Kombinatorik von Zahlenfolgen

Einige Beispiele

Jeder kennt die Fragen aus "Intelligenztests", in denen man Zahlenfolgen fortsetzen soll. Zum Beispiel könnten Sie auf folgende Frage stoßen:
Ergänzen Sie die unten stehenden Zahlenfolgen um eine weitere Zahl:
(F1) $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
(F2) $1, 3, 5, 7, 9, \ldots$
(F3) $1, 4, 9, 16, 25, \ldots$
(F4) $1, 8, 27, 64, 125, \ldots$
(F5) $0, 1, 0, -1, 0, \ldots$

Bei der ersten Folge ist die Antwort evidenterweise 1 und bei der zweiten ist 11 die nächste Zahl. Die dritte Folge ist die Folge der Quadratzahlen

$$1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad 3^2 = 9, \quad 4^2 = 16, \quad 5^2 = 25,$$

so dass die nächste Zahl $6^2 = 36$ ist. In analoger Weise ist die vierte Folge durch Kuben (Kubikzahlen) gebildet:

$$1^3 = 1, \quad 2^3 = 8, \quad 3^3 = 27, \quad 4^3 = 64, \quad 5^3 = 125,$$

die nächste ist also $6^3 = 6 \cdot 36 = 216$.

Bei der fünften Folge sieht man allerdings erstmal nicht, was hier kommen sollte, allerdings wäre 1 wohl kein schlechter Tip. Wir werden uns nun etwas genauer anschauen, wie man das Problem der Fortsetzung von Zahlenfolgen systematisch angehen kann. Dabei werden wir insbesondere sehen, dass die Intelligenz, die man in solchen Tests zeigt eine sehr relative ist, die wohl mehr mit der Einstellung auf Testfragen dieser Art und die dort typischerweise auftretenden Muster zu tun hat, als mit arithmetischer Auffassungsgabe.

Zahlenfolgen

Um Zahlenfolgen untersuchen zu können, müssen wir uns auf geeignete Notation und Bezeichnungen einigen. Heute werden die "Zahlen" nur aus folgenden Zahlbereichen kommen:

Natürlichen Zahlen: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.

Rationale Zahlen (Brüche): $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$.
Wir haben die folgenden Inklusionen von Mengen:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Wir setzen hier voraus, dass jeder mit Brüchen rechnen kann.

Eine unendliche Zahlenfolge hat nun die Struktur

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots,$$

wobei die Symbole a_n für rationale Zahlen stehen. Man schreibt auch kürzer $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, oder noch kürzer (a_n), für eine solche Folge. Man kann sich nun auf den Standpunkt stellen, dass man die Folge (a_n) kennt, wenn uns eine Bildungsvorschrift für die Zahl a_n bekannt ist.

Zum Beispiel gibt es *konstante Folgen:*

$$a_n = c, \qquad c, c, c, c, c, \ldots$$

(siehe (F1)). Eine weitere wichtige Klasse bilden die *arithmetischen Folgen*, bei denen die Zahlen $a_{n+1} - a_n$ alle gleich sind, d.h.

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots,$$

z.B. (F2).

Konstante Folgen sind durch ihr erstes Glied vollständig bestimmt:

$$a_n = a_1 \quad \text{für alle } n.$$

Bei arithmetischen Folgen benötigt man nur die ersten beiden Glieder um die Folge zu bestimmen. Für $d := a_2 - a_1$ gilt

$$a_2 = a_1 + d, \quad a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d, \quad a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

und hieraus erhalten wir das Bildungsgesetz für arithmetische Folgen:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = a_1 + (n-1)(a_2 - a_1).$$

Die Differenzenfolge einer Zahlenfolge

Diese beiden Typen von Folgen legen nahe, dass es sinnvoll ist, das Verhalten einer Folge $a = (a_n)$ dadurch zu analysieren, dass man ihre *Differenzenfolge*

$$(\Delta a)_n := a_{n+1} - a_n$$

betrachtet. Zum Beispiel sind konstante Folgen (a_n) dadurch charakterisiert, dass ihre Differenzenfolge $(\Delta a)_n$ verschwindet, d.h. konstant 0 ist und arithmetische Folgen sind dadurch charakterisiert, dass ihre Differenzenfolge konstant ist. Verfolgen wir diesen Gedanken weiter, ergibt sich die natürliche Frage:

Welche Folgen werden dadurch charakterisiert, dass ihre Differenzenfolge arithmetisch ist?

