Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

19. April 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 1

Auf diesem Übungsblatt beschäftigen wir uns mit dem Beweisprinzip der vollständigen Induktion. Hierbei hat man für jedes $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ eine Aussage $A(n)$ gegeben. Damit $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, genügt es, zu zeigen:

(a) $A(1)$ gilt;

(b) Wenn $A(n)$ gilt, so gilt auch $A(n+1)$.

Hierbei nennt man (a) den *Induktionsanfang* oder die *Induktionsverankerung*, (b) den *Induktionsschritt*.

Beispiel: Wir zeigen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Zahl $5^n - 1$ durch 4 teilbar ist (d.h. es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $5^n - 1 = 4m$).

Induktionsanfang $n = 1$*:* Die Zahl $5^1 - 1 = 4$ ist durch 4 teilbar.

Induktionsschritt: Für ein $n \in \mathbb{N}$ nehmen wir an, dass $5^n - 1$ durch 4 teilbar ist ("Induktionsannahme") und zeigen, dass dann auch $5^{n+1} - 1$ durch 4 teilbar ist ("Induktionsbehauptung"). Per Annahme ist $5^n - 1 = 4m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Folglich ist $5^{n+1} - 1 = 5 \cdot 5^n - 5 + 5 - 1 = 5(5^n - 1) + 4 = 5 \cdot 4 \cdot m + 4 = 4(5m + 1)$, also wie gewünscht $5^{n+1} - 1$ durch 4 teilbar.

Gruppenübung

G 1 (Summen ungerader Zahlen).

Gegeben Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ schreibt man kurz $\sum_{k=1}^n a_k$ für ihre Summe $a_1 + \cdots + a_n$. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) \ = \ n^2 \,.$$

G 2 (Summe der ersten n Zahlen).

Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k \ = \ \frac{n(n+1)}{2} \,.$$

G 3 (Varianten des Beweisprinzips der vollständigen Induktion).

Führen Sie die folgenden zwei Beweismethoden zurück auf das oben beschriebene Beweisprinzip der vollständigen Induktion:

(a) Es sei $n_0 \in \mathbb{N}$ und $A(n)$ eine gegebene Aussage für jede natürliche Zahl $n \geq n_0$. Zeigen Sie: Gilt $A(n_0)$ und folgt $A(n+1)$ aus $A(n)$ für alle $n \geq n_0$, so gilt $A(n)$ für jedes $n \geq n_0$.

(b) Nun sei $A(n)$ eine Aussage für $n \in \mathbb{N}$. Nehmen Sie an, dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

  (i) $A(1)$ gilt;

  (ii) Gelten $A(1), \ldots, A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so auch $A(n+1)$.

  Zeigen Sie, dass dann $A(n)$ gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Hausübung

H 1 (Weitere Summenformeln).

Beweisen Sie die folgenden Formeln durch Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$;

(b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2}{4}(n+1)^2$.

H 2 (Kombinatorik und vollständige Induktion).

Wie viele Möglichkeiten gibt es, n verschiedene Bücher auf ein Regalbrett zu stellen ? (Nur die Reihenfolge zählt).

Hinweis: Probieren Sie zuerst für kleine n auf dem Papier alle Möglichkeiten aus. Versuchen Sie dann, durch Induktion eine Formel zu beweisen. Gegeben $n+1$ Bücher haben Sie für das Buch ganz links $n+1$ Möglichkeiten und rechts daneben jeweils noch n Bücher hinzustellen.

H 3 (Aussagenlogik)

(a) Geben Sie die Wahrheitstabellen an für "oder" sowie für "entweder oder."

(b) Seien p und q Aussagen. Schreiben Sie "entweder p oder q" um als einen aus p, q und den Operationen $\wedge$, $\vee$ und $\neg$ gebildeten Ausdruck (d.h. finden Sie einen solchen Ausdruck, der genau dann gilt, wenn "entweder p oder q" gilt).

H 4 (Negieren von Aussagen) Unter der Voraussetzung, dass es Töpfe und Deckel jeder Form und Größe gibt, untersuche man, welche der folgenden Aussagen wahr sind. Anschließend formuliere man die Negation jeder Aussage.

(1) Auf jeden Topf passt ein Deckel.

(2) Es gibt einen Topf, auf den alle Deckel passen.

(3) Jeder Deckel passt auf mindestens einen Topf.

(4) Es gibt einen Topf, auf den ein Deckel passt.

(5) Auf jeden Topf passen alle Deckel.

(6) Es gibt einen Deckel, der auf alle Töpfe passt.

Negieren Sie die Aussage: $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists m \in \mathbb{N})\ m > n$.