# Kapitel 0

# Vorbemerkungen zur Mathematik J. Hilgert (Paderborn)

## 0.1 Vom Wesen der Mathematik

Man kann Mathematik als eine Verfeinerung der Alltagssprache auffassen. Sie dient dazu, beobachtbare Vorgänge so präzise zu beschreiben, dass es möglich wird, Gesetzmäßigkeiten zu erkennen. Die Entdeckung der Newtonschen Gesetze der Mechanik, die die Planetenbewegungen ebenso bestimmen wie die Flugbahn eines Satelliten, ist ohne eine mathematische Formulierung kaum denkbar. Mathematische Beschreibungen sollten nicht als Abbilder, sondern als Modelle betrachtet werden und sind daher nicht durch die Situation festgelegt. Man braucht etwas Mathematik, um ein Wahlergebnis statistisch so aufzubereiten, dass man es auf einer Zeitungsseite wiedergeben kann; die präzisen Hochrechnungen aus relativ wenigen ausgezählten Wahlkreisen zu erhalten, erfordert jedoch sehr viel mehr mathematischen Aufwand.

An den obigen Beispielen kann man zwei Funktionen der Mathematik ablesen: Modellierung und Prognose. Die Newtonsche Mechanik ist das mathematische Modell für die Bewegung massiver Gegenstände und es ist Aufgabe der Mathematik, Flugbahnen vorherzuberechnen.

Die Modellierung ist eine Aufgabe, die nicht von der Mathematik oder dem Mathematiker allein geleistet werden kann. Es ist Fachwissen in den Disziplinen nötig, in deren Zuständigkeit das zu beschreibende System fällt. Daher kommen Modellierungsprobleme in Mathematikbüchern meist nur am Rande vor.

In der Regel beinhaltet ein mathematisches Modell gesetzmäßige Zusammenhänge zwischen verschiedenen Eigenschaften des Systems. So sind zum Beispiel Spannung und Stromstärke in einem Stromkreis über eine Materialeigenschaft, den Widerstand, gekoppelt. Kennt man zwei dieser Größen, kann man die dritte berechnen. Für den Mathematiker bedeutet „Prognose“ sehr oft das Herausrechnen einer unbekannten Größe aus einer Reihe von bekannten Größen. Die zentrale Problemstellung der Mathematik wird daher gern als das „Lösen von Gleichungen“ beschrieben.

Das Lösen von Gleichungen ist keineswegs ein Automatismus. Die meisten Gleichungen lassen sich nicht explizit lösen, und auch einfachen Gleichungen ist normalerweise nicht anzusehen, ob sie überhaupt eine Lösung haben. Man prüft z.B. leicht nach, dass die Gleichung

$$x^2 + y^2 = z^2$$

in den Unbekannten $x, y, z$ von $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ gelöst wird. Eine solche ganzzahlige Lösung dieser Gleichung heißt ein pythagoräisches Zahlentripel. Mit etwas elementarer Geometrie kann man ein Konstruktionsverfahren angeben, wie man alle pythagoräischen Zahlentripel findet. Für die Fermatsche Gleichung

$$x^n + y^n = z^n$$

in den Unbekannten $x, y, z$ mit einer vorgegebenen natürlichen Zahl $n > 2$ dagegen gibt es keine positiven ganzzahligen Lösungen. Das war von P. Fermat (1601–1665) behauptet worden, aber es bedurfte dreihundert Jahre intensiver mathematischer Forschung, dies 1996 zu beweisen.

Mathematik ist also mehr als nur eine sprachliche Lupe. Losgelöst von der Modellierung beobachteter Phänomene schafft sie sich eine eigene Begriffswelt und Werkzeuge, mit denen man diese Begriffswelt untersuchen kann. Der Versuch Gleichungen zu lösen hat viele neue mathematische Entwicklungen in Gang gesetzt, aber den Begriffen und Techniken, die heute zum Repertoir des Mathematikers gehören, ist diese Abstammung oft nicht mehr anzusehen.