Es ist klar, dass dies eine Klasse von Folgen beschreibt, deren Komplexität um eine Stufe über der arithmetischer Folgen liegt.

Wie findet man die Antwort auf diese Frage? Zunächst beobachten wir, dass wir jede Folge (a_n) aus ihrem Anfangswert a_1 und ihrer Differenzenfolge rekonstruieren können:

$$a_2 = a_1 + (\Delta a)_1, \quad a_3 = a_2 + (\Delta a)_2 = a_1 + (\Delta a)_1 + (\Delta a)_2$$

und allgemein

$$a_n = a_1 + (\Delta a)_1 + (\Delta a)_2 + \ldots + (\Delta a)_{n-1}.$$

Um dies etwas kompakter schreiben zu können, verwenden wir die Summenschreibweise für Summen von n Zahlen $x_1, \ldots, x_n$:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j := x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

Hiermit ergibt sich die *Rekonstruktionsformel:*

$$a_n = a_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (\Delta a)_j = a_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (a_{j+1} - a_j).$$

Ist die Differenzenfolge $(\Delta a)_n$ arithmetisch, so existieren Zahlen d_1 und d_2 mit

$$(\Delta a)_n = d_1 + (n-1)d_2.$$

Einsetzen in die Rekonstruktionsformel führt nun zu

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{j=1}^{n-1} (\Delta a)_j = a_1 + \sum_{j=1}^{n-1} \Big(d_1 + (j-1)d_2\Big) \\ &= a_1 + (n-1)d_1 + d_2 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} (j-1) = a_1 + (n-1)d_1 + d_2 \cdot \sum_{j=1}^{n-2} j. \end{aligned}$$

Um diese Formel auswerten zu können, benötigen wir eine explizite Formel für die Summe

$$s_n := 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{j=1}^{n} j$$

der ersten n natürlichen Zahlen.

Dieses Problem, für die konkrete Zahl $n = 100$, wurde dem kleinen Carl Friedrich Gauss[1] im Alter von sieben Jahren von seinem Lehrer gestellt, der

[1] Carl Friedrich Gauß (1777–1855), Mathematiker und Physiker in Göttingen, leistete entscheidende Beiträge in vielen Bereichen der Mathematik.

sich damit erhoffte, seine Klasse für eine Weile ruhig zu stellen. Carl Friedrich fing dies etwas anders an als seine Klassenkameraden, und zwar so:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & 49 & + & 50 & + & & \\
 & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \dots & + & 52 & + & 51 & & & \\
= & 101 & + & 101 & + & 101 & + & & \dots & & + & 101 & = & 101 \cdot 50 = 5050.
\end{array}
$$

Das bemerkenswerte an diesem Ansatz ist, dass man mit ihm auch das allgemeine Problem lösen kann:

$$2s_n = (1+n) + (2+(n-1)) + (3+(n-2)) + \ldots + (n+1) = n(n+1)$$

liefert sofort die Summenformel

$$(S1) \qquad s_n = \frac{1}{2}(n+1)n = \sum_{j=1}^{n} j.$$

Damit kommen wir unserem ursprünglichen Problem näher: Wenn $(\Delta a)_n$ eine arithmetische Folge, also von der Gestalt $d_1 + (n-1)d_2$ für gewisse d_1, d_2 ist, erhalten wir aus der Rekonstruktionsformel:

$$a_n = a_1 + (n-1)d_1 + d_2 \cdot \sum_{j=1}^{n-2} j = a_1 + d_1(n-1) + \frac{d_2}{2}(n-1)(n-2).$$

