III. Konvergenz von Folgen und Reihen

Durch die Betragsfunktion erhalten wir auf den reellen Zahlen einen Abstandsbegriff. Hierdurch erhalten die reellen Zahlen eine metrische Struktur, und wir können Konvergenz und Grenzwerte von Folgen, Reihen und Funktionen sowie die Stetigkeit von Funktionen untersuchen. Die Begriffe der Konvergenz einer Folge und der Stetigkeit einer Funktion sind grundlegend für die gesamte Analysis.

III.1. Die Betragsfunktion — metrische Räume

Wir erinnern uns daran, dass wir uns $\mathbb{R}$ als Teilmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ denken. In diesem Sinn haben wir für eine reelle Zahl x

$$|x| = \sqrt{x\overline{x}} = \sqrt{x^2} = \max\{x, -x\}.$$

Satz III.1.1. (Rechenregeln für den Betrag) *Es gelten für* $z, w \in \mathbb{C}$*:*

(1) $|0| = 0$ *und* $|z| > 0$ *für* $z \neq 0$.

(2) $|zw| = |z| \cdot |w|$ *und* $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$, *falls* $w \neq 0$.

(3) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (*Subadditivität*).

(4) $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

Beweis. (1) Die Beziehung $|0| = 0$ ist trivial. Ist $z \neq 0$, so ist $\operatorname{Re} z \neq 0$ oder $\operatorname{Im} z \neq 0$. Also ist $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 > 0$ und somit $|z| > 0$.

(2) Aus Lemma II.2.26(iii) erhalten wir $|zw| = |z| \cdot |w|$. Ist $z \neq 0$, so folgt hieraus $1 = |1| = |z| \cdot |z^{-1}|$, also $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$. Hieraus folgt $|\frac{z}{w}| = |z||w^{-1}| = \frac{|z|}{|w|}$.

(3) Wir haben

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{w} + w\overline{z} + z\overline{w} \\
&= |z|^2 + |w|^2 + \overline{z\overline{w}} + z\overline{w} = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \\
&\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus der Eindeutigkeit von Quadratwurzeln nichtnegativer Zahlen.

(4) Aus (3) erhalten wir

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w| = |z - w| + |w|$$

und analog $|w| \leq |z - w| + |z|$. Somit haben wir $|z| - |w| \leq |z - w|$ und $|w| - |z| \leq |z - w|$, also $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$. ∎

Definition III.1.2. Sei X eine Menge. Eine Funktion $d : X \times X \to [0, \infty[$ heißt *Metrik auf X,* falls für alle $x, y, z \in X$ gelten:

(M1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Die Zahl $d(x, y)$ heißt *Abstand von x und y*; das Paar (X, d) heißt *metrischer Raum.* ∎

Aufgabe III.1.1. Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum (X, d) gilt:

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) \quad \text{für alle } x, y, z \in X.$$ ∎

Satz III.1.3. *Die Funktion*

$$d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to [0, \infty[, \quad d(x, y) := |x - y|$$

ist eine Metrik auf $\mathbb{C}$.

Beweis. Mit Satz III.1.1 prüfen wir die Axiome (M1), (M2) und (M3) nach:
(M1) $d(x, y) = |x - y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$.
(M2) $d(x, y) = |x - y| = |-(x - y)| = |y - x| = d(y, x)$.
(M3) $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$.
Hierbei haben wir die Subadditivität des Betrags $|\cdot|$ verwendet. ∎

Im folgenden denken wir uns jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}$ mit der durch $d(z, w) := |z - w|$ definierten Metrik ausgestattet. Insbesondere erhalten wir dadurch eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

Definition III.1.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Für $p \in X$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(p) := \{x \in X : d(x, p) < \varepsilon\}$$

die *ε-Umgebung von p* oder *offene Kugel vom Radius ε um p.*

(b) Eine *Umgebung von p* ist eine Teilmenge $U \subseteq X$, für die ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq U$ existiert.

(c) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt *offen*, wenn U Umgebung aller Punkte $p \in U$ ist.

(d) Eine Teilmenge $F \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus F$ offen ist. ∎

Beispiel III.1.5. (a) Im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$ mit $d(x,y) = |x-y|$ erhalten wir für $\varepsilon > 0$ und $p \in \mathbb{R}$

$$U_\varepsilon(p) =]\,p - \varepsilon, p + \varepsilon\,[,$$

denn

$$\begin{aligned} |x-p| < \varepsilon &\iff \max\{x-p, p-x\} < \varepsilon \\ &\iff (x - p < \varepsilon) \wedge (p - x < \varepsilon) \\ &\iff (x < p + \varepsilon) \wedge (x > p - \varepsilon) \\ &\iff x \in]\,p - \varepsilon, p + \varepsilon\,[. \end{aligned}$$

(b) Für $X = \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ und $p = a + ib \in \mathbb{C}$ ist

$$U_\varepsilon(p) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - p| < \varepsilon\} = \{x + iy \in \mathbb{C} \colon (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2\}.$$

Identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit der Ebene $\mathbb{R}^2$, so ist dies eine Kreisscheibe vom Radius ε um den Punkt (a,b).

(c) Es seien $a, b, c \in \mathbb{C}$. Betrachten wir das Dreieck mit den Ecken a, b, c in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, so sind $d(a,b) = |a-b|$ etc. die Längen der Seiten des Dreiecks. In diesem Sinn besagt die Dreiecksungleichung, dass die Summe der Längen der Seiten ab und bc mindestens so groß ist wie die Länge der Seite ac. Daher kommt der Name Dreiecksungleichung. ∎

Lemma III.1.6. *In einem metrischen Raum (X,d) sind die offenen Kugeln $U_r(p)$ offen im Sinne von Definition III.1.4.*

Beweis. Ist $x \in U_r(p)$, so ist nach Definition $d(x,p) < r$. Sei $\varepsilon := r - d(x,p)$. Wir zeigen $U_\varepsilon(x) \subseteq U_r(p)$, d.h., $U_r(p)$ ist Umgebung von x. Sei also $y \in U_\varepsilon(x)$. Dann ist $d(p,y) \leq d(p,x) + d(x,y) < d(p,x) + \varepsilon = r$, also $y \in U_r(p)$. Folglich ist $U_\varepsilon(x) \subseteq U_r(p)$. Somit ist $U_r(p)$ Umgebung aller seiner Punkte, also nach Definition offen. ∎

Satz III.1.7. (Eigenschaften offener Mengen) *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gelten folgende Aussagen:*

(O1) *Die Mengen $\emptyset$ und X sind offen.*

(O2) *Sind $U_1, \ldots, U_n$ offene Mengen, so ist auch $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ offen.*

(O3) *Ist $(U_j)_{j \in J}$ eine Familie offener Mengen, so ist auch $\bigcup\limits_{j \in J} U_j$ offen.*

Beweis. (O1) ist klar.
(O2) Sei $x \in U_1 \cap \ldots \cap U_n$. Dann existiert für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ein $\varepsilon_j > 0$ mit $U_{\varepsilon_j}(x) \subseteq U_j$. Für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ gilt daher $U_\varepsilon(x) \subseteq \bigcap_{j=1}^n U_j$.
(O3) Sei $x \in \bigcup_{j \in J} U_j$. Dann existiert ein $j_0 \in J$ mit $x \in U_{j_0}$. Weiter existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $U_{\varepsilon_0}(x) \subseteq U_{j_0}$. Also ist $U_{\varepsilon_0}(x) \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$. ∎

Aufgabe III.1.2. (a) Sei X eine Menge und $f \colon X \to]0, \infty[$ eine Funktion. Dann wird durch

$$d(x,y) := \begin{cases} f(x) + f(y) & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$$

eine Metrik auf X definiert.

Nimmt man noch einen Punkt P hinzu und setzt $d(P,P) = 0$ sowie $d(x,P) = d(P,x) = f(x)$, so erhält man eine Metrik auf $X' := X \cup \{P\}$.

Die Metrik auf $X \cup \{P\}$ wird „französische Eisenbahnmetrik" genannt. Hierbei spielt P die Rolle von Paris und $f(x)$ ist die Entfernung von Paris. Um von x nach y zu kommen, muss man den Umweg um P nehmen, so dass sich als Entfernung $f(x) + f(y)$ ergibt.