**Beispiel 0.1.1 (Die Entwicklung des Zahlbegriffs):**
In den **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N}$: $1, 2, 3, \ldots$ findet man keine Lösung der Gleichung

$$x + 1 = 1.$$

Nimmt man die **Null** hinzu, so findet man zwar hierfür eine Lösung, nicht aber für die Gleichung

$$x + 1 = 0.$$

Dafür braucht man die **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$: $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$, die wiederum nicht ausreichen, um die Gleichung

$$2x + 1 = 0$$

zu lösen. Zu desem Zweck führt man die **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$: $\frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ ein. Schon die alten Griechen wußten, in den rationalen Zahlen die Gleichung

$$x^2 = 2$$

nicht lösbar ist. Man führt die **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$ als „Grenzwerte“ von rationalen Zahlen (z.B. unendliche Dezimalbrüche) ein und stößt wieder an eine Grenze: Die Gleichung

$$x^2 = -1$$

ist nicht lösbar in $\mathbb{R}$. Wenn man schließlich die **komplexen Zahlen** $\mathbb{C}$ als Paare $(a, b)$ reeller Zahlen mit

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b') \quad \text{und} \quad (a, b)(a', b') = (aa' - bb', ab' + ba')$$

als Addition und Multiplikation einführt, so lässt sich der **Fundamentalsatz der Algebra** beweisen:

**Satz:** *Im Körper* $\mathbb{C}$ *sind alle* **Polynomgleichungen***, d.h. Gleichungen der Form*

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \quad a_0, \ldots, a_k \in \mathbb{C},$$

*lösbar.*

Analysiert man die Vorgehensweise, so findet man folgende Prinzipien, die auch in anderen Situationen zum Einsatz kommen:

- Man schafft den richtigen Rahmen für ein Problem (hier das Lösen von Polynomgleichungen).
- Der Lösungsbegriff wird verallgemeinert (Lösung in welchem Zahlbereich?).
- Später kann man dann immer noch die Frage stellen, ob es eine Lösung in einem kleineren Zahlbereich gegeben hat, wie z.B: im Fermatschen Problem:

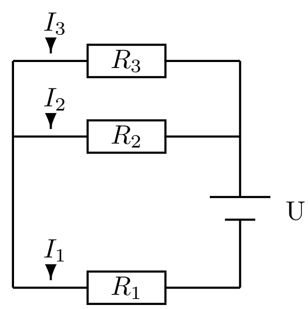
$$x^n + y^n = z^n \text{ für ganzzahlige } x, y, z.$$

## 0.2 Über die Abstraktion in der Mathematik

Der grundlegende Ansatz der modernen Mathematik ist es, Dinge über ihre Eigenschaften zu beschreiben und sich dabei möglichst auf diejenigen Eigenschaften zu beschränken, die für die zu behandelnde Frage wirklich relevant sind. Wenn man die Umlaufbahn eines Raumgleiters beschreiben will, dann betrachtet man ihn als einen bewegten Punkt (den Schwerpunkt). Will man ihn von einer Umlaufbahn ihn eine andere steuern, muß man ihn als dreidimensionales Objekt auffassen mit ausgezeichneten Richtungen, in die die Steuerraketen Schub ausüben. Beim Andocken an eine Raumstation spielt die genaue Form des Gleiters eine Rolle, und beim Eintauchen in die Atmosphäre auch noch die Hitzebeständigkeit des Materials. Diese Abstraktion vom Raumgleiter auf ein Objekt mit einigen klar festgelegten Eigenschaften erleichtert es, Ähnlichkeiten mit in anderen Zusammenhängen gefundenen Beschreibungen und Lösungen zu erkennen und zu benützen. Bewegte Massepunkte modellieren auch Wurfgeschosse oder Planeten, in der Aerodynamik von Tragflächen verfügt man über eine lange Erfahrung, und die Hitzebeständigkeit von Kacheln betrachtet man auch nicht erst seit dem Eintritt ins Raumfahrtzeitalter.

Da der hohe Abstraktionsgrad für viele die höchste Hürde im Studium der Mathematik ist, soll die Bedeutung der Abstraktion für die Mathematik hier an einer Reihe von Beispielen noch näher erläutert werden. Zuerst geht es um den Übergang von konkreten Modellen zu abstrakten Methoden:

**Beispiel 0.2.1 (Stromkreise):** Betrachte einen Stromkreis mit einer Spannungsquelle $U$ und drei Widerständen $R_1, R_2, R_3$:




Der Zusammenhang zwischen der Spannung $U$, den Widerständen $R_1, R_2, R_3$ und den resultierenden Stromstärken $I_1, I_2, I_3$ ist durch die **Kirchhoffschen Gesetze** gegeben, die hier folgende Gleichungen erzwingen:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_2 + I_3 \\ U &= R_1 I_1 + R_2 I_2 \\ R_2 I_2 &= R_3 I_3 \end{aligned}$$

Dabei sind Spannung und Widerstände bekannt und die Stromstärken zu berechnen.

