Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11. April 2006

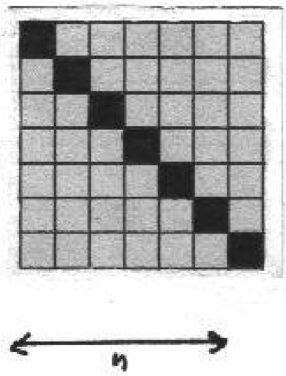
Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 0

Probeübung

P 1 (Anschaulicher Beweis der Summenformel).

Gegeben $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir ein Quadrat der Seitenlänge $n+1$. Bestimmen Sie die Flächeninhalte der weißen bzw. schwarzen Flächen und setzen Sie diese in Beziehung zur Gesamtfläche des Quadrats.

Beispiel: $n = 6$



Formen Sie um zu $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$.

P 2 (Differenzenfolgen und polynomiale Folgen).

Wir betrachten die (endliche) Folge

$$a_1 = 3,\ a_2 = 3,\ a_3 = 1,\ a_4 = -3,\ a_5 = -9\,.$$

(a) Berechnen Sie die erste, zweite und dritte Differenzenfolge (soweit möglich).

(b) Begründen Sie, dass es eine polynomiale Folge $(p(n))_{n\in\mathbb{N}}$ der Ordnung ≤ 2 gibt derart, dass $a_n = p(n)$ für $n \in \{1, 2, \ldots, 5\}$. Gibt es auch eine polynomiale Folge der Ordnung ≤ 1 mit dieser Eigenschaft?

(c) Bestimmen Sie explizit die polynomiale Folge aus (b) [Hinweis: Machen Sie den Ansatz $p(n) = an^2 + bn + c$ und berechnen Sie a, b und c.]

P 3 ($\sqrt{2}$ ist irrational).

Zeigen Sie, dass es keine rationale Zahl x mit $x^2 = 2$ geben kann.

[Hinweis: Ein solches x wäre von der Form $x = \frac{n}{m}$ mit teilerfremden Zahlen $n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$. Führen Sie diese Annahme zum Widerspruch.]

P 4 (Es gibt unendlich viele Primzahlen).

EUKLID VON ALEXANDRIA (ca. 365 v. Chr. bis 300 v. Chr.) zeigte als Erster, dass zu jeder gegebenen Primzahl p immer eine noch größere gefunden werden kann. Hierzu betrachtete er die Zahl $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot p + 1$ $(= p! + 1)$. Wie verlief nun seine Schlussfolgerung?

[Hinweis: Entweder ist $p! + 1$ eine Primzahl (was dann?) oder $p! + 1$ besitzt einen von $p! + 1$ verschiedenen Primteiler q. Zeigen Sie, dass im zweiten Falle $q > p$ sein muss.]