(b) (Die diskrete Metrik) Sei X eine Menge. Dann wird durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$$

eine Metrik auf X definiert. ■

Aufgabe III.1.3. Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum (X,d) jede der Mengen

$$\{x \in X \colon d(x,p) \leq r\}, \quad p \in X, r \in \mathbb{R},$$

abgeschlossen ist. ■

III.2. Zahlenfolgen

In diesem Abschnitt lernen wir den Grenzwertbegriff für Folgen in metrischen Räumen kennen.

Definition III.2.1. Sei X eine Menge. Eine *Folge in X* ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to X, \ n \mapsto a_n.$$

Wir bezeichnen sie auch durch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder durch $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Unter einer *Zahlenfolge* verstehen wir eine Folge komplexer Zahlen, d.h. $X = \mathbb{C}$. ■

Beispiel III.2.2. Wir betrachten einige Beispiele von Zahlenfolgen:

(1) $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$.
(2) $(\frac{n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$.
(3) Für $z \in \mathbb{C}$ heißt $(z^n)_{n\in\mathbb{N}} = z, z^2, z^3, z^4, \ldots$ *geometrische Folge.*
(4) $(\frac{n}{2^n})_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \ldots$.
(5) Die *Fibonacci-Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird durch die Vorschrift

$$f_1 := 1, \quad f_2 := 1$$
$$f_n := f_{n-1} + f_{n-2} \ (n \geq 3),$$

rekursiv definiert; also $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$. ■

Wir kommen nun zu einem zentralen Begriff der Analysis.

Definition III.2.3. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt *konvergent gegen* $p \in X$, geschrieben

$$a_n \to p \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = p,$$

falls folgendes gilt:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N_\varepsilon)\ d(a_n, p) < \varepsilon.$$

Für $X = \mathbb{C}$ erhält man speziell:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N_\varepsilon)\ |a_n - p| < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Man beachte: Gilt $d(a_n,p) < \varepsilon$, so gilt auch $d(a_n,p) < \varepsilon_1$ für alle $\varepsilon \leq \varepsilon_1$. Für den Nachweis der Konvergenz einer Folge reicht es also aus, beliebig kleine ε zu betrachten, z.B. folgt aus

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists N_m \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_m)\ d(a_n,p) < \frac{1}{m}$$

die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen p (Nachweis! Hinweis: Satz von Archimedes).

Man gebraucht für die Aussage „ $a_n \to p$ “ noch andere Formulierungen, so zum Beispiel: „Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $a_n \in U_\varepsilon(p)$ für *fast alle* $n \in \mathbb{N}$ “, wobei man „fast alle“ als „alle bis auf endlich viele“ liest. Oder: „Für alle $\varepsilon > 0$ gilt *schließlich* $a_n \in U_\varepsilon(p)$ “.

Definition III.2.4. Eine nicht konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum X heißt *divergent*, d.h.

$$(\forall p \in X)\ (\exists \varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n \geq N)\ d(a_n,p) \geq \varepsilon.$$

In Worten: Jedes $p \in X$ besitzt eine Umgebung $U_\varepsilon(p)$, außerhalb derer unendlich viele Folgenglieder liegen. Man rufe sich an dieser Stelle in Erinnerung, wie man Aussagen mit Quantoren negiert und vergleiche mit der Aussage, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert:

$$(\exists p \in X)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)\ d(a_n,p) < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Beispiele III.2.5.

(1) $\frac{1}{n} \to 0$.

(2) $\frac{n}{n+1} \to 1$.

(3) Für $a \in \mathbb{C}$ konvergiert die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

(4) $\frac{n}{2^n} \to 0$.

Beweis. (1) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach dem Satz von Archimedes (Satz II.2.19) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \geq N$ ist dann $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$, also $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(2) Wegen $|1-\frac{n}{n+1}| = |\frac{n+1}{n+1} - \frac{n}{n+1}| = \frac{1}{n+1}$ und (1) existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|1-\frac{n}{n+1}| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Also gilt $\frac{n}{n+1} \to 1$.

(3) Ist $\varepsilon > 0$, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $0 = |a_n - a| < \varepsilon$ und daher $a_n \to a$.

(4) Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1 + n + \binom{n}{2} + \ldots \geq n + \tfrac{n(n-1)}{2} = \tfrac{n(n+1)}{2} \geq \tfrac{n^2}{2},$$

also $\frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{\frac{n^2}{2}} = \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$ und daher $|\frac{n}{2^n}| \leq \frac{2}{n} < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. ■

Satz III.2.6. *Eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen ist beschränkt, d.h., die Menge $\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.*

Beweis. Sei $a_n \to a$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n > N$. Damit ist $|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$ für alle $n > N$, also $|a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|, 1 + |a|\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ■

Satz III.2.7. (Die geometrische Folge) *Sei $z \in \mathbb{C}$ und $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörige geometrische Folge. Dann gilt*

$$z^n \to \begin{cases} 1, & \text{für } z = 1 \\ 0, & |z| < 1 \end{cases}$$

und die Folge ist divergent für $|z| \geq 1$ und $z \neq 1$.

Beweis. Es sind vier Fälle zu betrachten:
Fall 1: Sei $z = 1$. Dann ist $z^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h., die Folge ist konstant, also $z^n \to 1$.
Fall 2: $|z| > 1$. Dann erhalten wir mit der Bernoulli-Ungleichung

$$|z^n| = |z|^n = (1 + (|z| - 1))^n \geq 1 + n(|z| - 1).$$

Die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also nicht beschränkt (Satz von Archimedes) und daher nicht konvergent (Satz III.2.6).
Fall 3: $|z| < 1$. Ist $z = 0$, so gilt trivialerweise $z^n \to 0$. Sei also $z \neq 0$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert wegen Fall 2 ein N mit

$$|z^n|^{-1} = |z^{-1}|^n \geq 1 + n(|z^{-1}| - 1) > \frac{1}{\varepsilon}$$

für alle $n \geq N$, und wir erhalten $|z^n - 0| = |z^n| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Folglich gilt $z^n \to 0$.
Fall 4: $|z| = 1$, $z \neq 1$. Um die Divergenz der Folge zu zeigen, führen wir einen indirekten Beweis. Hierzu nehmen wir $z^n \to p$ für ein $p \in \mathbb{C}$ an. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|z^n - p| < \frac{1}{2}|z - 1|$ für alle $n \geq N$. Also ist

$$\begin{aligned} |z-1| &= |z^N||z-1| = |z^{N+1} - z^N| \leq |z^{N+1} - p| + |p - z^N| \\ &< \tfrac{1}{2}|z-1| + \tfrac{1}{2}|z-1| = |z-1|, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. ■

Bemerkung III.2.8. Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, denn dies ist eine geometrische Folge. Andererseits ist diese Folge beschränkt. Es existieren also beschränkte Folgen, die nicht konvergieren. In diesem Sinne ist die Umkehrung von Satz III.2.6 falsch. ■

Satz III.2.9. (Eindeutigkeit des Grenzwerts) *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im metrischen Raum (X,d). Gilt $a_n \to a$ und $a_n \to b$, so ist $a = b$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $d(a_n, a) < \varepsilon$ für alle $n \geq N_1$ sowie $d(a_n, b) < \varepsilon$ für alle $n \geq N_2$. Für $n \geq \max(N_1, N_2)$ gilt dann

$$d(a,b) \leq d(a,a_n) + d(a_n, b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $d(a,b) = 0$, also $a = b$. ■

Durch diesen Satz wird die Bezeichnung $\lim_{n\to\infty} a_n$ für den Grenzwert einer Folge, den man ja als ein Element von X verstehen will, erst gerechtfertigt.

Folgerung III.2.10. *Eine Folge komplexer Zahlen hat höchstens einen Grenzwert.* ■

Für divergente reelle Folgen können wir wie folgt noch etwas feiner unterscheiden, in welchem Sinne sie divergieren.