Man kann das machen, indem man eine Gleichung nach einer der gesuchten Größen auflöst, das Ergebnis in die anderen Gleichungen einsetzt und so die Zahl der Gleichungen und der Unbekannten um Eins reduziert hat. Dieses Verfahren wiederholt man und löst die letzte Gleichung nach der einzig verbliebenen Unbekannten auf. Dann setzt man das Ergebnis wieder in die anderen Gleichungen ein und findet so sukzessive auch die anderen Unbekannten.

Im physikalisch gesehen realistischen Fall $R_1, R_2, R_3 > 0$ findet man so

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{R_3}{R_2} I_3 \\
I_1 &= I_2 + I_3 = (\frac{R_3}{R_2} + 1) I_3 = (1 + \frac{R_2}{R_3}) I_2 \\
U &= \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_3R_2}{R_2} I_3 \\
I_3 &= \frac{R_2 U}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} \\
I_2 &= \frac{R_3 U}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} \\
I_1 &= \frac{(R_2 + R_3) U}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}.
\end{aligned}$$

Wir können also feststellen:

- Wir haben die Gleichung gelöst.
- Die Lösung war nicht wirklich algorithmisch, d.h. automatisierbar, weil wir nicht vorgeschrieben haben, welche Gleichung nach welcher Unbekannten aufgelöst werden soll.
- Für jeden Schaltkreis müssten wir uns neu entscheiden, wie wir die Gleichungen lösen wollen.

■

**Beispiel 0.2.2 (Produktionsmodell):** Betrachten wir ein Produktionssystem bestehend aus drei Produzenten mit je einem Produkt, das nach außen (an den Markt) und untereinander (zur Ermöglichung der Produktion) geliefert wird. Mit $x_1, x_2, x_3$ werden die produzierten Mengen (einheitlich gemessen z.B. in Geldwert) bezeichnet. **Annahme:** Die von $i$ an $j$ gelieferte Menge ist proportional zu der von $j$ produzierten Menge: $a_{ij}x_j$. Sei $y_i$ die Nachfrage des Marktes nach dem Produkt von $i$. Ziel ist dann (nach **Leontief**) die Herstellung des folgenden Gleichgewichts von Produktion und Nachfrage.

Es ergeben sich folgende Gleichungen

$$\begin{aligned}
y_1 &= x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \\
y_2 &= x_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \\
y_3 &= x_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2
\end{aligned}$$

■

Wir vergleichen die Gleichungen der beiden Beispiele und formen sie etwas um, damit die Analogien deutlicher werden:

$$\begin{array}{rcl}
I_1 &=& I_2 + I_3 \\
U &=& R_1 I_1 + R_2 I_2 \\
R_2 I_2 &=& R_3 I_3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
y_1 &=& x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \\
y_2 &=& x_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 \\
y_3 &=& x_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2
\end{array}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{array}{rcl}
I_1 + (-1)I_2 + (-1)I_3 &=& 0 \\
R_1I_1 + R_2I_2 + 0I_3 &=& U \\
0 + R_2I_2 + (-1)R_3I_3 &=& 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rcl}
x_1 + (-a_{12})x_2 + (-a_{13})x_3 &=& y_1 \\
(-a_{21})x_1 + x_2 + (-a_{23})x_3 &=& y_2 \\
(-a_{31})x_1 + (-a_{32})x_2 + x_3 &=& y_3
\end{array}$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ R_1 & R_2 & 0 & U \\ 0 & R_2 & -R_3 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc|c} 1 & -a_{12} & -a_{13} & y_1 \\ -a_{21} & 1 & -a_{23} & y_2 \\ -a_{31} & -a_{32} & 1 & y_3 \end{array}$$

Die resultierenden Zahlenschemata nennt man **Matrizen** und durch eine systematisierte Variante des sukzessiven Variableneliminierens von oben (dem **Gauß-Algorithmus**) kann man daraus die Unbekannten bestimmen. Wir stellen fest:

- Mit dem Übergang von den Gleichungen zu den Matrizen hat man nur redundante Information aus den Gleichungen entfernt und gleichzeitig die Übersichtlichkeit erhöht.
- Die Anzahl der Gleichungen und der Unbekannten ist für das Vorgehen hier völlig unerheblich und in den Anwendungen kommen durchaus Gleichungssysteme mit mehr als 10000 Variablen vor.
- An dieser Stelle ist nichts darüber gesagt worden, welche Rolle die resultierende mathematische Struktur bei der Auswahl der mathematischen Modelle gespielt hat (in der Physik gibt es da natürlich weniger Optionen als in der Ökonomie).