Ausmultiplizieren liefert also, dass a_n von der Gestalt

$$a_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2$$

ist, d.h. eine *quadratische Folge*. Wir haben also bewiesen, dass eine Folge (a_n), deren Differenzenfolge arithmetisch ist, quadratisch ist. Es ist nicht schwer, hiervon auch die Umkehrung zu verifizieren: Ist $a_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2$, so ist

$$
\begin{aligned}
(\Delta a)_n := a_{n+1} - a_n &= c_0 + c_1(n+1) + c_2(n+1)^2 - c_0 - c_1 n - c_2 n^2 \\
&= c_1 + c_2 + 2c_2 n = c_1 + 3c_2 + 2c_2(n-1)
\end{aligned}
$$

eine arithmetische Folge. Hierbei haben wir die binomische Formel

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

zur Berechnung von $(n+1)^2$ verwendet.

Wir formulieren dieses Ergebnis als einen mathematischen (Lehr-)satz:

Satz 1. *Eine Zahlenfolge (a_n) ist genau dann quadratisch, wenn ihre Differenzenfolge arithmetisch ist.* ∎

Polynomiale Folgen

In der Mathematik ist es oft so, dass sich aus der Lösung eines Problems sofort eine neue Frage ergibt. Hier lautet sie: Wie lassen sich diejenigen Folgen charakterisieren, deren Differenzenfolge quadratisch ist. Man ahnt sogar schon, dass sich dies ad infinitum fortsetzen lässt. Also setzen wir gleich etwas allgemeiner an:

Definition 2. Eine Folge (a_n) heißt *polynomial von der Ordnung (höchstens)* k, wenn es Zahlen $c_0, \ldots, c_k$ gibt, so dass

$$a_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \ldots + c_k n^k$$

für alle natürlichen Zahlen n gilt. Wir sprechen von einer Folge der Ordnung k, wenn $c_k \neq 0$ ist. ■

Polynomiale Folgen der Ordnung 0 sind konstante Folgen, Folgen der Ordnung ≤ 1 sind die arithmetischen Folgen und quadratische Folgen sind die Folgen der Ordnung ≤ 2. Aus dieser Beobachtung können wir die folgenden Satz extrahieren:

Satz 3. *Eine Zahlenfolge (a_n) ist genau dann polynomial von der Ordnung k, wenn ihre Differenzenfolge polynomial von der Ordnung $k-1$ ist.* ■

Satz 1 ist ein Spezialfall des sehr viel allgemeineren Satzes 3, der den Fall $k = 2$ betrifft. Für den Fall $k = 1$ ist Satz 3 trivial, d.h. unmittelbar einsichtig.

Im Anhang finden Sie Details zum Beweis von Satz 3. Er hat eine wichtige Folgerung:

Folgerung 4. *Eine Zahlenfolge (a_n) der Ordnung k ist durch die ersten $k+1$ Glieder $a_1, \ldots, a_{k+1}$ eindeutig festgelegt.* ■

In der Tat wissen wir schon, dass dies für $k = 0$ (konstante Folgen) und $k = 1$ (arithmetische Folgen) der Fall ist. Andererseits wissen wir, dass die Folge (a_n) vollständig durch ihre Differenzenfolge und ihr Anfangsglied bestimmt ist. Für $k = 2$ ist die Differenzenfolge arithmetisch, also durch die ersten beiden Glieder festgelegt, woraus wir sofort schliessen, dass (a_n) durch die ersten 3 Glieder a_1, a_2, a_3 festgelegt ist. Mit dem Beweisprinzip der *vollständigen Induktion*, das wir später genauer kennenlernen werden, lässt sich nun wie folgt weiterschliessen: Wir nehmen an, die Behauptung sei schon für Folgen der Ordnung $\leq k-1$ verifiziert. Dann ist die Differenzenfolge durch ihre ersten k Glieder bestimmt, also die Folge (a_n) durch ihre ersten $k+1$ Glieder.