Definition III.2.11. (Bestimmte Divergenz) Für eine reelle Zahlenfolge schreiben wir

$$a_n \to \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

wenn für jedes $R > 0$ die Beziehung $a_n > R$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Analog definiert man $a_n \to -\infty$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. In diesem Fall heißt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bestimmt divergent* gegen ∞ bzw. $-\infty$. ■

Beispiel III.2.12. (a) Die Fibonaccifolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt gegen ∞. Wir zeigen hierzu durch vollständige Induktion, dass $f_n \geq n$ für $n \geq 5$ gilt. Um dies zu zeigen, beweisen wir die Aussagen

$$p_n \quad : \quad f_n \geq n \wedge f_{n-1} \geq n-1 \quad \text{für} \quad n \geq 6$$

durch vollständige Induktion.
(A) (Induktionsanfang) Für $n = 6$ ist die Behauptung wegen $f_5 = 5, f_6 = 8$ richtig.
(S) Sei also $n \geq 7$. Dann folgt aus der Induktionsannehme $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \geq n - 1 + n - 2$, da $n - 1 \geq 6$ ist. Weiter folgt

$$n - 1 + n - 2 = 2n - 3 \geq n,$$

da $n \geq 3$ ist, und damit die Behauptung.
Also gilt $f_n \geq n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, und hieraus folgt sofort die bestimmte Divergenz gegen ∞.

(b) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert nicht bestimmt gegen ∞.
(c) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = \infty$: In Beispiel III.2.5(4) haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

gezeigt. Also existiert zu jedem $R > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{2^n} < \frac{1}{R}$ für $n > N$. Dann ist $\frac{2^n}{n} > R$ für $n > N$ und daher $\frac{2^n}{n} \to \infty$. ■

Aufgabe III.2.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in dem metrischen Raum (X, d).
(a) Ist $p \in X$, so gilt $a_n \to p$ genau dann, wenn $d(a_n, p) \to 0$ gilt.
(b) Existiert eine reelle Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n \to 0$ und $d(a_n, p) \le b_n$, so gilt $a_n \to p$. ■

Grenzwertsätze für Folgen

Der folgende Satz zeigt uns, in welcher Weise Grenzwerte von Folgen mit Addition, Multiplikation und Ordnung verträglich sind. Zuerst bemerken wir, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum X schon gegen p konvergiert. wenn eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\ (\forall n \ge N_\varepsilon)\ d(a_n, p) < C\varepsilon$$

(Nachweis als Übung).

Satz III.2.13. (Grenzwertsätze für Folgen) *Für die komplexen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann gilt:*
(1) $a_n + b_n \to a + b$.
(2) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$.
(3) *Für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt $\lambda a_n + \mu b_n \to \lambda a + \mu b$.*
(4) *Ist $b \neq 0$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \ge N$, und es gilt dann $\lim_{\substack{n\to\infty\\ n\ge N}} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.*
(5) *Sind beide Folgen reell und $a_n \le b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \le b$.*
(6) *Sind $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \le a_n \le B$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $a \in [A, B]$.*

Beweis. (1) Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $a_n \to a$ und $b_n \to b$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|b_n - b| < \varepsilon$ für $n > N$. Dann haben wir für $n > N$:

$$|a_n + b_n - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| \le \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

(2) Da (a_n) nach Satz III.2.6 beschränkt ist, existiert ein $C > 0$ mit $|b|, |a_n| \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir suchen ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n \cdot b_n - ab| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$. Sei hierzu $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $|b_n - b| < \varepsilon$ und $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$ gilt. Damit erhalten wir für $n \ge N$:

$$\begin{aligned}|a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \le |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \\ &\le C\varepsilon + \varepsilon C = 2C\varepsilon.\end{aligned}$$

(3) Aus (2) folgt zunächst $\lambda a_n \to \lambda a$ und $\mu b_n \to \mu b$. Hierbei betrachten wir λ und μ als konstante Folgen. Die Behauptung folgt daher aus (1).

(4) Wir betrachten zuerst die Folge $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen $|b| > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{1}{2}|b|$ für alle $n \geq N$. Damit ist

$$|b_n| = |b_n - b + b| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0$$

für alle $n \geq N$. Insbesondere ist $b_n \neq 0$ für $n \geq N$. Weiter erhalten wir für alle $n \geq N$:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n\, b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} \leq \frac{2}{|b|^2}|b - b_n|.$$

Wir wählen nun zu $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \geq N$ mit $|b - b_n| \leq \frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}$ für alle $n \geq N_1$. Damit erhalten wir für $n \geq N_1$:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| \leq \frac{2}{|b|^2}|b_n - b| \leq \frac{2\varepsilon|b|^2}{2|b|^2} = \varepsilon.$$

Also gilt $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ und wegen (2) schließlich $\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n} \to a\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

(5) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt nach Voraussetzung $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|b_n - b| < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Für diese n haben wir

$$a \leq a_n + \varepsilon \leq b_n + \varepsilon \leq b + 2\varepsilon$$

und daher $a \leq b$, da $\varepsilon > 0$ beliebig war.

(6) Indem wir (5) auf die konstante Folge $b_n = B$ anwenden, erhalten wir $a \leq B$. Analog ergibt sich $A \leq a$. ∎

Vorsicht: Aus $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt im allgemeinen *nicht* $a < b$: So gilt für $a_n := 0$ und $b_n := \frac{1}{n}$ zwar $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber es ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Beispiel III.2.14. (Rationale Zahlenfolgen) (a) Wir betrachten die Folge

$$a_n = \frac{3n^2 + 13n}{n^2 - 2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mit Satz III.2.13(2) und Beispiel III.2.5(1) erhalten wir $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{n} \to 0$ und daher den Grenzwert

$$a_n = \frac{3 + \frac{13}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}} \to \frac{3+0}{1-0} = 3,$$

wobei wir für Zähler und Nenner jeweils Satz III.2.13(1) und dann Satz III.2.13(4) anwenden.

(b) Die gleiche Argumentation lässt sich für Folgen der Gestalt

$$a_n = \frac{x_k n^k + x_{k-1} n^{k-1} + \ldots + x_0}{y_m n^m + y_{m-1} n^{m-1} + \ldots + y_0}$$

anwenden. Hierbei sind $m, k \in \mathbb{N}$, $x_i, y_j \in \mathbb{C}$ und $x_k, y_m \neq 0$. In diesem Fall haben wir

$$a_n = n^{k-m} \frac{x_k + \frac{x_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{x_0}{n^k}}{y_m + \frac{y_{m-1}}{n} + \ldots + \frac{y_0}{n^m}}.$$

Wegen

$$x_k + \frac{x_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{x_0}{n^k} \to x_k \quad \text{und} \quad y_m + \frac{y_{m-1}}{n} + \ldots + \frac{y_0}{n^m} \to y_m$$

gilt

$$\frac{x_k + \frac{x_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{x_0}{n^k}}{y_m + \frac{y_{m-1}}{n} + \ldots + \frac{y_0}{n^m}} \to \frac{x_k}{y_m}.$$

Nun haben wir 3 Fälle zu unterscheiden.
1. Fall: $k = m$. Dann erhalten wir $a_n \to \frac{x_k}{y_m}$.
2. Fall: $k < m$. Wegen $n^{k-m} \to 0$ erhalten wir in diesem Fall $a_n \to 0$.
3. Fall: $k > m$. Dann ist die Folge a_n divergent, denn wäre dies nicht der Fall, so fänden wir ein $a \in \mathbb{C}$ mit $a_n \to a$. Hieraus erhielten wir $n^{m-k} a_n \to 0 \cdot a = 0$, im Widerspruch zu $\frac{x_k}{y_m} \neq 0$. ■

Aufgabe III.2.2. (a) Zeigen Sie: Eine komplexe Zahlenfolge

$$(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n + iy_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert genau dann gegen die komplexe Zahl $z = x + iy$, wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$ gelten. Hinweis: Verwende

$$\max(|x_n - x|, |y_n - y|) \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|.$$

(b) Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} + i\frac{n^2}{2^n+1} = 1$. ■

Aufgabe III.2.3. Wir suchen eine explizite Formel für die Fibonacci Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir gehen dabei in folgenden Schritten vor:

(1) Zuerst betrachten wir eine Folge $a_n := c\lambda^n$. Zeige: Diese Folge genügt genau dann der Rekursionsvorschrift $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \geq 1$, wenn $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ gilt.
(2) Bestimme die beiden Lösungen $\lambda_1 > \lambda_2$ der Gleichung $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.
(3) Jede Folge der Form $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ genügt der Rekursionsvorschrift $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.
(4) Zeige: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hinweis: Bestimme c_1 und c_2 in (3), so dass $a_n = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. ■

Teilfolgen

Definition III.2.15. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ eine Folge natürlicher Zahlen, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Beispiele:

