Fachbereich Mathematik
AG 5: Funktionalanalysis
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. H. Glöckner
PD dr. R. Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 12. Juni 2006

Probeklausur zur Analysis I für M, Ph, LaG

Name: .... Matrikelnr.: ....

Vorname: .... Studiengang: ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	Summe
Erreichbar	**10**	**10**	**10**	**10**	**10**	**50**
Erreicht						

Note

vor dem Abgeben bitte hier falten

Bitte füllen Sie den Kopf dieses Aufgabenblatts **jetzt** und **in Blockschrift (Großbuchstaben)** aus. Versehen Sie alle Blätter mit Ihrem Namen und nummerieren Sie sie fortlaufend. Falten Sie am Ende der Klausur dieses Blatt einmal entlang der Linie über diesem Absatz so, dass Ihr Name und die Punktetabelle sichtbar bleiben, und legen Sie Ihre Bearbeitung hinein.

Als Hilfsmittel zugelassen sind Unterlagen und Bücher aller Art, sowie Taschenrechner. Geräte zur elektronischen Kommunikation dürfen weder benutzt noch griffbereit gehalten werden.

Bedenken Sie, dass alle Ergebnisse zu begründen sind. Insbesondere werden Lösungswege bewertet, und Zwischenschritte müssen genau beschrieben werden. Viel Erfolg!

Aufgaben auf der Rückseite

Aufgaben der Probeklausur zur Analysis I

Aufgabe 1 (Aussagenlogik – 10 Punkte).

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Funktion. Betrachten Sie die beiden Aussagen

$$(\forall x\in\mathbb{R})\,(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(\forall y\in\mathbb{R})\quad |x-y|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

und

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists\delta>0)\,(\forall x\in\mathbb{R})\,(\forall y\in\mathbb{R})\quad |x-y|<\delta\Longrightarrow|f(x)-f(y)|<\varepsilon\,.$$

(a) Schreiben Sie beide Aussagen in Worten auf.

(b) Negieren Sie beide Aussagen.

(c) Argumentieren Sie, warum aus der Gültigkeit der zweiten Aussage für ein bestimmtes f die Gültigkeit der ersten Aussage für dieses f folgt.

Aufgabe 2 (Grenzwerte konkreter Folgen – 10 Punkte).

Untersuchen Sie die jeweilige komplexe Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Beschränktheit, Konvergenz, Divergenz, bestimmte Divergenz.

(a) $x_n=\frac{5(n+1)^{10}}{2(n^2+n+1)^5}$.

(b) $x_n=i^n+(-1)^n$.

(c) $x_1:=1,\ x_{n+1}:=(x_n+1)^2$ für $n\in\mathbb{N}$.

(d) $x_n=\frac{2^n}{n!}$.

Aufgabe 3 (Offene Mengen, abgeschlossene Mengen – 10 Punkte).

Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ offen bzw. abgeschlossen sind. Skizzieren Sie zudem grob M_1 und M_2.

(a) $M_1:=\{z\in\mathbb{C}\colon 1<|z|<2\}$;

(b) $M_2:=\{z\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Re}(z)\geq 0 \text{ und } |z|\leq 1\}$;

(c) $M_3:=\mathbb{Q}\cup\{z\in\mathbb{C}\colon \mathrm{Im}(z)>0\}$.

Aufgabe 4 (Rekursive Folgen und Induktion – 10 Punkte).

Wir definieren eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv via $x_1:=\frac{3}{2},\ x_{n+1}:=x_n^2-2x_n+2$.

(a) Betrachten Sie zunächst die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x):=x^2-2x+2$. Zeigen Sie, dass $1\leq f(x)\leq x$ für alle $x\in[1,2]$. Zeigen Sie auch, dass $1<f(x)<x$ für alle $x\in\,]1,2[$.

(b) Zeigen Sie per Induktion, dass

$$(\forall n\in\mathbb{N})\qquad x_n\in\,]1,2[\ \text{ und }\ x_{n+1}<x_n\,.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

(d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lambda:=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

Aufgabe 5 (Häufungspunkte von Folgen – 10 Punkte).

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen komplexer Zahlen. Zeigen Sie: Ist jede der Zahlen h_n ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und gilt $\lim\limits_{n\to\infty}h_n=h$, so ist auch h ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.