Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. K.-H. Neeb
PD Dr. Helge Glöckner
PD dr. Ralf Gramlich

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

26. April 2006

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 2

Gruppenübung

G 4 (Fallunterscheidung)
Beweisen Sie die Aussage

$$((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)) \Longrightarrow q.$$

Satz I.1.5 aus der Vorlesung wurde durch Fallunterscheidung bewiesen. Bestimmen Sie in diesem Satz die Aussagen p, $\neg p$ und q.

G 5 (Aufstellen von logischen Formeln; Beweis und Gegenbeispiel)
Stellen Sie logische Formeln für die folgenden Aussagen auf, negieren Sie diese und begründen Sie, welche Aussagen wahr sind.

1. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es Primzahlen p und q, deren Produkt n teilt.
2. Jede natürliche Zahl besitzt einen ungeraden Teiler, der ungleich 1 ist.
3. Jede ungerade natürliche Zahl besitzt einen ungeraden Teiler, der ungleich 1 ist.
4. Alle geraden natürlichen Zahlen besitzen ausschließlich 1 als ungeraden Teiler.
5. Es seien m und n natürliche Zahlen. Wenn m größer oder gleich n und n größer oder gleich m ist, dann stimmen m und n überein.
6. Sei M eine endliche Menge. Die Anzahl der Elemente von M ist kleiner als die Anzahl der Elemente von $\mathcal{P}(M)$.

G 6 (Potenzmenge)

1. Sei $M = \{a, b\}$. Wie viele Elemente hat $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$? Geben Sie alle Elemente von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ an.
   Hinweis: Eine Unterscheidung der Fälle $a = b$ und $a \neq b$ bietet sich an.
2. Sei E eine Menge. Zeigen Sie, daß für alle $A, B \in \mathcal{P}(E)$ gilt:

$$A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B.$$

Analysis I für M, LaG und Ph, SS 2006, Übung 2, Lösungsvorschlag

Gruppenübung

G 4 (Fallunterscheidung)

Beweisen Sie die Aussage

$$((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)) \Longrightarrow q.$$

Satz I.1.5 aus der Vorlesung wurde durch Fallunterscheidung bewiesen. Bestimmen Sie in diesem Satz die Aussagen p, $\neg p$ und q.

Lösung:

$$\begin{aligned}
(((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)) \Longrightarrow q) &\iff (\neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg\neg p \vee q)) \vee q)\\
&\iff ((\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(p \vee q)) \vee q)\\
&\iff (((p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee q)\\
&\iff (((p \vee \neg p) \wedge \neg q) \vee q)\\
&\iff ((W \wedge \neg q) \vee q)\\
&\iff (\neg q \vee q)\\
&\iff W,
\end{aligned}$$

also ist $((p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow q)) \Longrightarrow q$ *allgemeingültig.*

Im Beweis von Satz I.1.5 wollen wir die Annahme, daß es es natürliche Zahlen n und k gibt mit $n + 3 = k^2$, wobei n durch vier teilbar ist, zum Widerspruch führen. Hierbei werden die Fälle k gerade und k ungerade unterschieden.

Genauer gesagt gelten folgende Entsprechungen:

p	*entspricht*	k *gerade;*
$\neg p$	*entspricht*	k *ungerade;*
q	*entspricht*	$n = k^2 - 3$ *nicht durch* 4 *teilbar.*

G 5 (Aufstellen von logischen Formeln; Beweis und Gegenbeispiel)

Stellen Sie logische Formeln für die folgenden Aussagen auf, negieren Sie diese und begründen Sie, welche Aussagen wahr sind.

1. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es Primzahlen p und q, deren Produkt n teilt.
2. Jede natürliche Zahl besitzt einen ungeraden Teiler, der ungleich 1 ist.
3. Jede ungerade natürliche Zahl besitzt einen ungeraden Teiler, der ungleich 1 ist.
4. Alle geraden natürlichen Zahlen besitzen ausschließlich 1 als ungeraden Teiler.
5. Es seien m und n natürliche Zahlen. Wenn m größer oder gleich n und n größer oder gleich m ist, dann stimmen m und n überein.
6. Sei M eine endliche Menge. Die Anzahl der Elemente von M ist kleiner als die Anzahl der Elemente von $\mathcal{P}(M)$.