Dass man zur Bestimmung einer Folge der Ordnung k auch mindestens $k+1$ Folgenglieder benötigt, zeigt die Folge

$$a_n := (n-1)(n-2)(n-3) = n^3 - 6n^2 + 11n - 6$$

der Ordnung $k = 3$, deren erste 3 Glieder

$$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

verschwinden. Sie reichen also nicht zur vollständigen Bestimmung der Folge aus.

Zurück zur Folge (F5)

Nach diesem theoretischen Exkurs werfen wir noch einmal einen Blick auf die Folge (F5):

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -1, \quad a_5 = 0.$$

Sukzessives Bilden der Differenzenfolgen führt zu:
$(\Delta a)_n :\ 1, -1, -1, 1$
$(\Delta\Delta a)_n :\ -2, 0, 2$ (der Anfang einer arithmetischen Folge)
$(\Delta\Delta\Delta a)_n :\ 2, 2,$ (der Anfang einer konstanten Folge).
Mit Satz 3 im Hintergrund liegt es also nahe zu schliessen, dass die Folge (a_n) polynomial vom Grad 3 ist, also durch ihre ersten 4 Glieder $0, 1, 0, -1$ eindeutig bestimmt. Mit dieser Information ist es nicht mehr schwer die Folge fortzusetzen. Aus

$$(\Delta\Delta a)_n = -2, 0, 2, 4, 6, 8, \ldots$$

folgt

$$(\Delta a)_n = 1, -1, -1, 1, 5, 11, 19, \ldots$$

und damit

$$a_n = 0, 1, 0, -1, 0, 5, 16, 35, \ldots$$

Wer hätte das erraten?

Eine explizite Formel ist gegeben durch

$$a_n = \frac{1}{3}(n-1)(n-3)(n-5) = \frac{1}{3}n^3 - 3n^2 + \frac{23}{3}n - 5$$

(Nachweis!). Wir sehen also, dass es notwendig ist, a priori Information über das Bildungsgesetz der Folge zu haben, um aus den ersten 5 Folgengliedern auf den Rest der Folge schließen zu können.

Anhang: Binomialkoeffizienten und Bernoulli-Zahlen

Definition 5. Für $n, k \in \mathbb{N}$ definieren wir die *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \quad , \quad \binom{n}{0} := 1,$$

die sicher jeder schon einmal in der Schule gesehen hat (Pascalsches Dreieck!). ■

Denken wir uns k fest, so erhalten wir durch

$$a_n := \binom{n}{k}$$

insbesondere eine polynomiale Zahlenfolge (ganzer Zahlen!) vom Grad k, deren erste $k-1$ Glieder verschwinden (vgl. Satz 3).

In der Algebra treten die Binomialkoeffizienten sehr natürlich in der allgemeinen binomischen Formel auf:

$$\begin{aligned}
&(x+y)^n \\
&= x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} y + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 + \ldots + \binom{n}{n-2} x^2 y^{n-2} + \binom{n}{n-1} x^1 y^{n-1} + y^n \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j .
\end{aligned}$$

Wir werden später mehrere Methoden zum Beweis dieser Formel kennenlernen.

Sie zeigt uns insbesondere die Relation:

$$(n+1)^k - n^k = \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} n^j, \tag{1}$$

und hieraus leitet man leicht ab, dass für jede polynomiale Folge (a_n) vom Grad k die zugehörige Differenzenfolge den Grad $k-1$ besitzt, denn die rechte Seite von (1) ist eine Summe von Potenzen von n, deren Grad durchweg kleiner als k ist. Mit diesem Argument kann man also eine Hälfte von Satz 3 beweisen.

Für die andere Hälfte hat man einzusehen, dass für jedes k die durch

$$s_n^{(k)} := 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k = \sum_{j=1}^{n} j^k$$

definierte Folge $(s_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}}$ polynomial vom Grad $k+1$ ist.