(a) Für $n_k = k^2$ ist $a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots$ die Teilfolge $(a_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Wählt man $n_k = 2k-1$, so ist $a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots$ die Teilfolge $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beim Übergang zu einer Teilfolge ändert sich der Grenzwert nicht. Allgemeiner gilt der folgende Satz:

Satz III.2.16. *Sei $a_n \to a$ und $\rho\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine injektive Funktion. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_{\rho(n)} = a$.*

Beweis. Die Voraussetzung $a_n \to a$ bedeutet, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so existiert, dass

$$\{n \in \mathbb{N} \colon a_n \notin U_\varepsilon(a)\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N_\varepsilon\}.$$

Da $\rho\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv ist, gibt es höchstens N_ε Zahlen n mit $\rho(n) \leq N_\varepsilon$. Also gilt $a_{\rho(n)} \in U_\varepsilon(a)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $a_{\rho(n)} \to a$. ■

Folgerung III.2.17. *Gilt $a_n \to a$, so konvergiert auch jede Teilfolge gegen a.*

Beweis. Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge. Mit $\rho(k) = n_k$ folgt die Behauptung dann sofort aus Satz III.2.16. ■

Satz III.2.16 besagt sogar, dass auch das *Umordnen* der Folgenglieder den Grenzwert nicht ändert, z.B. gilt für $a_n \to a$ und

$$b_n := \begin{cases} a_{n-1}, & n \text{ gerade} \\ a_{n+1}, & n \text{ ungerade,} \end{cases} \qquad \text{d.h. } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = a_2, a_1, a_4, a_3, a_6, a_5, \ldots$$

die Beziehung $b_n \to a$.

Monotone Folgen

Definition III.2.18. (a) Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

$$\left.\begin{array}{l} \textit{monoton wachsend} \\ \textit{monoton fallend} \\ \textit{streng monoton wachsend} \\ \textit{streng monoton fallend} \end{array}\right\}, \text{ wenn für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } \left\{\begin{array}{l} a_n \leq a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n+1} \\ a_n < a_{n+1} \\ a_n > a_{n+1}. \end{array}\right.$$

(b) Im folgenden nennen wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben (unten) beschränkt, wenn dies für die Menge $\{a_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ der Folgeglieder der Fall ist. ■

Der folgende Satz ist ein Kernresultat der Analysis. Hier wird das Vollständigkeitsaxiom dazu verwendet, um die Existenz von Grenzwerten zu beweisen. An dieser Stelle geht also wesentlich ein, dass der Körper, mit dem wir Analysis treiben, ordnungsvollständig ist. Im Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gilt der entsprechende Satz nicht, wie zum Beispiel jede monotone Folge rationaler Zahlen zeigt, die in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert und daher in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert besitzt.

SATZ VON DER MONOTONEN KONVERGENZ

Satz III.2.19. (a) *Jede reelle monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen*

$$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) *Jede reelle monoton fallende und nach unten beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen*

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis. Wir zeigen nur (a), denn (b) erhält man, indem man (a) auf die Folge $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anwendet.

Nach Voraussetzung existiert $a := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (Vollständigkeitsaxiom). Es gilt $a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $\varepsilon > 0$, so ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke, also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N \geq a - \varepsilon$. Für $n > N$ ist dann $a - \varepsilon \leq a_N \leq a_n \leq a$; also ist $|a_n - a| < \varepsilon$. Somit gilt $a_n \to a$. ■

Beispiel III.2.20. (*Babylonisches Wurzelziehen*) Für $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die induktiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 := a + 1, \qquad a_{n+1} := a_n \cdot \left(1 + \frac{a - a_n^k}{k \cdot a_n^k}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

Sie hat die folgenden drei Eigenschaften:

$$(1)\ a_n > 0, \qquad (2)\ a_n^k \geq a, \qquad (3)\ a_{n+1} \leq a_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen dies durch vollständige Induktion nach n:
(A) $n = 1$. Dann ist (1) $a_1 = a + 1 > 0$, (2) $a_1^k = (a+1)^k \geq a + 1 > a$, und (3) $a_2 = a_1 \cdot \left(1 + \frac{a - a_1^k}{k \cdot a_1^k}\right) < a_1$, da $a_1^k > a$ ist und $\frac{a_1^k - a}{k a_1^k} < \frac{1}{k}$.
(S) Wir nehmen an, die Eigenschaften (1)-(3) gelten für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann haben wir
(1) $k \cdot a_n^k + a - a_n^k = (k-1)a_n^k + a > 0$. Damit ist $1 + \frac{a - a_n^k}{k \cdot a_n^k} > 0$ und folglich $a_{n+1} > 0$.
(2) Unter Verwendung der Bernoulli-Ungleichung rechnen wir

$$a_{n+1}^k = a_n^k \cdot \left(1 + \frac{a - a_n^k}{k \cdot a_n^k}\right)^k \geq a_n^k \cdot \left(1 + k\,\frac{a - a_n^k}{k \cdot a_n^k}\right) = a_n^k + a - a_n^k = a.$$

(3) $a_{n+2} < a_{n+1}$ folgt aus (2).

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine monoton fallende Folge, die durch 0 nach unten beschränkt ist. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz III.2.19 muss sie damit einen Grenzwert $b \in \mathbb{R}$ haben. Wie sieht dieser Grenzwert aus?

Zunächst folgt aus $a_n^k \geq a$ für alle n die Beziehung $b^k \geq a$ (Grenzwertsätze). Insbesondere ist $b > 0$. Aus

$$a_{n+1} = a_n \cdot \left(1 + \frac{a - a_n^k}{k \cdot a_n^k}\right)$$

erhalten wir durch Übergang zum Grenzwert auf beiden Seiten:

$$b = b \cdot \left(1 + \frac{a - b^k}{k \cdot b^k}\right).$$

Somit ist $1 + \frac{a-b^k}{k\cdot b^k} = 1$ und folglich $b^k = a$, d.h. $b = \sqrt[k]{a}$. ■

Häufungspunkte von Folgen

Um uns die Konvergenzeigenschaften monotoner Folgen zunutze zu machen, ist die folgende Beobachtung ein effektives Hilfsmittel.

Lemma III.2.21. *Jede reelle Folge besitzt eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Eine Stelle $n \in \mathbb{N}$ heiße *niedrig*, wenn $a_{n+k} \geq a_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Zwei Fälle treten auf.

1. Fall: Es gibt unendlich viele niedrige Stellen. Dann bilden die Folgenglieder a_n, n niedrig, eine monoton wachsende Teilfolge.

2. Fall: Es existieren nur endlich viele niedrige Stellen. Es existiert also ein $N \in \mathbb{N}$, so dass keine Stelle $n > N$ niedrig ist. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a_{n+k} < a_n$, da n nicht niedrig ist. Induktiv findet man so eine monoton fallende Teilfolge $(a_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$. ■

$\boxed{\text{Satz von Bolzano-Weierstrass}}$

Satz III.2.22. [1] [2] *Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Mit Lemma III.2.21 finden wir eine monotone Teilfolge. Diese konvergiert aufgrund ihrer Beschränktheit nach dem Satz von der monotonen Konvergenz (Satz III.2.19). ■

[1] Bernard Bolzano (1781–1848), tschechischer Philosoph und Mathematiker in Prag.
[2] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897), Mathematiker in Berlin.

Definition III.2.23. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum X, so heißt $p \in X$ *Häufungspunkt* dieser Folge, wenn eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, die gegen p konvergiert. ■

Satz III.2.24. (Häufungspunkte) *Für reelle Folgen gelten:*

(a) *Jede beschränkte reelle Folge hat einen Häufungspunkt.*

(b) *Eine konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt.*

(c) *Eine beschränkte Folge ist genau dann konvergent, wenn sie nur einen Häufungspunkt besitzt.*

(d) *Der Punkt $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn jede Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder enthält.*

Beweis. (a) Dies ist genau der Satz von Bolzano-Weierstraß.

(b) Dies ist Folgerung III.2.17 (jede Teilfolge konvergiert gegen den gleichen Grenzwert).

