Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

26. April 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 2

Gruppenübung

G 4 (Fallunterscheidung)
Beweisen Sie die Aussage

$$((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)) \Longrightarrow q.$$

Satz I.1.5 aus der Vorlesung wurde durch Fallunterscheidung bewiesen. Bestimmen Sie in diesem Satz die Aussagen p, $\neg p$ und q.

G 5 (Aufstellen von logischen Formeln; Beweis und Gegenbeispiel)
Stellen Sie logische Formeln für die folgenden Aussagen auf, negieren Sie diese und begründen Sie, welche Aussagen wahr sind.

1. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es Primzahlen p und q, deren Produkt n teilt.
2. Jede natürliche Zahl besitzt einen ungeraden Teiler, der ungleich 1 ist.
3. Jede ungerade natürliche Zahl besitzt einen ungeraden Teiler, der ungleich 1 ist.
4. Alle geraden natürlichen Zahlen besitzen ausschließlich 1 als ungeraden Teiler.
5. Es seien m und n natürliche Zahlen. Wenn m größer oder gleich n und n größer oder gleich m ist, dann stimmen m und n überein.
6. Sei M eine endliche Menge. Die Anzahl der Elemente von M ist kleiner als die Anzahl der Elemente von $\mathcal{P}(M)$.

G 6 (Potenzmenge)

1. Sei $M = \{a, b\}$. Wie viele Elemente hat $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$? Geben Sie alle Elemente von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ an.
   Hinweis: Eine Unterscheidung der Fälle $a = b$ und $a \neq b$ bietet sich an.
2. Sei E eine Menge. Zeigen Sie, daß für alle $A, B \in \mathcal{P}(E)$ gilt:

$$A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B.$$

Hausübung

H 5 (Lesen von logischen Formeln; Beweis und Gegenbeispiel)
Schreiben Sie jede der folgenden Aussagen in Worten auf. Begründen Sie, welche dieser Aussagen wahr sind:

1. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) n^2 = k$
2. $(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) n^2 = k$
3. $(\exists! n \in \mathbb{N}) n^2 - 3n + 2 = 0$
4. $(\forall n \in \mathbb{N})(((\exists k \in \mathbb{N}) n^2 = 5k) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) n = 5k)$
5. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) n = k^2$

H 6 (De Morgansche Regeln für Mengen)
Zeigen Sie, daß für Mengen A, B, X gilt:

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B) \quad \text{und} \quad X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B).$$

Zeigen Sie außerdem, daß für Mengen X und J und eine Familie von Mengen $(M_j)_{j \in J}$ gilt:

$$X \cap \left(\bigcup_{j \in J} M_j \right) = \bigcup_{j \in J} (X \cap M_j) \quad \text{und} \quad X \cup \left(\bigcap_{j \in J} M_j \right) = \bigcap_{j \in J} (X \cup M_j).$$

H 7 (Eine Funktion zwischen Potenzmengen)
Seien X und Y Mengen sowie $f : X \to Y$ eine Funktion und

$$f^* : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X), A \mapsto f^{-1}(A)$$

die Abbildung, die jeder Teilmenge von Y ihr Urbild in X zuordnet.

Zeigen Sie:

1. f ist genau dann injektiv, wenn f^* surjektiv ist.
2. f ist genau dann surjektiv, wenn f^* injektiv ist.