Fachbereich Mathematik
AG 5: Funktionalanalysis
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. H. Glöckner
PD dr. R. Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2006 12. Juni 2006

Lösung zur Probeklausur zur Analysis I für M, Ph, LaG

Aufgabe 1 (Aussagenlogik – 10 Punkte).

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Betrachten Sie die beiden Aussagen

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall y \in \mathbb{R}) \quad |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

und

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\,(\forall y \in \mathbb{R}) \quad |x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon\,.$$

(a) Schreiben Sie beide Aussagen in Worten auf.

(b) Negieren Sie beide Aussagen.

(c) Argumentieren Sie, warum aus der Gültigkeit der zweiten Aussage für ein bestimmtes f die Gültigkeit der ersten Aussage für dieses f folgt.

Lösung.

(a) Erste Aussage: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ aus $|x-y| < \delta$ folgt $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ (d.h. für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y-z| < \delta$ ist $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$).

Zweite Aussage: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ aus $|x-y| < \delta$ folgt $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$ (d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|y-z| < \delta$ ist $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$).

(b) Verneinung der ersten Aussage:

$$(\exists x \in \mathbb{R})\,(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists y \in \mathbb{R}) \quad \neg(|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon)\,.$$

Hierbei ist $\neg(|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon)$ äquivalent zu $|x-y| < \delta \wedge |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$ (in dieser Form ist die Aussage einfacher lesbar).

Verneinung der zweiten Aussage:

$$(\exists \varepsilon > 0)\,(\forall \delta > 0)\,(\exists x \in \mathbb{R})\,(\exists y \in \mathbb{R}) \quad \neg(|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon)\,.$$

Hierbei sollte man wieder $\neg(|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon)$ noch umschreiben zu $|x-y| < \delta \wedge |f(x)-f(y)| \geq \varepsilon$.

(c) Für eine Aussage $P(x,y)$ gilt ganz allgemein:

$$((\exists y)(\forall x)\, P(x,y)) \Rightarrow ((\forall x)(\exists y)\, P(x,y))\,.$$

Weiter dürfen zwei aufeinanderfolgende $\forall$-Quantoren stets vertauscht werden (in dem Sinne, dass man dabei eine äquivalente Aussage erhält). Gilt also die zweite Aussage, so gilt auch die erste, weil sie durch zwei Vertauschungen benachbarter Quantoren (auf je eine der gerade beschriebenen Arten) aus ihr hervorgeht.

Bemerkung: Es ist auch OK, wenn Sie dies angemessen in Worte fassen, indem Sie z.B. erklären, dass das δ aus der zweiten Aussage sogar simultan für alle x der ersten Aussage gleichzeitig genommen werden kann.

Aufgabe 2 (Grenzwerte konkreter Folgen – 10 Punkte).

Untersuchen Sie die jeweilige komplexe Zahlenfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Beschränktheit, Konvergenz, Divergenz, bestimmte Divergenz.

(a) $x_n = \frac{5(n+1)^{10}}{2(n^2+n+1)^5}$.

(b) $x_n = i^n + (-1)^n$.

(c) $x_1 := 1$, $x_{n+1} := (x_n+1)^2$ für $n \in \mathbb{N}$.

(d) $x_n = \frac{2^n}{n!}$.

Lösung.

(a) $x_n = \frac{5(n+1)^{10}}{2(n^2+n+1)^5} = \frac{5n^{10}+\cdots}{2n^{10}+\cdots} \to \frac{5}{2}$ für $n \to \infty$ (siehe die Behandlung rationaler Folgen in Skript und Übung). Als konvergente Folge ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere beschränkt (und sie ist weder divergent noch bestimmt divergent).

(b) Wegen $|x_n| = |i^n+(-1)^n| \le |i|^n + |-1|^n = 2$ ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Da $x_{4n} = 2 \to 2$ für $n \to \infty$, jedoch $x_{4n+2} = -1+1 = 0 \to 0$ für $n \to \infty$, hat die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Teilfolgen mit unterschiedlichen Limites und kann daher nicht konvergieren. Sie ist somit divergent. Da sie beschränkt ist, ist die Folge nicht bestimmt divergent.

(c) Wir machen uns per Induktion klar, dass $x_n \ge n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ (somit auch divergent, aber weder beschränkt noch konvergent).

$n=1$: Es ist $x_1 = 1 = n \ge n$.

Gelte nun $x_n \ge n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$x_{n+1} = (x_n+1)^2 \ge (n+1)^2 = n^2+2n+1 \ge n+1,$$

was den induktiven Beweis beendet.