(c) Wegen (b) müssen wir hier nur noch zeigen, dass jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit nur einem Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Gilt nicht $a_n \to a$, so existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass unendlich viele Folgenglieder nicht in $U_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ liegen. Gilt $a_n \geq a+\varepsilon$ für unendlich viele Folgenglieder, so erhalten wir eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \geq a+\varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$, die nach (a) einen Häufungspunkt $b \geq a+\varepsilon$ besitzt; Widerspruch. Gilt $a_n \geq a+\varepsilon$ nicht für unendlich viele Folgenglieder, so gilt $a_n \leq a-\varepsilon$ für unendlich viele Folgenglieder, und man argumentiert entsprechend.

(d) Ist a ein Häufungspunkt und $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die gegen a konvergiert, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$ für alle $k \geq K_\varepsilon$. Somit enthält $U_\varepsilon(a)$ unendlich viele Folgenglieder.

Nun nehmen wir an, dass die Umgebung $U_\varepsilon(a)$ für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder enthält. Wir konstruieren rekursiv eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, indem wir zunächst a_{n_1} so wählen, dass $|a_{n_1} - a| < 1$ ist und dann zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein Folgenglied a_{n_k} wählen, für das $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$ und $n_k > n_{k-1}$ gilt. Diese Teilfolge konvergiert dann offensichtlich gegen a. ■

Im vorherigen Beweis (aber auch schon in Lemma III.2.21) haben wir die Methode der rekursiven Konstruktion einer Folge angewandt. Wir werden im Rahmen dieser Vorlesung solche Konstruktionen bedenkenlos anwenden. Es sei an dieser Stelle allerdings bemerkt, dass hier einige logische Subtilitäten lauern, die man berücksichtigen muss, wenn man die Existenz solcher Folgen auf einer formalen Ebene rechtfertigen will.

Beispiele III.2.25. (1) Die Folge $a_n = (-1)^n$ besitzt die Häufungspunkte 1 und -1, denn es gilt $a_{2n} = 1 \to 1$ und $a_{2n+1} = -1 \to -1$. Warum gibt es keine anderen Häufungspunkte?

(2) Die Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ besitzt ebenfalls die Häufungspunkte 1 und -1, denn es gilt $a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \to 1$ und $a_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \to -1$.

(3) Die Folge $a_n = n$ besitzt keinen Häufungspunkt, da jede Teilfolge unbeschränkt ist, also nicht konvergiert.

(4) Die Folge

$$a_n = \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist unbeschränkt, besitzt aber den Häufungspunkt 0, da $a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \to 0$. ■

Definition III.2.26. Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt

$$\overline{\lim}\, a_n := \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n := \inf\{x\colon a_n \leq x \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

der *Limes superior* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man überlegt sich leicht, dass $\overline{\lim}\, a_n < \infty$ äquivalent dazu ist, dass die Folge nach oben beschränkt ist, denn $\overline{\lim}\, a_n < \infty$ ist äquivalent dazu, dass ein $x \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $a_n \leq x$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann existiert auch ein $x' \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq x'$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Analog definiert man den *Limes inferior* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$\underline{\lim}\, a_n := \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n := \sup\{x\colon a_n \geq x \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}.$$ ■

Lemma III.2.27. *Ist $\overline{\lim}\, a_n \in \mathbb{R}$, so ist $\overline{\lim}\, a_n$ der größte Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entsprechend folgt aus $\underline{\lim}\, a_n > -\infty$, dass $\underline{\lim}\, a_n$ der kleinste Häufungspunkt der Folge ist.*

Beweis. Wir beweisen nur den ersten Teil. Sei $c := \overline{\lim}\, a_n$. Wir zeigen zuerst, dass c ein Häufungspunkt ist. Ist dies nicht der Fall, so existiert nach Satz III.2.24(d) ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(c) =]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ nur endlich viele Folgenglieder enhält. Andererseits gilt $a_n < c + \varepsilon$ für fast alle n. Hieraus folgt $a_n \leq c - \varepsilon$ für fast alle n. Dies ist ein Widerspruch zu $c = \overline{\lim}\, a_n$.

Wir zeigen noch, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen größeren Häufungspunkt als c haben kann. Sei dazu $d > \overline{\lim}\, a_n$. Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x < d$ und $a_n \leq x$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ (Definition des Infimums). Also enthält $U_\varepsilon(d)$ für $\varepsilon < d - x$ nur endlich viele Folgenglieder, und d ist daher kein Häufungspunkt (Satz III.2.24). ■

Beispiele. (a) $\overline{\lim}\,(-1)^n = 1$ und $\underline{\lim}\,(-1)^n = -1$.

Für die Folge $a_n := \frac{1}{n} + (-1)^n$ erhalten wir die gleichen Werte.

(b) Für die Folge $a_n = -n$ ist $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$. D.h., $-\infty$ kann auch als Limes superior einer Folge auftreten. ■

Cauchy-Folgen

In diesem Abschnitt lernen wir eine Klasse von Folgen kennen, die uns im weiteren Verlauf der Analysis immer wieder begegnen wird.

Definition III.2.28. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt *Cauchy-Folge*[1] oder *C-Folge*, wenn sie folgende Bedingung erfüllt

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\,(\forall n, m > N_\varepsilon)\; d(a_n, a_m) < \varepsilon.$$ ■

[1] Augustin Louis Cauchy (1789-1857); französischer Mathematiker

Lemma III.2.29. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Es gelte $a_n \to a$ in dem metrischen Raum (X, d). Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $d(a_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > N_\varepsilon$. Für alle $m, n > N_\varepsilon$ gilt damit wegen der Dreiecksungleichung

$$d(a_n, a_m) \leq d(a_n, a) + d(a, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. ∎

Das wesentliche bei Cauchy-Folgen ist, dass nur auf die Folgenglieder selbst und nicht auf einen eventuellen Grenzwert Bezug genommen wird.

Wir haben gesehen, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist. Nun stellt sich die Frage, wann bzw. ob es Cauchy-Folgen gibt, die nicht konvergieren.

Definition III.2.30. Ein metrischer Raum (X, d) heißt *vollständig*, wenn in X jede Cauchy-Folge konvergiert. ∎

Beispiel III.2.31. Der metrische Raum $(\mathbb{Q}, d)$ mit $d(x, y) = |x - y|$ ist nicht vollständig. Hierzu betrachten wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit

$$a_1 = 3 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(a_n + \frac{2}{a_n}\Big) = a_n\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{a_n^2}\Big) = a_n\Big(1 + \frac{2 - a_n^2}{2a_n^2}\Big).$$

In Beispiel III.2.19 (der Fall $k = 2$ und $a = 2$) haben wir gesehen, dass diese Folge monoton fallend in $\mathbb{R}$ (!) gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Insbesondere ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Lemma III.2.29 eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und daher existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für $n, m > N$, d.h., $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes in $\mathbb{R}$ (Satz III.2.5) existiert keine rationale Zahl x mit $a_n \to x$. Also ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ nicht konvergent. ∎

Wir kommen nun zu einem sehr wichtigen Konvergenzkriterium für Folgen, das sich unter Umständen nachprüfen lässt, ohne dass man einen Kandidaten für einen Grenzwert kennt.

Cauchy-Kriterium für reelle Folgen

Satz III.2.32. *Der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ ist vollständig, d.h., eine Folge reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Wegen Lemma III.2.29 haben wir nur noch zu zeigen, dass jede Cauchy-Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Sei dazu $\varepsilon > 0$ und $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für $n, m \geq N_\varepsilon$. Dann ist $|a_n| \leq |a_n - a_{N_\varepsilon}| + |a_{N_\varepsilon}| \leq \varepsilon + |a_{N_\varepsilon}|$, d.h., die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert dann eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. Wir wählen ein $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq K_\varepsilon$. Zu $n \geq N_\varepsilon$ wählen wir nun ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq K_\varepsilon$ und $n_k \geq N_\varepsilon$. Dann ist $|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt hieraus schließlich $a_n \to a$. ∎

Folgerung III.2.33. (Cauchy-Kriterium für komplexe Folgen) *Der metrische Raum* $(\mathbb{C}, d)$ *ist vollständig, d.h., eine Folge komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge komplexer Zahlen und $z_n = x_n + iy_n$. Wegen $|x_n - x_m| \leq |z_n - z_m|$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ ist dann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen, also nach Satz III.2.32 konvergent gegen ein $x \in \mathbb{R}$. Analog zeigt man $y_n \to y$ für ein $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $z_n \to z := x + iy$ (Aufgabe III.2.2).■

Das Cauchy-Kriterium für die Konvergenz von Folgen ist eher von theoretischem Interesse, d.h., zum Nachweis der Konvergenz konkreter Folgen wird man es nur selten verwenden. Allerdings ist es in vielen allgemeinen Konvergenzbeweisen ein sehr nützliches Hilfsmittel.

Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$

Bemerkung III.2.34. Anders als wir es bisher getan haben, kann man die reellen Zahlen auch als einen archimedisch angeordneten Körper charakterisieren, der als metrischer Raum bzgl. der durch

$$d(x, y) = |x - y| = \max\{x - y, y - x\}$$

definierten Metrik vollständig ist.

Vor diesem Hintergrund kann man eine Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen beschreiben. Wir skizzieren kurz die Cauchy'sche Konstruktion. Hierzu betrachten wir auf dem angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ die Abstandsfunktion

$$d\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad (x, y) \mapsto |x - y|.$$

Man beachte, dass wir an dieser Stelle nicht auf die reellen Zahlen als Wertebereich der Abstandsfunktion zurückgreifen dürfen, da wir diese ja konstruieren wollen. Mittels der Abstandsfunktion definiert man nun Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ und betrachtet die Menge $\mathcal{C}$ alle Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$. Auf dieser Menge definieren wir eine Äquivalenzrelation (d.h. eine reflexive, symmetrische und transitive Relation) durch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad :\Leftrightarrow \quad a_n - b_n \to 0.$$

Die reellen Zahlen erhalten wir nun als die Menge

$$\mathbb{R} := \mathcal{C}/\sim := \{[(c_n)]\colon (c_n) \in \mathcal{C}\}$$

aller Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$. Um einzusehen, dass diese Menge all die Strukturen trägt, die wir auf den reellen Zahlen erwarten, hat man Addition, Multiplikation und Ordnung auf $\mathbb{R}$ zu definieren. Dies geschieht durch

$$[(a_n)] + [(b_n)] := [(a_n + b_n)] \quad \text{und} \quad [(a_n)] \cdot [(b_n)] := [(a_n \cdot b_n)].$$

Hierbei ist nachzuweisen, dass die rechte Seite nicht von der Wahl des jeweiligen Repräsentanten abhängt, d.h., dass für $[(a_n)] = [(a_n')]$ und $[(b_n)] = [(b_n')]$ auch $[(a_n + b_n)] = [(a_n' + b_n')]$ und $[(a_n \cdot b_n)] = [(a_n' \cdot b_n')]$ gelten. Die Ordnung erhalten wir dadurch, dass wir $[(a_n)] > [(0)]$ definieren, falls ein $q > 0$ in $\mathbb{Q}$ existiert, so dass $a_n > q$ für alle bis auf endlich viele Folgenglieder a_n gilt. Man kann nun zeigen, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R}_+)$ ein vollständig angeordneter Körper ist, also ein Modell für die reellen Zahlen. ■

III.3. Zahlenreihen

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff einer unendlichen Reihe von Zahlen ein.

Definition III.3.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge. Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Summen

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

heißt *unendliche Reihe* mit den *Gliedern* a_k und wird symbolisch mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(a) S_n heißt *n-te Partialsumme* der Reihe.
(b) Gilt $S_n \to S$, so schreibt man auch $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und nennt S die *Summe der Reihe.*
(c) Ist $n_0 \in \mathbb{Z}$, so schreiben wir allgemein $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ für die Folge der Partialsummen $B_n := a_{n_0} + \ldots + a_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k$, $n \geq n_0$. ■

Man beachte, dass sich das qualitative Konvergenzverhalten einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht ändert, wenn man endlich viele Reihenglieder abändert. Man betrachtet dann einfach die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ für ein ausreichend großes $n_0 \in \mathbb{N}$.

Das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hat also **zwei verschiedene Bedeutungen**. Einerseits steht es für die Folge der Partialsummen und im Falle der Konvergenz steht es auch für den Grenzwert der Reihe. Im folgenden wird jeweils aus dem Kontext deutlich werden, auf welche Bedeutung man sich bezieht.

Satz III.3.2. *Ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent, so gilt* $a_k \to 0$.

Beweis. Es gelte $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \to S \in \mathbb{C}$. Dann gilt wegen den Grenzwertsätzen III.2.13:

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0.$$ ■

Die Umkehrung von Satz III.3.2 ist im allgemeinen *falsch*; wir werden beispielsweise zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ ist. Die Bedingung $a_n \to 0$ ist also **notwendig** für die Konvergenz der Reihe, aber nicht **hinreichend**.

Wir diskutierenn nun einen der wichtigsten Typen von Reihen in der Analysis.

Satz III.3.3. (Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$)

(a) *Für* $1 \neq z \in \mathbb{C}$ *gilt die geometrische Summenformel: Für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist*

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

(b) *Für* $|z| < 1$ *ist die geometrische Reihe konvergent mit*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

(c) *Für* $|z| \geq 1$ *ist die geometrische Reihe divergent.*

Beweis. (a) Sei $S_n := \sum_{k=0}^n z^k$. Dann ist

$$\begin{aligned}(1-z)S_n &= \sum_{k=0}^{n} z^k - \sum_{k=0}^{n} z^{k+1} \\ &= (1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n) - (z+z^2+z^3+\ldots+z^{n+1}) \\ &= 1 - z^{n+1}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Formel sofort.
(b) Für $|z| < 1$ erhalten wir $z^{n+1} \to 0$ aus Satz III.2.7. Also folgt $S_n \to \frac{1-0}{1-z} = \frac{1}{1-z}$ aus den Grenzwertsätzen III.2.13.
(c) Für $|z| \geq 1$ ist $S_{n+1} - S_n = z^{n+1}$ nicht konvergent gegen 0 (Satz III.2.7), so dass die Reihe wegen Satz III.3.2 nicht konvergiert. ■

Satz III.3.4. (Grenzwertsatz für Reihen) *Sind die Reihen* $\sum_{k=1}^\infty a_k$ *und* $\sum_{k=1}^\infty b_k$ *konvergent und* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, *so ist die Reihe* $\sum_{k=1}^\infty (\lambda\, a_k + \mu\, b_k)$ *konvergent mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda\, a_k + \mu\, b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Beweis. Das folgt sofort aus den Grenzwertsätzen III.2.13 für Folgen, da für $A_n := \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n := \sum_{k=1}^n b_k$ und $C_n := \sum_{k=1}^n (\lambda\, a_k + \mu\, b_k)$ die Beziehung $C_n = \lambda \cdot A_n + \mu \cdot B_n$ gilt. ■

Beispiel III.3.5. Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)}$. Für die Teilsummen erhalten wir

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Daher gilt $S_n \to 1$ und somit $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)} = 1$. ■

Definition III.3.6. (i) Eine Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ heißt *beschränkt*, wenn die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihrer Partialsummen beschränkt ist, d.h., die Menge $\{|A_n| \colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ ist beschränkt.

(ii) Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ heißt *positiv*, wenn $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. ■

Beachte: Eine Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ ist genau dann positiv, wenn ihre Partialsummenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und $a_1 \geq 0$ ist.

Satz von der monotonen Konvergenz für Reihen

Satz III.3.7. *Jede positive beschränkte Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert gegen*

$$\sup\{\sum_{k=1}^{n} a_k : n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Satz über die monotone Konvergenz (Satz III.2.19), den wir auf die Folge der Teilsummen der Reihe anwenden. Da die Reihe positiv ist, ist die so erhaltene Folge monoton wachsend. ∎

Wir kommen nun zu einem Konvergenzkriterium für Reihen mit nicht notwendigerweise nichtnegativen Gliedern. Wir nennen Reihen der Gestalt $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ mit $a_n \geq 0$ *alternierend.*

Leibniz-Kriterium

Satz III.3.8. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen. Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *genau dann, wenn* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung $a_n \to 0$ folgt sofort aus Satz III.3.2. Es bleibt zu zeigen, dass diese Bedingung für alternierende Reihen hinreichend ist, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

Sei $A_n := \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$ die n-te Teilsumme. Dann gelten:
(1) $A_{2n} \geq A_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} = A_{2n+2}$,
(2) $A_{2n+1} \leq A_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} = A_{2n+3}$,
(3) $A_{2n} \geq A_{2n} - a_{2n+1} = A_{2n+1} \geq A_1$ und
(4) $A_{2n} - A_{2n+1} = a_{2n+1}$.