Für $k = 1$ haben wir das schon in unserem Beweis von Satz 1 gesehen:

$$s_n^{(1)} = \frac{1}{2}(n+1)n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}n^2.$$

Definition 6. Wir definieren die *Bernoulli-Zahlen*[1] $B_0, B_1, B_2, \ldots$ rekursiv durch

$$B_0 := 1, \qquad B_k := -\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k-1} B_j \binom{k+1}{j}. \qquad \blacksquare$$

Mit dieser Rekursionsformel kann man die Bernoulli-Zahlen nach und nach berechnen:

$$B_1 = -\frac{1}{2}B_0\binom{2}{0} = -\frac{1}{2},$$

$$B_2 = -\frac{1}{3}\Big(\binom{3}{0} - \frac{1}{2}\binom{3}{1}\Big) = -\frac{1}{3}(1 - \frac{3}{2}) = \frac{1}{6},$$

$$B_3 = -\frac{1}{4}\Big(\binom{4}{0} - \frac{1}{2}\binom{4}{1} + \frac{1}{6}\binom{4}{2}\Big) = -\frac{1}{4}(1 - 2 + 1) = 0,$$

$$B_4 = -\frac{1}{5}\Big(\binom{5}{0} - \frac{1}{2}\binom{5}{1} + \frac{1}{6}\binom{5}{2}\Big) = -\frac{1}{5}(1 - \frac{5}{2} + \frac{10}{6}) = \frac{1}{30}.$$

Mit Hilfe der Bernoulli-Zahlen kann man nun folgende Summenformel beweisen:

$$s_{n-1}^{(k)} = \sum_{j=1}^{n-1} j^k = \frac{1}{k+1}\sum_{i=1}^{k+1} B_{k+1-i}\binom{k+1}{i} n^i.$$

Für $k = 2$ ergibt sich hiermit zum Beispiel

$$\begin{aligned} s_n^{(2)} &= \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} B_{3-i}\binom{3}{i}(n+1)^i = \frac{1}{3}\Big((n+1)^3 - \frac{3}{2}(n+1)^2 + \frac{1}{2}(n+1)\Big) \\ &= \frac{(n+1)}{6}\Big(2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1\Big) = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

Für $k = 3$ erhalten wir analog

$$s_n^{(3)} = \frac{1}{4}\Big((n+1)^4 - 2(n+1)^3 + (n+1)^2\Big) = \frac{(n+1)^2 n^2}{4} = (s_n^{(1)})^2,$$

also

$$1 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2.$$

Die Summenformel, kombiniert mit der Rekonstruktionsformel, zeigt uns nun ganz allgemein, dass für jede Zahlenfolge a_n, deren Differenzenfolge $(\Delta a)_n$ polynomial vom Grad k ist, die Folge selbst polynomial vom Grad $k+1$ ist. Diese Argumente, die wir hier nur skizziert haben, führen zu einem Beweis von Satz 3.

[1] Jacob Bernoulli (1654–1705), Schweizer Mathematiker und Physiker in Basel.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die Summe der ersten n ungeraden Zahlen immer eine Quadratzahl ist. ■

$$\begin{aligned} 1 &= 1^2 \\ 1+3 &= 2^2 \\ 1+3+5 &= 3^2 \\ 1+3+5+7 &= 4^2 \end{aligned}$$

Wir haben aber auch

$$\begin{aligned} 1 &= 1^3 \\ 3+5 &= 2^3 \\ 7+9+11 &= 3^3 \\ 13+15+17+19 &= 4^3. \end{aligned}$$

Abstrahieren wir von diesen Beispielen, ergibt sich die folgende Aufgabe:

Aufgabe 2. Verifizieren Sie die Formel

$$n^3 = \sum_{i=0}^{n-1} n^2 - (n-1) + 2i.$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Summe der ersten $\binom{n}{2}$ ungeraden Zahlen mit $1 + 2^2 + \ldots + n^3$ übereinstimmt. ■