Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. Mai 2006

# Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 4

## Hausübung

**H 12 (Idempotente in einem Körper)**
Beweisen Sie, daß es in einem Körper genau zwei Elemente gibt, die der Gleichung

$$x^2 = x$$

genügen.

**H 13 (Einige Gruppen?)**

1. Betrachten Sie die Menge der Wochentage $M = \{\mathrm{So}, \mathrm{Mo}, \mathrm{Di}, \mathrm{Mi}, \mathrm{Do}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Sa}\}$. Ist es möglich, eine Addition $+ : M \times M \to M$ zu definieren, so daß $(M, +)$ eine Gruppe ist? Schlagen Sie hierzu eine Addition vor und geben Nullelement und inverse Elemente an.
2. Betrachten Sie die Teilmenge $\{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$ von $\mathbb{Q}^2$ aus Aufgabe **G 13**. Bildet diese unter der in Aufgabe **G 13** definierten Multiplikation eine abelsche Gruppe?
3. Betrachten Sie die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der Verknüpfung
$$a * b := \frac{1}{2}(a + b).$$
Welche Gruppenaxiome erfüllt $(\mathbb{Q}, *)$?

**H 14 (Maxima und Minima)**
Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{Q}$ ein Maximum bzw. ein Minimum haben, und geben Sie diese gegebenenfalls an:

1. $M_1 = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
2. $M_2 = \{n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
3. $M_3 = \{\frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
4. $M_4 = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \leq 1\}$,
5. $M_5 = \emptyset$.

**H 15 (Eigenschaften eines Körpers)**
Sei $\mathbb{F}$ ein beliebiger Körper und sei

$$\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}, n \mapsto \begin{cases} 1_{\mathbb{F}} + \cdots + 1_{\mathbb{F}} & (n\text{-mal}) \quad \text{falls } n > 0 \\ -(1_{\mathbb{F}} + \cdots + 1_{\mathbb{F}}) & (-n\text{-mal}) \quad \text{falls } n < 0 \\ 0 & \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1. Ist $\psi$ injektiv, so gilt $\frac{1}{\psi(2)} \notin \psi(\mathbb{Z})$; insbesondere ist $\psi(\mathbb{Z})$ kein Unterkörper von $\mathbb{F}$.
2. Ist $\psi$ nicht injektiv, so ist $\mathrm{im}(\psi)$ endlich.
*Hinweis:* Gilt $\psi(m) = \psi(n)$ für $k = m - n \neq 0$, so ist $\psi(t + k) = \psi(t)$ für alle $t \in \mathbb{Z}$. Warum folgt hieraus die Endlichkeit von $\mathrm{im}(\psi)$?
3. $\psi(\mathbb{Z})$ ist unter Addition und Multiplikation abgeschlossen.

## Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 4, Lösungsvorschlag

### Hausübung

**H 12 (Idempotente in einem Körper)**

Beweisen Sie, daß es in einem Körper genau zwei Elemente gibt, die der Gleichung

$$x^2 = x$$

genügen.

Lösung: *In einem Körper gilt nach Definition* $0 \neq 1$. *Außerdem* $0^2 = 0$ *und* $1^2 = 1$.

*Falls gilt* $e^2 = e$ *für ein* $e \neq 0$, *so gilt auch* $(1-e)^2 = 1 - 2e + e = 1 - e$ *und* $e(1-e) = e - e^2 = e - e = 0$. *Kürzen von* $e$ *ergibt* $1 - e = 0$, *also* $e = 1$.

**H 13 (Einige Gruppen?)**

1. Betrachten Sie die Menge der Wochentage $M = \{\mathrm{So}, \mathrm{Mo}, \mathrm{Di}, \mathrm{Mi}, \mathrm{Do}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Sa}\}$. Ist es möglich, eine Addition $+ : M \times M \to M$ zu definieren, so daß $(M, +)$ eine Gruppe ist? Schlagen Sie hierzu eine Addition vor und geben Nullelement und inverse Elemente an.
2. Betrachten Sie die Teilmenge $\{(1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1)\}$ von $\mathbb{Q}^2$ aus Aufgabe **G 13**. Bildet diese unter der in Aufgabe **G 13** definierten Multiplikation eine abelsche Gruppe?
3. Betrachten Sie die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ mit der Verknüpfung

$$a * b := \frac{1}{2}(a + b).$$

   Welche Gruppenaxiome erfüllt $(\mathbb{Q}, *)$?

