
$$(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$$
und
$$(a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (bc + ad)i.$$
Warum ist $\mathbb{Q}(i)$ ein Körper?

Hausübung

H 12 (Idempotente in einem Körper)

Beweisen Sie, daß es in einem Körper genau zwei Elemente gibt, die der Gleichung
$$x^2 = x$$
genügen.

H 13 (Einige Gruppen?)

1. Betrachten Sie die Menge der Wochentage $M = \{\mathrm{So}, \mathrm{Mo}, \mathrm{Di}, \mathrm{Mi}, \mathrm{Do}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Sa}\}$. Ist es möglich, eine Addition $+ : M \times M \to M$ zu definieren, so daß $(M, +)$ eine Gruppe ist? Schlagen Sie hierzu eine Addition vor und geben Nullelement und inverse Elemente an.
2. Betrachten Sie die Teilmenge $\{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$ von $\mathbb{Q}^2$ aus Aufgabe **G 13**. Bildet diese unter der in Aufgabe **G 13** definierten Multiplikation eine abelsche Gruppe?
3. Betrachten Sie die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der Verknüpfung
$$a * b := \frac{1}{2}(a + b).$$
Welche Gruppenaxiome erfüllt $(\mathbb{Q}, *)$?

H 14 (Maxima und Minima)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{Q}$ ein Maximum bzw. ein Minimum haben, und geben Sie diese gegebenenfalls an:

1. $M_1 = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
2. $M_2 = \{n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
3. $M_3 = \{\frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
4. $M_4 = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \leq 1\}$,
5. $M_5 = \emptyset$.

H 15 (Eigenschaften eines Körpers)

Sei $\mathbb{F}$ ein beliebiger Körper und sei
$$\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}, n \mapsto \begin{cases} 1_{\mathbb{F}} + \cdots + 1_{\mathbb{F}} & (n\text{-mal}) & \text{falls } n > 0 \\ -(1_{\mathbb{F}} + \cdots + 1_{\mathbb{F}}) & (-n\text{-mal}) & \text{falls } n < 0 \\ 0 & & \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1. Ist ψ injektiv, so gilt $\frac{1}{\psi(2)} \notin \psi(\mathbb{Z})$; insbesondere ist $\psi(\mathbb{Z})$ kein Unterkörper von $\mathbb{F}$.
2. Ist ψ nicht injektiv, so ist $\mathrm{im}(\psi)$ endlich.
Hinweis: Gilt $\psi(m) = \psi(n)$ für $k = m - n \neq 0$, so ist $\psi(t + k) = \psi(t)$ für alle $t \in \mathbb{Z}$. Warum folgt hieraus die Endlichkeit von $\mathrm{im}(\psi)$?
3. $\psi(\mathbb{Z})$ ist unter Addition und Multiplikation abgeschlossen.