Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

3. Mai 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 3

Gruppenübung

G 7 (Surjektive Abbildungen).

(a) Zeigen Sie: Sind $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ surjektive Abbildungen, so ist auch $g \circ f\colon X \to Z$ surjektiv.

(b) Zeigen Sie: Ist $f\colon X \to Y$ surjektiv und sind $g_1, g_2\colon Y \to Z$ Funktionen derart, dass $g_1 \circ f = g_2 \circ f$, so ist $g_1 = g_2$.

(c) Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt *rechts kürzbar* (oder auch: ein *Epimorphismus*), wenn für jede Menge Z und alle Funktionen $g_1, g_2\colon Y \to Z$ gilt:

$$g_1 \circ f = g_2 \circ f \quad \Rightarrow \quad g_1 = g_2\,.$$

Nach (b) ist jede surjektive Abbildung rechts kürzbar. Zeigen Sie, dass umgekehrt jede rechts kürzbare Abbildung surjektiv ist (Hinweis: Kontraposition).

G 8 (Graphen von Funktionen).

Wir betrachten die folgenden Mengen von Paaren rationaler Zahlen:

$$\begin{aligned} G_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\colon y = x\};\\ G_2 &= \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\colon xy = 1\};\\ G_3 &= \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\colon x^2y^2 = -1\}\,. \end{aligned}$$

(a) Welche dieser Mengen ist Graph einer Funktion nach $\mathbb{Q}$? Geben Sie jeweils den Definitionsbereich an und skizzieren Sie den Graphen.

(b) Welche der Funktionen sind injektiv, welche surjektiv?

(c) Schränken Sie (falls nötig) den Wertebereich so ein, dass f bijektiv wird. Bestimmen Sie sowohl zeichnerisch als auch rechnerisch den Graphen der Umkehrfunktion.

G 9 (Vollständige Induktion).

Es sei $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$. Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \;=\; \frac{1-q^{n+1}}{1-q}\,.$$

G 10 (Urbilder unter Kompositionen).

Es seien $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ Abbildungen und $A \subseteq Z$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$.

Hausübung

H 8 (Injektive Abbildungen).

(a) Zeigen Sie: Sind $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ injektive Abbildungen, so ist auch $g \circ f\colon X \to Z$ injektiv.

(b) Zeigen Sie: Ist $g\colon Y \to Z$ injektiv und sind $f_1, f_2\colon X \to Y$ Funktionen derart, dass $g \circ f_1 = g \circ f_2$, so ist $f_1 = f_2$.

(c) Eine Funktion $g\colon Y \to Z$ heißt *links kürzbar* (oder auch: ein *Monomorphismus*), wenn für jede Menge X und alle Funktionen $f_1, f_2\colon X \to Y$ gilt:

$$g \circ f_1 = g \circ f_2 \quad \Rightarrow \quad f_1 = f_2\,.$$

Nach (b) ist jede injektive Abbildung links kürzbar. Zeigen Sie, dass umgekehrt jede links kürzbare Abbildung injektiv ist (Hinweis: Kontraposition !)

H 9 (Wechselsumme der ersten n Zahlen).

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot k \;=\; \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{wenn } n \text{ ungerade ist;} \\ -\frac{n}{2} & \text{wenn } n \text{ gerade ist.} \end{cases}$$

H 10 (Urbilder von Mengen vs. Umkehrfunktion).

Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$, die einer rationalen Zahl $x = n/m$ mit teilerfremden Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ die Zahl $f(x) = n$ zuordnet.

(a) Berechnen Sie $f(\{\frac{1}{2}, 2, \frac{2}{3}\})$, $f^{-1}(\{0,1\})$ und $f^{-1}(1)$.

(b) Ist f surjektiv ? Zeigen Sie, dass f nicht injektiv ist und somit nicht bijektiv.

(c) Nach (b) besitzt f keine Umkehrfunktion f^{-1}. Warum konnten wir in Teil (a) dennoch $f^{-1}(\{0,1\})$ und $f^{-1}(1)$ berechnen ?

H 11 (Urbilder und mengentheoretische Operationen).

Es sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass für alle $A, B \subseteq Y$ gilt:

(a) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$;

(b) $f^{-1}(A \setminus B) = f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B)$.

Analog zu (a) gilt übrigens auch $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.