Lösung:

1. *Aussage:* $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists p, q \text{ prim}) pq | n$
   Negierung: $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall p, q \text{ prim}) pq \not| n$
   Korrekt ist die Negierung, wie man am Beispiel n prim sieht.
2. *Aussage:* $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \text{ ungerade}) k | n$
   Negierung: $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \text{ ungerade}) k \not| n$
   Korrekt ist die Negierung, wie man am Beispiel n Zweierpotenz sieht.

3. *Aussage:* $(\forall n \in \mathbb{N} \text{ ungerade})(\exists k \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \text{ ungerade}) k|n$
   Negierung: $(\exists n \in \mathbb{N} \text{ ungerade})(\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \text{ ungerade}) k \not| n$
   Korrekt ist die Negierung, wie man am Beispiel $n = 1$ *sieht.*
4. *Aussage:*
   $(\forall n \in \mathbb{N} \text{ gerade})((\exists k \in \mathbb{N})(k|n) \wedge (k \text{ ungerade}) \wedge (\forall k \in \mathbb{N})(k|n) \wedge (k \text{ ungerade}) \Rightarrow k = 1)$
   Negierung:
   $(\exists n \in \mathbb{N} \text{ gerade})((\nexists k \in \mathbb{N})(k|n) \wedge (k \text{ ungerade}) \vee (\exists k \in \mathbb{N})(k|n) \wedge (k \text{ ungerade}) \not\Rightarrow k = 1)$
   Korrekt ist die Negierung, wie man am Beispiel n *gerade, aber nicht Zweierpotenz sieht.*
5. *Aussage:* $((\forall m, n \in \mathbb{N})((m \geq n) \wedge (m \leq n) \Rightarrow (m = n))$
   Negierung: $((\exists m, n \in \mathbb{N})((m \geq n) \wedge (m \leq n) \not\Rightarrow (m = n))$
   Korrekt ist die Aussage, denn für je zwei verschiedene natürliche Zahlen m, n *gilt entweder* $m < n$ *oder* $m > n$.
6. *Aussage:* $((\forall M \text{ Menge})((|M| < \infty) \Rightarrow (|M| < |\mathcal{P}(M)))$
   Negierung: $((\exists M \text{ Menge})((|M| < \infty) \not\Rightarrow (|M| < |\mathcal{P}(M)))$
   Korrekt ist die Aussage, denn für alle nichtnegativen ganzen Zahlen n *gilt* $n < 2^n$.

G 6 (Potenzmenge)

1. Sei $M = \{a, b\}$. Wie viele Elemente hat $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$? Geben Sie alle Elemente von $\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))$ an.
   Hinweis: Eine Unterscheidung der Fälle $a = b$ und $a \neq b$ bietet sich an.
2. Sei E eine Menge. Zeigen Sie, daß für alle $A, B \in \mathcal{P}(E)$ gilt:

$$A \cap B = A \Longleftrightarrow A \subseteq B \Longleftrightarrow A \cup B = B.$$

Lösung:

1. *Für endliche Mengen* M *gilt* $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$, *also gilt* $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(M))| = 2^{2^1} = 4$, *falls* $a = b$, *und* $|\mathcal{P}(\mathcal{P})(M)| = 2^{2^2} = 16$, *falls* $a \neq b$.
   In beiden Fällen gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{P}(M)) \quad = \quad & \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{a\}\}, \{\{b\}\}, \{\{a,b\}\}, \{\emptyset, \{a\}\}, \{\emptyset, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a,b\}\}, \\ & \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}, \{\emptyset, \{b\}, \{a,b\}\}, \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\} \\ & \{\{a\}, \{b\}\}, \{\{a\}, \{a,b\}\}, \{\{b\}, \{a,b\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}\} \end{aligned}$$

2. *Alle drei Aussagen sind äquivalent zu* $x \in A \Rightarrow x \in B$.