Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

31. Mai 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 7

Gruppenübung

G 20 (Folgen)

Untersuchen Sie die untenstehenden Folgen auf Beschränktheit, Konvergenz, Divergenz, bestimmte Divergenz:

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{4n^3+n+1}{3n^3+5n^2+2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;
2. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(3-n)^3}{3n^3-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;
3. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(n+1)^3}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;
4. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(-1)^n n^2+10}{1+n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;
5. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1-n}{1-(-1)^n n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

G 21 (Rekursive Folge)

Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n$. Zeigen Sie, daß diese Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

G 22 (Reelle und komplexe Folgen)

1. Beweisen Sie, daß eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + iy_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen die komplexe Zahl $z = x + iy$ konvergiert, wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$ gilt $(x, x_n, y, y_n \in \mathbb{R})$.
2. Zeigen Sie, daß $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1} + i\frac{n^2}{2^n+1}\right) = 1$.

Hausübung

H 23 (Folge mit Parameter)

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{tn^2}{n+1} + \frac{n^3}{n^2+4n+1}$ konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls den jeweiligen Grenzwert.

H 24 (Sandwichkriterium)

1. Sei M eine Menge von reellen Zahlen und x eine obere Schranke von M. Zeigen Sie, daß x genau dann Supremum von M ist, wenn es eine Folge von Elementen von M gibt, die gegen x konvergiert.
2. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, daß aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = c = \lim_{n\to\infty}(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt, daß $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert c.
3. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $|b_n| \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, daß aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$ folgt, daß $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert 0.

H 25 (Folgen in metrischen Räumen)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X, d).

1. Genau dann gilt $x = \lim_{n\to\mathbb{N}} x_n$, wenn die reelle Folge $(d(x_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.
2. Zeigen Sie, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn jede Teilfolge konvergiert.

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 7, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 20 (Folgen)

Untersuchen Sie die untenstehenden Folgen auf Beschränktheit, Konvergenz, Divergenz, bestimmte Divergenz:

1. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{4n^3+n+1}{3n^3+5n^2+2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;
2. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(3-n)^3}{3n^3-1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;
3. $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(n+1)^3}{n^2+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;
4. $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{(-1)^n n^2+10}{1+n^3}\right)_{n\in\mathbb{N}}$;
5. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1-n}{1-(-1)^n n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lösung:

1. $\frac{4n^3+n+1}{3n^3+5n^2+2n+1} = \frac{4+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{3+\frac{5}{n}+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}} \to \frac{4}{3}$, *also konvergent und ebschränkt.*
2. $\frac{(3-n)^3}{3n^3-1} = \frac{-n^3+\cdots}{3n^3-1} \to -\frac{1}{3}$, *also konvergent und beschränkt.*
3. $\frac{(n+1)^3}{n^2+1} = \frac{n^3+\cdots}{n^2+1} = \frac{1+\frac{\cdots}{n}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}} \to \infty$, *also bestimmt divergent und unbeschränkt.*
4. $\frac{(-1)^n n^2+10}{1+n^3} = \frac{\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{1}{n^3}} \to 0$, *also konvergent und beschränkt.*
5. $\frac{1-n}{1-(-1)^n n} = \frac{-1+\frac{1}{n}}{(-1)^n+\frac{1}{n}}$ *divergiert, denn Teilfolge mit geraden n konvergiert gegen -1 und Teilfolge mit ungeraden n konvergiert gegen 1; daher beschränkt.*

G 21 (Rekursive Folge)

Definiere die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiv durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n$. Zeigen Sie, daß diese Folge konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Lösung: *Es gilt $1 \leq a_n \leq 2$: Offensichtlich gilt $1 \leq a_1 \leq 2$. Nach Induktion gilt also $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n \geq 1$, denn $1 \leq a_n \leq 2$ impliziert insbesondere $a_n \geq 0$. Außerdem gilt nach Induktion $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}a_n \leq 2$, denn $1 \leq a_n \leq 2$ impliziert $\frac{1}{2}a_n \leq 1$.*

Die Folge a_n ist monoton wachsend: Wegen $a_n \leq 2$ gilt $\frac{1}{2}a_n \leq 1$, also $a_{n+1} - a_n = 1 + \frac{1}{2}a_n - a_n = 1 - \frac{1}{2}a_n \geq 0$.

Nach Satz III.2.19 (a) konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Setze $a := \lim_{n\to\infty} a_n$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$, also $1 + \frac{1}{2}a = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}a_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{2}a_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a$, woraus $a = 2$ folgt.

G 22 (Reelle und komplexe Folgen)

1. Beweisen Sie, daß eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x_n + iy_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann gegen die komplexe Zahl $z = x + iy$ konvergiert, wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$ gilt $(x, x_n, y, y_n \in \mathbb{R})$.
2. Zeigen Sie, daß $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1} + i\frac{n^2}{2^n+1}\right) = 1$.

Lösung:

1. *Aus* $x_n \to x$ *und* $y_n \to y$ *folgt* $x_n + iy_n \to x + iy$ *nach Satz III.2.13. Umgekehrt gilt* $\max\{|x_n - x|, |y_n - y|\} \leq \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} = |(x_n - x) + i(y_n - y)| = |z_n - z|$, *also folgt aus* $|z_n - z| \to 0$ *schon* $|x_n - x| \to 0$ *und* $|y_n - y| \to 0$.
2. *Es gilt* $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ *(vgl. III.2.5). Außerdem* $2^n + 1 \geq 2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \geq 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = \frac{6+6n+3n^2-3n+n^3-3n^2+2n}{6} \geq \frac{n^3}{6}$, *also* $\frac{n^2}{2^n+1} \leq \frac{n^2}{\frac{n^3}{6}} = \frac{6}{n} < \epsilon$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$.

Hausübung

H 23 (Folge mit Parameter)

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{tn^2}{n+1} + \frac{n^3}{n^2+4n+1}$ konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls den jeweiligen Grenzwert.

Lösung:

H 24 (Sandwichkriterium)

1. Sei M eine Menge von reellen Zahlen und x eine obere Schranke von M. Zeigen Sie, daß x genau dann Supremum von M ist, wenn es eine Folge von Elementen von M gibt, die gegen x konvergiert.
2. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, daß aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = c = \lim_{n\to\infty}(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt, daß $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert c.
3. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Folgen mit $|b_n| \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, daß aus $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty}(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = 0$ folgt, daß $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert mit Grenzwert 0.

Lösung:

H 25 (Folgen in metrischen Räumen)

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum (X, d).

1. Genau dann gilt $x = \lim_{n\to\mathbb{N}} x_n$, wenn die reelle Folge $(d(x_n, x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert.
2. Zeigen Sie, daß $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn jede Teilfolge konvergiert.

Lösung: