Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

10. Mai 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 4

Gruppenübung

G 11 (Die Uhr als Gruppe)
Sei $G = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 23\}$ mit der Addition $a \oplus b := c$, falls c der Rest bei Division von $a + b$ durch 24. Zeigen Sie, daß $(G, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist. Haben Sie in dieser Gruppe schon einmal gerechnet?

G 12 (Vollständige Induktion)
Zeigen Sie:

1. Für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ gilt $2n + 1 \leq n^2$.
2. Für jede natürliche Zahl $n \neq 3$ gilt $n^2 \leq 2^n$.
3. Für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ gilt $2^n < n!$.

G 13 (Konstruktion der komplexen Zahlen über $\mathbb{Q}$)
Sei $\mathbb{Q}^2 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Auf $\mathbb{Q}^2$ definieren wir Addition und Multiplikation durch

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, bc + ad).$$

Weiter definieren wir eine Funktion

$$N : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}, (a, b) \mapsto a^2 + b^2.$$

Zeigen Sie:

1. $N(xy) = N(x)N(y)$ für $x, y \in \mathbb{Q}^2$.
2. $(\mathbb{Q}^2, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
3. Für $x = (a, b)$ mit $N(x) \neq 0$ ist

$$x^{-1} := \left(\frac{a}{N(x)}, -\frac{b}{N(x)}\right)$$

ein multiplikatives Inverses.

4. $(\mathbb{Q}^2, +, \cdot)$ ist ein Körper.
Hinweis: Überlegen Sie sich bei der Überprüfung des Assoziativgesetzes der Multiplikation nur, was Sie beweisen müßten, führen Sie den konkreten Nachweis aber nicht durch! Das direkte Nachrechnen ist viel zu umständlich und langwierig. Später werden Sie in der Linearen Algebra und in der Algebra Methoden kennenlernen, die die Rechnung sehr stark verkürzen.
Verwenden Sie außerdem ohne Beweis: $(\forall a, b \in \mathbb{Q}) a^2 + b^2 = 0 \iff a = 0 = b$. Diese Aussage basiert auf der Anordnung von $\mathbb{Q}$, die Sie in Kürze in der Vorlesung kennenlernen werden.

5. Sei i ein abstraktes Symbol und sei $\mathbb{Q}(i) := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Auf $\mathbb{Q}(i)$ definieren wir Addition und Multiplikation durch

$$(a + bi) + (c + di) := (a + c) + (b + d)i$$

und

$$(a + bi) \cdot (c + di) := (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

Warum ist $\mathbb{Q}(i)$ ein Körper?

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 4, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 11 (Die Uhr als Gruppe)

Sei $G = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 23\}$ mit der Addition $a \oplus b := c$, falls c der Rest bei Division von $a + b$ durch 24. Zeigen Sie, daß $(G, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist. Haben Sie in dieser Gruppe schon einmal gerechnet?

Lösung: *Um zu zeigen, daß $(G, \oplus)$ eine abelsche Gruppe ist, müssen wir die Gültigkeit der entsprechenden Axiome nachweisen.*

Assoziativgesetz: *Es ist zu zeigen, daß $a_1 \oplus (a_2 \oplus a_3) = (a_1 \oplus a_2) \oplus a_3$ für alle $a_i \in G$, d.h. $a_1 \oplus a_{23} = a_{12} \oplus a_3$, wobei a_{23} der Rest bei Division von $a_2 + a_3$ durch 24 und a_{12} der Rest bei Division von $a_1 + a_2$ durch 24 ist.*

Es gilt $a_1 + a_2 = a_{12} + k_{12}24$ und $a_2 + a_3 = a_{23} + k_{23}24$, somit

$$a_{12} + k_{12}24 + a_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_{23} + k_{23}24.$$

Hieraus folgt aber unmittelbar, daß $a_1 + a_{23}$ und $a_{12} + a_3$ denselben Rest nach Division durch 24 besitzen, also $a_1 \oplus a_{23} = a_{12} \oplus a_3$.

Kommutativgesetz: *Dies folgt aus der Tatsache $a+b = b+a$, d.h. der Rest nach Division durch 24 bleibt ebenfalls gleich.*

Neutralelement: *Addition mit 0 äendert den Rest nach Division durch 24 nicht.*

Inverses Element: *Für $a \in G$ ist $24 - a \in G$ das Inverse Element.*

Mit dieser Gruppe rechnen Sie beispielsweise jedesmal, wenn Sie vor Mitternacht aus dem Kino oder aus der Kneipe kommen und ausrechnen wollen, wie lange Sie noch schlafen können, wenn Sie um 6 Uhr aufstehen wollen, um pünktlich zur Vorlesung zu kommen.

G 12 (Vollständige Induktion)

Zeigen Sie:

1. Für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ gilt $2n + 1 \leq n^2$.
2. Für jede natürliche Zahl $n \neq 3$ gilt $n^2 \leq 2^n$.
3. Für jede natürliche Zahl $n \geq 4$ gilt $2^n < n!$.

Lösung:

1. *Die Behauptung ist gleichbedeutend mit der Behauptung, daß für jede natürliche Zahl $n \geq 3$ gilt $2 \leq n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$.*
   Sicherlich gilt $2 \leq (3-1)^2 = 4$ (Induktionsanfang).
   Für den Induktionsschritt wollen wir die Gültigkeit der Aussage für $n+1$ zeigen, falls sie für n gilt:

$$((n+1) - 1)^2 = n^2 > n^2 - 2n + 1 \geq 2.$$

2. *Es gelten $1^2 = 1 \leq 2 = 2^1$, $2^2 = 4 \leq 4 = 2^2$ und $4^2 = 16 =\leq 16 = 2^4$ (Induktionsanfang).*
   Induktionsschritt:

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq 2n^2 \leq 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

3. *Es gilt $2^4 = 16 < 24 = 4!$ (Induktionsanfang).*
   Induktionsschritt:

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n < 2n! < (n+1)n! = (n+1)!.$$

G 13 (Konstruktion der komplexen Zahlen über $\mathbb{Q}$)

Sei $\mathbb{Q}^2 = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{Q}\}$. Auf $\mathbb{Q}^2$ definieren wir Addition und Multiplikation durch

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d)$$

und

$$(a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, bc + ad).$$

Weiter definieren wir eine Funktion

$$N : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}, (a,b) \mapsto a^2 + b^2.$$

Zeigen Sie:

1. $N(xy) = N(x)N(y)$ für $x, y \in \mathbb{Q}^2$.
2. $(\mathbb{Q}^2, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
3. Für $x = (a,b)$ mit $N(x) \neq 0$ ist

$$x^{-1} := \left(\frac{a}{N(x)}, -\frac{b}{N(x)}\right)$$

   ein multiplikatives Inverses.
4. $(\mathbb{Q}^2, +, \cdot)$ ist ein Körper.
   Hinweis: Überlegen Sie sich bei der Überprüfung des Assoziativgesetzes der Multiplikation nur, was Sie beweisen müßten, führen Sie den konkreten Nachweis aber nicht durch! Das direkte Nachrechnen ist viel zu umständlich und langwierig. Später werden Sie in der Linearen Algebra und in der Algebra Methoden kennenlernen, die die Rechnung sehr stark verkürzen.

   Verwenden Sie außerdem ohne Beweis: $(\forall a, b \in \mathbb{Q}) a^2 + b^2 = 0 \iff a = 0 = b$. Diese Aussage basiert auf der Anordnung von $\mathbb{Q}$, die Sie in Kürze in der Vorlesung kennenlernen werden.
5. Sei i ein abstraktes Symbol und sei $\mathbb{Q}(i) := \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Auf $\mathbb{Q}(i)$ definieren wir Addition und Multiplikation durch

$$(a+bi) + (c+di) := (a+c) + (b+d)i$$

   und

$$(a+bi) \cdot (c+di) := (ac - bd) + (bc + ad)i.$$

   Warum ist $\mathbb{Q}(i)$ ein Körper?

Lösung:

1.

$$\begin{aligned}
N((a,b) \cdot (c,d)) &= N((ac - bd, bc + ad)) \\
&= (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 \\
&= a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd + a^2d^2 \\
&= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\
&= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \\
&= N((a,b))N((c,d)).
\end{aligned}$$

2. *Nachrechnen. Es basiert darauf, daß* $(\mathbb{Q}, +)$ *eine abelsche Gruppe ist.*
3. *Es gilt*

$$\begin{aligned}(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}\right) &= \left(a\frac{a}{a^2+b^2}+b\frac{b}{a^2+b^2}, b\frac{a}{a^2+b^2}-a\frac{b}{a^2+b^2}\right)\\ &= (1,0);\end{aligned}$$

   das umgekehrte Produkt berechnet man genauso.
4. *Distributivgesetz und Kommutativgesetz sind schnell nachgerechnet. Assoziativgesetz ist ebenfalls eine direkte Rechnung, aber etwas schreibaufwändig. Das Einselement ist* $(1,0)$*, wie man direkt sieht.*

   Zur Existenz der multiplikativen Inversen: Nach Teilaufgabe 3. müssen wir nachweisen, daß $N((a,b)) = 0$ *genau dann, wenn* $(a,b) = (0,0)$*, was wir laut Aufgabenstellung annehmen dürfen.*
5. $\mathbb{Q}(i)$ *ist ein Körper, da man dort genauso rechnet wie in* $\mathbb{Q}^2$ *davor. Man sagt,* $\mathbb{Q}^2$ *und* $\mathbb{Q}(i)$ *sind isomorph. Mit solchen Problemen werden Sie sich in der Linearen Algebra und der Algebra beschäftigen.*