(d) Für $n \ge 2$ ist $0 < x_n = \frac{2^n}{n!} = \frac{2^n}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1} \le \frac{2^n}{3^{n-2}\cdot 2\cdot 1} = 2\cdot(\frac{2}{3})^{n-2}$. Da $2\cdot(\frac{2}{3})^{n-2} \to 0$ (vgl. "geometrische Folge"), folgt $x_n \to 0$. Als konvergente Folge ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ insbesondere beschränkt (aber weder divergent noch bestimmt divergent).

Aufgabe 3 (Offene Mengen, abgeschlossene Mengen – 10 Punkte).

Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{C}$ offen bzw. abgeschlossen sind. Skizzieren Sie zudem grob M_1 und M_2.

(a) $M_1 := \{z \in \mathbb{C} \colon 1 < |z| < 2\}$;

(b) $M_2 := \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Re}(z) \ge 0 \text{ und } |z| \le 1\}$;

(c) $M_3 := \mathbb{Q} \cup \{z \in \mathbb{C} \colon \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Lösung.

(a) M_1 ist offen, aber nicht abgeschlossen. Begründung:

M_1 ist der Durchschnitt der Menge $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| > 1\}$, die nach Aufgabe H19 (a) offen ist, und der Kugel $U_2(0)$, die nach Lemma III.1.6 offen ist. Als Durchschnitt zweier offener Mengen ist M_2 offen (siehe Satz III.1.7, (O2)).

M_1 ist nicht abgeschlossen, denn $\mathbb{C} \setminus M_1$ ist nicht offen. Denn es ist $1 \in \mathbb{C} \setminus M_1$, jedoch gibt es kein $\varepsilon > 0$ derart, dass $U_\varepsilon(1) \subseteq \mathbb{C} \setminus M_1$ (setzen wir nämlich $\delta := \min\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\}$, so ist $1 + \delta \in U_\varepsilon(1)$ aber auch $1 + \delta \in M_1$ und somit $1 + \delta \notin \mathbb{C} \setminus M_1$, im Widerspruch zur Annahme $U_\varepsilon(1) \subseteq \mathbb{C} \setminus M_1$).

(b) M_2 ist abgeschlossen, aber nicht offen. Begründung:

Wäre M_2 offen, so gäbe es wegen $1 \in M_2$ ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $U_\varepsilon(1) \subseteq M_2$. Dann wäre $1 + \frac{\varepsilon}{2} \in U_\varepsilon(1) \subseteq M_2$, was $1 + \frac{\varepsilon}{2} \notin M_2$ widerspricht. Also ist M_2 nicht offen.

M_2 ist der Durchschnitt der Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 1\}$ (die abgeschlossen ist, da ihr Komplement nach Aufgabe H19 (a) offen ist) und der Halbebene $H := \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z) \geq 0\}$. Wir prüfen gleich nach, dass H abgeschlossen ist; als Durchschnitt zweier abgeschlossener Mengen ist dann M_2 abgeschlossen (siehe Aufgabe H20 (c)). Die Menge H ist abgeschlossen, wenn ihr Komplement

$$\mathbb{C} \setminus H = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re}(z) < 0\}$$

offen ist. Aber das ist klar: Ist $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus H$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $x < 0$. Setzen wir $\varepsilon := -x > 0$, so ist $\operatorname{Re}(w) < 0$ für alle $w \in U_\varepsilon(z)$ und somit $U_\varepsilon(z) \subseteq \mathbb{C} \setminus H$.

(c) M_3 ist weder offen noch abgeschlossen. Begründung:

Wäre M_3 offen, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ derart, dass $U_\varepsilon(0) \subseteq M_3$ (da $0 \in \mathbb{Q} \subseteq M_3$). Es existiert jedoch eine nicht-rationale, reelle Zahl x mit $|x| < \varepsilon$ (z.B. $\frac{1}{n}\sqrt{2}$ mit n genügend groß). Dann ist $x \in U_\varepsilon(0)$, aber $x \notin M_3$, im Widerspruch zu $U_\varepsilon(0) \subseteq M_3$.

Wäre M_3 abgeschlossen, so wäre $\mathbb{C} \setminus M_3$ offen und somit wäre $U_\varepsilon(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{C} \setminus M_3$ für ein $\varepsilon > 0$. Nun enthält aber das offene Intervall $]\sqrt{2}, \varepsilon + \sqrt{2}[$ eine rationale Zahl q. Dann ist $q \in U_\varepsilon(\sqrt{2})$, aber auch $q \in M_3$ und somit $q \notin \mathbb{C} \setminus M_3$, im Widerspruch zu $U_\varepsilon(\sqrt{2}) \subseteq \mathbb{C} \setminus M_3$.

Aufgabe 4 (Rekursive Folgen und Induktion – 10 Punkte).

Wir definieren eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ rekursiv via $x_1 := \frac{3}{2}$, $x_{n+1} := x_n^2 - 2x_n + 2$.

(a) Betrachten Sie zunächst die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 - 2x + 2$. Zeigen Sie, dass $1 \leq f(x) \leq x$ für alle $x \in [1, 2]$. Zeigen Sie auch, dass $1 < f(x) < x$ für alle $x \in]1, 2[$.

(b) Zeigen Sie per Induktion, dass

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n \in]1, 2[\text{ und } x_{n+1} < x_n.$$

(c) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert.

(d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lambda := \lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

Lösung.

(a) Es ist $f(x) = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 \geq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ (insbesondere also für $x \in [1, 2]$). Gleichheit tritt nur für $x = 1$ auf (weil sonst $(x-1)^2 > 0$); somit ist $f(x) > 1$ für $x \in]1, 2[$. Weiter gilt $f(x) - x = x^2 - 3x + 2 = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$. Ist $x \in [1, 2]$, so ist $|x - \frac{3}{2}| \leq \frac{1}{2}$ und somit

$$f(x) - x = (x - 3/2)^2 - 1/4 \leq (1/2)^2 - 1/4 = 0.$$

Folglich ist $f(x) \leq x$ für $x \in [1, 2]$. Für $x \in]1, 2[$ ist $|x - \frac{3}{2}| < \frac{1}{2}$ und somit $f(x) - x < (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 0$, d.h. $f(x) < x$.

(b) $n = 1$: Es ist $x_1 = \frac{3}{2} \in]1, 2[$ und $x_2 = f(x_1) < x_1$, nach (a).

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ derart, dass $x_n \in]1, 2[$ und $x_{n+1} < x_n$. Dann gilt $x_{n+1} < x_n < 2$ und $x_{n+1} = f(x_n) > 1$ (nach (a)). Also ist $x_{n+1} \in]1, 2[$. Da $x_{n+1} \in]1, 2[$, gilt nach (a) weiter $x_{n+2} = f(x_n) < x_{n+1}$. Dies beendet den induktiven Beweis.

(c) Nach (b) ist die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und durch 1 nach unten beschränkt. Nach dem Satz über monotone Konvergenz (Satz III.2.19) ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Sei λ der Limes. Der Grenzübergang $n \to \infty$ in

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$$

führt auf

$$\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 2,$$

also

$$0 = \lambda^2 - 3\lambda + 2;$$

dabei haben wir den Grenzwertsatz für Folgen (Satz III.2.13) zur Berechnung des Grenzwerts der rechten Seite benutzt. Die Polynomfunktion $x \mapsto x^2 - 3x + 2 = (x - \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{4}$ hat die Nullstellen $\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$, also 1 und 2.
Da $x_n \in [1, \frac{3}{2}]$ für alle n, folgt $\lambda \in [1, \frac{3}{2}]$, es muss daher $\lambda = 1$ sein (die andere Nullstelle scheidet aus). Es gilt also $\lambda = 1$.

Aufgabe 5 (Häufungspunkte von Folgen – 10 Punkte).

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen komplexer Zahlen. Zeigen Sie: Ist jede der Zahlen h_n ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und gilt $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h$, so ist auch h ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung. Wir wählen im Folgenden eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus, die gegen h konvergiert. Sei $m \in \mathbb{N}$. Da h_m ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, gibt es natürliche Zahlen $n_1^{(m)} < n_2^{(m)} < \cdots$ derart, dass $\lim_{k\to\infty} x_{n_k^{(m)}} = h_m$. Nachdem wir notfalls einige Glieder am Anfang weglassen, dürfen wir annehmen, dass $|x_{n_k^{(m)}} - h_m| < 2^{-m-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Wir setzen nun $k_1 := n_1^{(1)}$. Wir wählen $j_2 \in \mathbb{N}$ derart, dass $k_2 := n_{j_2}^{(2)} > k_1$. Sind $k_1 < \cdots < k_m$ bereits konstruiert, so wählen wir $j_{m+1} \in \mathbb{N}$ derart, dass $k_{m+1} := n_{j_{m+1}}^{(m+1)} > k_m$. Dies liefert eine Folge $k_1 < k_2 < \cdots$. Dann gilt $\lim_{m\to\infty} x_{n_k} = h$. Ist nämlich $\varepsilon > 0$ gegeben, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $2^{-N} < \varepsilon$ und $|h_m - h| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $m \geq N$. Für alle $m \geq N$ ist dann

$$|x_{k_m} - h| \leq |\underbrace{x_{k_m}}_{=x_{j_m}^{(m)}} - h_m| + \underbrace{|h_m - h|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \underbrace{|x_{j_m}^{(m)} - h_m|}_{\leq 2^{-m-1} \leq 2^{-N-1}} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

(mit $j_1 := 1$). Also konvergiert tatsächlich die Teilfolge $(x_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ gegen h.