Die Folge $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist wegen (1) monoton fallend, die Folge $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ wegen (2) monoton wachsend. Mit (3) folgt $A_{2n} \geq A_{2n+1} \geq A_1$; somit ist (A_{2n}) nach unten beschränkt. Also konvergiert (A_{2n}) nach dem Satz von der monotonen Konvergenz. Sei

$$A := \lim_{n\to\infty} A_{2n} = \inf\{A_{2n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Gilt $a_n \to 0$, so folgt aus (4) weiter $A_{2n+1} = A_{2n} - a_{2n+1} \to A - 0 = A$ und folglich $A_n \to A$, da für jedes $\varepsilon > 0$ nur jeweils endlich viele A_{2n} bzw. A_{2n+1} nicht in $U_\varepsilon(A)$ liegen. ∎

Beispiele III.3.9. Die folgenden beiden Reihen sind konvergent:
(a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots (= \log 2)$
(b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots (= \frac{\pi}{4})$. ∎

Wie man an den beiden obigen Reihen erkennt, hätte man den Grenzwert sicher nicht so leicht direkt ausrechnen können. In diesem Sinne werden wir uns nun weiter damit beschäftigen, wie man die Konvergenz von Reihen untersuchen kann, ohne a priori Information über ihren Grenzwert zu haben.

Absolute Konvergenz von Reihen

Satz III.3.10. (Cauchy-Kriterium für Reihen) *Eine Zahlenreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *ist genau dann konvergent, wenn*

$$(CK) \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N) \ \Big|\sum_{k=n}^{m} c_k\Big| < \varepsilon.$$

Beweis. Sei $S_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$. Dann ist $S_m - S_{n-1} = \sum_{k=n}^{m} c_k$. Die Behauptung folgt nun aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen (Folgerung III.2.33). ∎

Definition III.3.11. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die positive Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ der Beträge konvergiert.

Satz III.3.12. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konvergent. Zu $\varepsilon > 0$ existiert dann ein N_ε mit $\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} |c_n| > \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| - \varepsilon$, d.h. $\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} |c_n| < \varepsilon$. Für $m \geq n > N_\varepsilon$ gilt dann

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} c_k\Big| \leq \sum_{k=n}^{m} |c_k| \leq \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |c_k| \leq \varepsilon.$$

Die Reihe konvergiert also nach dem Cauchy-Kriterium III.3.10. ∎

Reihen, die nicht absolute konvergent sind, zeigen ein etwas merkwürdiges Konvergenzverhalten, wie das folgende Beispiel zeigt: Sei

$$S := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \pm \ldots$$

die Summe der alternierenden harmonischen Reihe, die nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \pm \ldots \\ +\frac{1}{2}S &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} \pm \ldots \\ \frac{3}{2}S &= 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \pm \ldots \end{aligned}$$

Lässt man die Nullen weg, so entsteht nach geeigneter Umordnung aus der Reihe in der letzten Zeile wieder die alternierende harmonische Reihe. Die führt zu dem scheinbaren Widerspruch $S = \frac{3}{2}S$, der sich nur dadurch auflösen lässt, dass man feststellt, dass der Grenzwert einer Reihe sich im allgemeinen bei einer Umordnung ändert (vgl. Satz III.3.14).

Dass dies bei absolut konvergenten Reihen nicht passiert, sagt uns der folgende Satz.

UMORDNUNGSSATZ

Satz III.3.13. *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *sei absolut konvergent und* $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijektiv. Dann konvergiert auch die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha(k)}$ *absolut und hat denselben Grenzwert.*

Beweis. Sei $C_n := \sum_{k=1}^{n} c_k$, $B_n := \sum_{k=1}^{n} c_{\alpha(k)}$ und $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $M \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=M}^{m} |c_k| < \varepsilon$ für alle $m \geq M$. Wir setzen

$$N := \max\{n \in \mathbb{N}\colon \alpha(n) \leq M\}$$

und beachten, dass dieses Maximum existiert, da wegen der Bijektivität genau M natürliche Zahlen n mit $\alpha(n) \leq M$ existierten. Für $n > N$ erhalten wir nun

$$\begin{aligned} |B_n - C_n| &= \Big|\sum_{k=1}^{n} c_{\alpha(k)} - \sum_{k=1}^{n} c_k\Big| = \Big|\sum_{k=1,\alpha(k)>M}^{n} c_{\alpha(k)} - \sum_{k=M+1}^{n} c_k\Big| \\ &\leq \Big|\sum_{k=1,\alpha(k)>M}^{n} c_{\alpha(k)}\Big| + \Big|\sum_{k=M+1}^{n} c_k\Big| \\ &\leq \sum_{k=1,\alpha(k)>M}^{n} |c_{\alpha(k)}| + \sum_{k=M+1}^{n} |c_k| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} C_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

und somit $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$. Wendet man dies nun auf die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ an, so folgt $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |c_{\alpha(k)}|$, d.h., die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha(k)}$ ist absolut konvergent. ■

Wie wenig stabil nicht absolut konvergente Reihen gegenüber Umordnungen sind, zeigt der folgende Satz.

Satz III.3.14. (Riemannscher[1] Umordnungssatz) *Ist die reelle Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *konvergent und nicht absolut konvergent, so existiert zu jedem beliebigen* $x \in \mathbb{R}$ *eine Bijektion* $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit* $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha(k)} = x$.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass wir o.B.d.A. annehmen dürfen, dass alle Folgenglieder $c_k \neq 0$ sind. Ist dies nicht der Fall, so betrachten wir nur die entsprechende Teilfolge.

Man kann jedes Glied c_k der Reihe in der Form $c_k = a_k + b_k$ schreiben, wobei $a_k := \max(c_k, 0)$ und $b_k := \min(c_k, 0)$ ist. Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ enthält dann ausschließlich nichtnegative und die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nichtpositive Glieder. Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, gilt $a_k \to 0$, $b_k \to 0$, $\sum_{k=1}^{n} a_k \to \infty$ und $\sum_{k=1}^{n} b_k \to -\infty$, denn aus der Konvergenz von

[1] Bernhard Riemann (1826–1866), Mathematiker in Göttingen

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ würde die von $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ folgen und damit die absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$.

Wir wählen jetzt die Folgenglieder $c_{\alpha(n)}$ rekursiv wie folgt. Seien $c_{\alpha(j)}$ für $j = 1, \ldots, n$ gewählt und

$$\{c_{\alpha(1)}, \ldots, c_{\alpha(n)}\} = \{a_j : j \leq k, a_j \neq 0\} \cup \{b_j : j \leq m, b_j \neq 0\}.$$

Sei $a_{k'}$ das erste von 0 verschiedene Folgenglied mit $k < k'$ und entsprechend $b_{m'}$ mit $m < m'$. Wir setzen nun $c_{\alpha(n+1)} := a_{k'}$ oder $c_{\alpha(n+1)} := b_{m'}$, je nachdem, ob $d_n := \sum_{k=1}^{n} c_{\alpha(k)} < x$ oder $\geq x$ ist. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $a_k \to 0$ und $b_k \to 0$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|c_{\alpha(n)}| \leq \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt. Dann erhalten wir zwei Fälle:
(1) Sei $d_N < x$ und $d_{N+k} \geq x$, k minimal. Dann ist $|d_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq N + k$.
(2) Ist $d_N \geq x$, so argumentiert man analog.
Wir erhalten schließlich $d_n \to x$, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha(k)} = x$. Schließlich überlegt man sich, dass die so erhaltene Abbildung $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv ist. ■

Die Cauchy-Produktformel

Satz III.3.15. *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent, und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Beweis. Sei $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$ sowie $A_n \to A$ und $B_n \to B$. Wir zeigen zuerst $\lim_{n\to\infty} C_n = AB$. Sei dazu $C_n^* := A_n B_n$. Dann gilt wegen den Grenzwertsätzen $C_n^* \to AB$, und es reicht daher aus, $\lim_{n\to\infty}(C_n - C_n^*) = 0$ zu zeigen, denn hieraus folgt dann $C_n = (C_n - C_n^*) + C_n^* \to AB$. Wir haben

$$C_n^* = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j = \sum_{0 \leq k,j \leq n} a_k b_j \quad \text{und} \quad C_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{i-j} b_j = \sum_{0 \leq k+j \leq n} a_k b_j.$$