Als nächstes betrachten wir einige Beispiel dafür, wie man aus konkreten Problemen in natürlicher Weise auf abstrakte (algebraische) Strukturen geführt wird:

**Beispiel 0.2.3 (Teilbarkeitsregeln):** Wir beginnen mit der Frage: Gibt es eine Teilbarkeitsregel für 7?

Eine Zahl ist durch 7 teilbar, wenn sie bei Teilung durch 7 den Rest 0 liefert. Es liegt also nahe, von jeder Zahl $z$ den Rest $r$ zu betrachten, der sich ergibt, wenn man durch 7 teilt. Man schreibt dann

$$z \equiv r \mod 7$$

und spricht vom Teilen mit Rest **modulo** 7. Wir schreiben unsere Zahlen im Zehnersystem und an dieser Darstellung wollen wir die Teilbarkeit durch 7 ablesen. Es ist also nicht abwegig, zunächst die Reste modulo 7 der Zehnerpotenzen zu berechnen:

$$\begin{array}{rcl|rcl} 1 & = & 1 \equiv 1 \mod 7 & 1 & = & 0+1 \\ 10 & = & 10 \times 1 \equiv 3 \times 1 \mod 7 \equiv 3 \mod 7 & 10 & = & 7+3 \\ 100 & = & 10 \times 10 \equiv 3 \times 3 \mod 7 \equiv 2 \mod 7 & 100 & = & 98+2 \\ 1000 & = & 10 \times 100 \equiv 3 \times 2 \mod 7 \equiv 6 \mod 7 & 1000 & = & 994+6 \\ 10000 & = & 10 \times 1000 = 3 \times 6 \mod 7 \equiv 4 \mod 7 & 10000 & = & 9996+4 \\ 100000 & = & 10 \times 10000 \equiv 3 \times 4 \mod 7 \equiv 5 \mod 7 & 100000 & = & 99995+5 \\ 1000000 & = & 10 \times 100000 \equiv 3 \times 5 \mod 7 \equiv 1 \mod 7 & 1000000 & = & 999999+1 \end{array}$$

Ab hier wiederholen sich die Reste der Zehnerpotenzen modulo 7, weil man ja modulo 7 immer wieder mit 3 multipliziert:

$$\begin{array}{rcl} 10000000 & = & 10 \times 1000000 \equiv 3 \times 1 \mod 7 \equiv 3 \mod 7 \\ & \text{etc.} & \end{array}$$

Man schreibt jetzt eine beliebige Zahl im Zehnersystem, d.h. als gewichtete Summe von Zehnerpotenzen, z.B.

$$94328 = 9 \times 10000 + 4 \times 1000 + 3 \times 100 + 2 \times 10 + 8 \times 1$$

und rechnet die Reste modulo 7 aus:

$$94328 \mod 7 \equiv 9 \times 4 + 4 \times 6 + 3 \times 2 + 2 \times 3 + 8 \times 1 \mod 7$$

Die Zahl 94328 ist also durch 7 teilbar, wenn

$$9 \times 4 + 4 \times 6 + 3 \times 2 + 2 \times 3 + 8 \times 1$$

durch 7 teilbar ist. Wir haben also eine „gewichtete Quersummenregel“

> Man multipliziere die
>
> Einer mit 1
> Zehner mit 3
> Hunderter mit 2
> Tausender mit 6
> Zehntausender mit 4
> Hunderttausender mit 5
> und dann von vorne, etc.
>
> So erhält man eine gewichtete Quersumme. Die Zahl ist durch 7 teilbar genau dann, wenn die gewichtete Quersumme durch 7 teilbar ist.

Die Vorgehensweise läßt sich sofort auf andere Zahlen übertragen:
Teilbarkeit durch $n$

**1.Schritt:** Bestimme die „Restklassen“ modulo $n$ der 10er-Potenzen. Da es nur endlich viele Restklassen gibt, ergibt sich nach einem endlichen „Anlauf“ eine periodische Struktur:

(Bemerkung: Daß es für 7 es keinen Anlauf gibt, liegt daran, daß 7 eine Primzahl ist.)

**2.Schritt:** Schreibe eine Zahl $m$ in der Form

$$m = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_1 10 + a_0$$

und berechne die Restklasse von $m$ über die Restklassen der $a_j$ gewichtet mit den Restklassen der $10^j$.

Aus dem allgemeinen Verfahren kann man als Übung die üblichen Teilbarkeitsregeln für:

| | |
|---|---|
| 3 | (Quersumme) |
| 4 | (letzten zwei Ziffern) |
| 5 | (letzte Ziffer) |
| 8 | (letzten drei Ziffern) |
| 9 | (Quersumme) |
| 11 | (alternierende Quersumme) |

ableiten.