Lösung:

1. *Nummeriere die Wochentage (beliebig) von* $0$ *bis* $6$ *durch und definiere die Addition wie in Aufgabe* ***G 11***, *nur mit Division durch* $7$ *anstatt* $24$.
2. *Nachrechnen ergibt, daß es sich um eine Gruppe handelt.*
3. *Verletzt sind die Existenz eines Nullelementes und das Assoziativgesetz. (Die Frage nach Inversen macht ohne Nullelement keinen Sinn.)*

**H 14 (Maxima und Minima)**

Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{Q}$ ein Maximum bzw. ein Minimum haben, und geben Sie diese gegebenenfalls an:

1. $M_1 = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
2. $M_2 = \{n - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
3. $M_3 = \{\frac{(-1)^n}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$,
4. $M_4 = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x \leq 1\}$,
5. $M_5 = \emptyset$.

Lösung:

1. *Das Maximum ist* $1$, *Minimum existiert nicht.*
2. *Das Minimum ist* $0$, *ein Maximum existiert nicht.*
3. *Das Maximum ist* $\frac{1}{2}$, *Minimum* $-1$.

4. *Das Maximum ist* $1$*, ein Minimum existiert nicht.*
5. *Weder Maximum noch Minimum existieren.*

**H 15 (Eigenschaften eines Körpers)**
Sei $\mathbb{F}$ ein beliebiger Körper und sei

$$\psi : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}, n \mapsto \begin{cases} 1_{\mathbb{F}} + \cdots + 1_{\mathbb{F}} & (n\text{-mal}) \quad \text{falls } n > 0 \\ -(1_{\mathbb{F}} + \cdots + 1_{\mathbb{F}}) & (-n\text{-mal}) \quad \text{falls } n < 0 \\ 0 & \qquad\qquad\quad \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

Zeigen Sie:

1. Ist $\psi$ injektiv, so gilt $\frac{1}{\psi(2)} \notin \psi(\mathbb{Z})$; insbesondere ist $\psi(\mathbb{Z})$ kein Unterkörper von $\mathbb{F}$.
2. Ist $\psi$ nicht injektiv, so ist $\mathrm{im}(\psi)$ endlich.
   *Hinweis:* Gilt $\psi(m) = \psi(n)$ für $k = m - n \neq 0$, so ist $\psi(t + k) = \psi(t)$ für alle $t \in \mathbb{Z}$. Warum folgt hieraus die Endlichkeit von $\mathrm{im}(\psi)$?
3. $\psi(\mathbb{Z})$ ist unter Addition und Multiplikation abgeschlossen.

Lösung:

1. *Es gilt für beliebige* $n \in \mathbb{Z}$*, daß* $\psi(2)\psi(n) = \psi(2n) \neq \psi(1)$*. Insbesondere ist also* $\frac{1}{\psi(2)} \notin \psi(\mathbb{Z})$ *und damit kein Körper, da die Existenz von multiplikativen Inversen verletzt ist.*
2. *Da* $\psi$ *nicht injektiv, existieren* $m \neq n$ *mit* $\psi(m) = \psi(n)$*. Daraus folgt* $\psi(m - n) = \psi(m) - \psi(n) = 0$*, also* $\psi(t + k) = \psi(t) + \psi(k) = \psi(t)$ *für alle* $t \in \mathbb{Z}$ *und* $k := m - n$*. Daraus folgt* $\psi(t) = \psi(c)$*, wobei* $c$ *der Rest von* $t$ *nach Division durch* $k$ *ist. Da es nur endlich viele Reste nach Division durch* $k$ *gibt, ist* $\mathrm{im}(\psi)$ *endlich.*
3. *Es gilt nach Definition* $\psi(m)+\psi(n) = \psi(m+n)$*. Außerdem* $\psi(m)\cdot\psi(n) = (m\cdot 1_{\mathbb{F}})\cdot(n\cdot 1_{\mathbb{F}}) = mn \cdot 1_{\mathbb{F}} = \psi(mn)$*.*