Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

26. April 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 2

Hausübung

H 5 (Lesen von logischen Formeln; Beweis und Gegenbeispiel)
Schreiben Sie jede der folgenden Aussagen in Worten auf. Begründen Sie, welche dieser Aussagen wahr sind:

1. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) n^2 = k$
2. $(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) n^2 = k$
3. $(\exists! n \in \mathbb{N}) n^2 - 3n + 2 = 0$
4. $(\forall n \in \mathbb{N})(((\exists k \in \mathbb{N}) n^2 = 5k) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) n = 5k)$
5. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) n = k^2$

H 6 (De Morgansche Regeln für Mengen)
Zeigen Sie, daß für Mengen A, B, X gilt:

$$X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B) \quad \text{und} \quad X \backslash (A \cap B) = (X \backslash A) \cup (X \backslash B).$$

Zeigen Sie außerdem, daß für Mengen X und J und eine Familie von Mengen $(M_j)_{j \in J}$ gilt:

$$X \cap \left(\bigcup_{j \in J} M_j \right) = \bigcup_{j \in J} (X \cap M_j) \quad \text{und} \quad X \cup \left(\bigcap_{j \in J} M_j \right) = \bigcap_{j \in J} (X \cup M_j).$$

H 7 (Eine Funktion zwischen Potenzmengen)
Seien X und Y Mengen sowie $f : X \to Y$ eine Funktion und

$$f^* : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X), A \mapsto f^{-1}(A)$$

die Abbildung, die jeder Teilmenge von Y ihr Urbild in X zuordnet.

Zeigen Sie:

1. f ist genau dann injektiv, wenn f^* surjektiv ist.
2. f ist genau dann surjektiv, wenn f^* injektiv ist.

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 2, Lösungsvorschlag

Hausübung

H 5 (Lesen von logischen Formeln; Beweis und Gegenbeispiel)

Schreiben Sie jede der folgenden Aussagen in Worten auf. Begründen Sie, welche dieser Aussagen wahr sind:

1. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) n^2 = k$
2. $(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N}) n^2 = k$
3. $(\exists! n \in \mathbb{N}) n^2 - 3n + 2 = 0$
4. $(\forall n \in \mathbb{N})(((\exists k \in \mathbb{N}) n^2 = 5k) \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{N}) n = 5k)$
5. $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}) n = k^2$

Lösung:

1. *Zu jeder natürlichen Zahl n existiert eine natürliche Zahl k mit $n^2 = k$. Diese Aussage ist korrekt, da das Produkt zweier natürlichen Zahlen wieder eine natürliche Zahl ergibt.*
2. *Es gibt eine natürliche Zahl k, so daß für alle natürlichen Zahlen n gilt $n^2 = k$. Diese Aussage ist falsch, da beispielsweise $1^2 \neq 2^2$.*
3. *Es gibt genau eine natürliche Zahl n, die die Gleichheit $n^2 - 3n + 2 = 0$ erfüllt. Diese Aussage ist falsch, da sowohl $n = 1$ als auch $n = 2$ die Gleichheit $n^2 - 3n + 2 = 0$ erfüllen.*
4. *Für jede natürliche Zahl n gilt: Gibt es eine natürliche Zahl k mit $n^2 = 5k$, so gibt es auch eine natürliche Zahl k mit $n = 5k$. Diese Aussage ist wahr, denn – da 5 prim (quadratfrei reicht) – folgt aus $5|n^2$ schon $5|n$.*
5. *Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl k mit $n = k^2$. Diese Aussage ist falsch, jede quadratfreie Zahl n (z.B. Primzahlen) liefert ein Gegenbeispiel.*

H 6 (De Morgansche Regeln für Mengen)

Zeigen Sie, daß für Mengen A, B, X gilt:

$$X \backslash (A \cup B) = (X \backslash A) \cap (X \backslash B) \quad \text{und} \quad X \backslash (A \cap B) = (X \backslash A) \cup (X \backslash B).$$

Zeigen Sie außerdem, daß für Mengen X und J und eine Familie von Mengen $(M_j)_{j \in J}$ gilt:

$$X \cap \left(\bigcup_{j \in J} M_j \right) = \bigcup_{j \in J} (X \cap M_j) \quad \text{und} \quad X \cup \left(\bigcap_{j \in J} M_j \right) = \bigcap_{j \in J} (X \cup M_j).$$

Lösung: *Es gilt*

$$\begin{aligned}
x \in X \backslash (A \cup B) &\iff x \in X \wedge x \notin (A \cup B) \\
&\iff x \in X \wedge (x \notin A \wedge x \notin B) \\
&\iff x \in X \wedge x \notin A \wedge x \notin B \\
&\iff x \in X \wedge x \notin A \wedge x \in X \wedge x \notin B \\
&\iff x \in X \backslash A \wedge x \in X \backslash B \\
&\iff x \in (X \backslash A) \cap (X \backslash B);
\end{aligned}$$

analog zeigt man die andere Gleichheit.

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} x \in X \cap \left(\bigcup_{j \in J} M_j \right) &\iff x \in M \wedge \left(\bigvee_{j \in J} x \in M_j \right) \\ &\iff \bigvee_{j \in J} (x \in X \wedge x \in M_j) \qquad \textit{Distributivgesetz} \\ &\iff x \in \bigcup_{j \in J} (X \cap M_j); \end{aligned}$$

analog zeigt man die andere Gleichheit.

H 7 (Eine Funktion zwischen Potenzmengen)
Seien X und Y Mengen sowie $f : X \to Y$ eine Funktion und

$$f^* : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X), A \mapsto f^{-1}(A)$$

die Abbildung, die jeder Teilmenge von Y ihr Urbild in X zuordnet.

Zeigen Sie:

1. f ist genau dann injektiv, wenn f^* surjektiv ist.
2. f ist genau dann surjektiv, wenn f^* injektiv ist.

Lösung:

1. *Es gilt $f^{-1}(f(B)) = B$ für alle $B \in \mathcal{P}(X)$ genau dann, wenn f injektiv ist. Daraus folgt aber, daß f^* surjektiv ist.*

   Sei nun f nicht injektiv, etwa $f(x) = f(y)$ für $x \neq y$ und $x, y \in X$. Dann ist $\{x\}$ kein Bild unter f^*, also ist f^* nicht surjektiv.
2. *Falls f nicht surjektiv ist, dann existiert ein $y \in Y$ mit $f^{-1}(y) = \emptyset$. Jedoch gilt auch $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, somit ist f^* nicht injektiv.*

   Falls f^* nicht injektiv ist, dann gibt es $B, B' \in \mathcal{P}(Y)$ mit $B \neq B'$ und $f^*(B) = f^*(B')$. Wähle $y \in B \backslash B' \cup B' \backslash B$. Dann gilt $f^{-1}(y) = \emptyset$ und f ist nicht surjektiv.