**Analyse der Vorgehensweise:**

- Statt mit den Zahlen selbst haben wir mit ihren Resten modulo 7 gearbeitet, d.h. Zahlen mit gleichen Resten (diese bilden die **Restklasse** modulo 7) sind in dieser Problemstellung in jeder Hinsicht gleichwertig (**äquivalent**).
- Die Aufteilung in **Äquivalenzklassen** nach dem relevanten Merkmal (Restklassen modulo 7) bringt eine drastische Reduktion der Anzahl der zu betrachtenden Objekte (von unendlich vielen auf 7).

- Wir haben die Rechenoperationen $+$ und $\times$ auf die Restklassen übertragen (das habe ich in der Tabelle der Zehnerpotenzen versteckt) und damit eine abstrakte **algebraische Struktur** eingeführt, d.h. eine **Menge** (die Restklassen) mit **Verknüpfungen** (Addition und Multiplikation; hier ergibt sich ein sogenannter **Ring**).

| $+$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 |
| 4 | 4 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 5 | 5 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 6 | 6 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |

| $\times$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 1 | 3 | 5 |
| 3 | 0 | 3 | 6 | 2 | 5 | 1 | 4 |
| 4 | 0 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |
| 5 | 0 | 5 | 3 | 1 | 6 | 4 | 2 |
| 6 | 0 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 |

- Wir haben festgestellt, daß sich die Methode von 7 auf beliebige Zahlen **verallgemeinern** läßt und es ist dann auch nicht mehr schwer, vom Zehner- auf ein beliebiges anderes System überzugehen.

■

**Beispiel 0.2.4 (Symmetrie):**
Betrachte die regelmäßigen Vielecke

Es stellt sich die Frage, wie man die augenfälligen Symmetrie-Eigenschaften dieser Figuren präzise beschreiben kann. Hier ist eine erste Antwort: **Symmetrie** ist eine Bewegung, die die Figur mit sich selbst zur Deckung bringt (z.B. Spiegelung oder Rotation). Solche Symmetrien kann man hintereinanderschalten und erhält wieder eine algebraische Struktur (hier ist es eine **Gruppe**)

Es ist allerdings nicht wirklich klar, was eine Bewegung ist und damit ist der Begriff Symmetrie etwas vage gelassen. Abhilfe schafft hier der Begriff der **Abbildung**, ein Begriff, der in Mathematik absolut zentral ist:

Wenn $A$ und $B$ zwei Mengen (von irgendwelchen Objekten, z.B. Punkten auf einem Vieleck) sind, dann ist eine Abbildung $f\colon A \to B$ eine Vorschrift, jedem Element von $A$ ein Element von $B$ zuzuordnen. Dies ist eine Abstraktion der Vorstellungen „Vergleichen“ (von $A$ und $B$ z.B. durch Übereinanderlegen) und „Messen“ (von $A$ durch $B$ z.B. durch Anlegen eines Maßstabs oder durch Zuordnung einer Zahl).

Jetzt läßt sich eine präzisere Definition von Symmetrie formulieren: Eine Symmetrie von $A$ ist eine Abbildung $f\colon A \to A$, für die jedes Element von $A$ als Bild von genau einem Element von $A$ auftaucht (jedes Element wird von genau einem Pfeil getroffen). An dieser Stelle kann man dann noch Zusatzforderungen stellen (z.B. Geraden auf Geraden, Winkel sollen erhalten bleiben, die Figuren sollen nicht zerrissen werden, etc.)

Wenn man nur die Rotationssymmetrien des $n$-Ecks betrachtet, dann liefert $n$-malige Anwendung der Rotation um $\frac{360}{n}$ Grad (von einer Ecke auf die nächste) die Identität. Das erinnert an die $n$-fache Addition von 1 in den Restklassen modulo $n$ aus Beispiel 0.2.3. Vergleichen wir

- Die Rotationen $R_k$ des $n$-Ecks um $k \times \frac{360}{n}$ Grad mit der Hintereinanderausführung

und

- Die Restklassen $[k] = \{m \mid m \equiv k \mod n\}$ modulo $n$ mit der Addition, so finden wir eine Korrespondenz

$$R_k \longleftrightarrow [k],$$

die zusätzlich

$$R_k \circ R_{k'} = [k] + [k']$$

erfüllt ($\circ$ bezeichnet die Hintereinanderausführung). Man sagt, die beiden Strukturen sind **isomorph** (hier als Gruppen) und stellt fest, daß Aussagen, die die Verknüpfungen betreffen, mit dieser Isomorphie von einer zur anderen Struktur einfach transferiert werden können. ■