(Man beachte die Summationsbereiche.) Wir suchen nun ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{\substack{0 \leq k,j \leq n \\ k+j > n}} |a_k| \cdot |b_j| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n > N_\varepsilon$$

gilt, denn dann ist nach der Dreiecksungleichung $|C_n - C_n^*| < \varepsilon$. Sei also

$$P_n := \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} |a_k| \cdot |b_j| = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)\left(\sum_{j=0}^{n} |b_j|\right).$$

Da die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergieren, konvergiert die Folge P_n gegen eine Zahl $P \in \mathbb{R}$. Damit gibt es eine Zahl $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|P_m - P_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N_\varepsilon$ (Cauchy-Kriterium). Für $n > 2N_\varepsilon$ ist dann

$$\sum_{\substack{0 \leq k,j \leq n \\ k+j>n}} |a_k| \cdot |b_j| \ \leq P_n - P_{N_\varepsilon} < \varepsilon,$$

da aus $k + j > n > 2N_\varepsilon$ schon $k > N_\varepsilon$ oder $j > N_\varepsilon$ folgt. Hieraus erhalten wir $C_n \to A \cdot B$, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Es bleibt nun noch die absolute Konvergenz zu zeigen. Wir haben zunächst

$$|c_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right| \leq c_n' := \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}| \cdot |b_k|.$$

Wegen dem ersten Teil ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n' = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$. Insbesondere ist diese Reihe konvergent; folglich konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ wegen Satz III.3.7, da diese Reihe beschränkt und positiv ist. ■

Bemerkung III.3.16. Die absolute Konvergenz der Reihen ist essentiell für die Gültigkeit der Cauchyschen Produktformel. Als Beispiel betrachten wir die durch

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

gegebenen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, die nach dem Leibnizkriterium konvergieren. Andererseits ergibt sich

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Wir zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent ist, indem wir nachweisen, dass $(-1)^n c_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \geq \frac{1}{n+1}$$

ist $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1$, d.h., die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist nicht konvergent. ■

III.4. Konvergenzkriterien für Reihen

In diesem Abschnitt werden wir einige Kriterien kennenlernen, mit denen man die Konvergenz vieler Reihen nachweisen kann. Hierbei tritt eine neue Situation auf. Wir werden Reihen sehen, deren Konvergenz sich zwar beweisen lässt, deren Grenzwert wir aber nicht angeben können. Dies führt uns insbesondere zu der *Eulerschen Zahl* e.

Definition III.4.1. Die positive Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *Majorante* der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, wenn $|c_n| \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. ■

Um die Konvergenz einer Reihe zu zeigen, zieht man oft Reihen heran, über die man schon Bescheid weiß. Wie dies funktioniert, zeigt der folgende Satz.

Satz III.4.2. (Majorantenkriterium) *Jede Reihe mit einer konvergenten Majorante konvergiert absolut.*

Beweis. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\sum_{n=1}^{k} |c_n| \leq \sum_{n=1}^{k} a_n \leq \sup\left\{\sum_{n=1}^{k} a_n \colon k \in \mathbb{N}\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ positiv und beschränkt und nach Satz III.3.7 somit konvergent. ■

Anwendungen des Majorantenkriteriums

Satz III.4.3. (Verdichtungskriterium von Cauchy) *Sei* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine nichtnegative reelle monoton fallende Folge. Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *genau dann, wenn die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n c_{2^n}$ *konvergiert.*

Anschaulich ist dies klar, wenn man die Glieder der Reihe wie angedeutet gruppiert:

$$c_1 + \underbrace{c_2 + c_3}_{\leq 2c_2} + \underbrace{c_4 + \ldots + c_7}_{\leq 4c_4} + \underbrace{c_8 + \ldots + c_{15}}_{\leq 8c_8} + \ldots$$

$$c_1 + c_2 + \underbrace{c_3 + c_4}_{\geq 2c_4} + \underbrace{c_5 + \ldots + c_8}_{\geq 4c_8} + \underbrace{c_9 + \ldots + c_{16}}_{\geq 8c_{16}} + \ldots .$$

Beweis. Wegen $c_n \geq c_{n+1} \geq 0$ gilt

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} c_n \leq 2^k \cdot c_{2^k}, \quad \text{also} \quad \sum_{n=2}^{2^{k+1}-1} c_n \leq \sum_{n=1}^{k} 2^n \cdot c_{2^n} .$$

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n c_{2^n}$ konvergent und daher beschränkt, so gilt dies auch für $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, und die Konvergenz folgt aus dem Satz über die monotone Konvergenz. Umgekehrt gilt

$$2 \cdot \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} c_n \geq 2 \cdot 2^{k-1} c_{2^k} = 2^k c_{2^k}, \quad \text{also} \quad 2 \sum_{n=2}^{2^k} c_n \geq \sum_{n=1}^{k} 2^n c_{2^n} .$$

Konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, so also auch $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n c_{2^n}$. ■

Folgerung III.4.4. *Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist.*

Beweis. Für $\alpha < 0$ ist $\frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} \geq 1$ und die Folge $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen Null. Wegen Satz III.3.2 ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ daher divergent.

Sei $\alpha \geq 0$. Dann gilt $n^\alpha \leq (n+1)^\alpha$ (Aufgabe II.2.4), also auch $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Das Verdichtungskriterium ist also anwendbar. Wir rechnen:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-\alpha)} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-\alpha})^k$$

Dies ist eine geometrische Reihe, also genau dann konvergent, wenn $2^{1-\alpha} < 1 = 2^0$, also wenn $1 - \alpha < 0$ ist, d.h. $\alpha > 1$. ■

Man kann mithilfe der Theorie der Fourierreihen zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

gilt. Die Zahl π werden wir allerdings erst später durch die Cosinusfunktion definieren.

Folgerung III.4.5. *Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, obwohl die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, d.h. gegen Null konvergiert.* ■

Quotienten- und Wurzelkriterium

Wir haben schon im Beweis von Folgerung III.4.4 gesehen, dass man die geometrische Reihe zum Vergleich heranziehen kann. Wir schauen uns weitere Anwendungen dieses Typs an.

$\boxed{\text{Quotientenkriterium}}$

Satz III.4.6. *Existiert $0 \leq \alpha < 1$ mit $|c_{n+1}| \leq \alpha|c_n|$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut. Dies gilt insbesondere, wenn $c_n \neq 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < 1.$$

Gilt umgekehrt

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} > 1,$$

so ist die Reihe divergent.

Beweis. Induktiv erhalten wir $|c_{N+k}| \leq \alpha^k|c_N|$ für ein ausreichend großes N und alle $k \in \mathbb{N}$. Also hat $\sum_{n=N}^{\infty} c_n$ die Majorante $\sum_{n=N}^{\infty} \alpha^{n-N}|c_N|$, die wegen $\alpha < 1$ konvergiert. Die erste Behauptung folgt daher aus dem Majorantenkriterium.

Gilt $c_n \neq 0$ für all n, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < 1$ und ist $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < \alpha < 1,$$

so gilt $|c_{n+1}| \leq \alpha|c_n|$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist in diesem Fall die Voraussetzung erfüllt.

Ist andererseits $c_n \neq 0$ für all n und $\alpha := \underline{\lim} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} > 1$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ with $|c_{n+1}| \geq \alpha|c_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $|c_n| \geq \alpha^{n-N}|c_N|$. Aus $\alpha > 1$ folgt daher, dass die Folge (c_n) nicht beschränkt ist, also insbesondere nicht gegen 0 konvergiert. ■

Beispiele III.4.7. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergiert, denn es gilt für $c_n = \frac{n^2}{2^n}$:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

Das Quotientenkriterium liefert also die Behauptung. ■

Bemerkung III.4.8. (a) Für die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gilt zwar $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n}{n+1} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber wegen $\frac{n}{n+1} \to 1$ existiert keine Zahl $\alpha < 1$ mit $\frac{n}{n+1} < \alpha$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Das Quotientenkriterium ist hier also *nicht* anwendbar.

(b) Für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hingegen gilt $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1$, obwohl die Reihe konvergiert (vgl. Folgerung III.4.4). Das Quotientenkriterium ist **hinreichend** für die Konvergenz, aber **nicht notwendig**. ■

Das nun folgende Kriterium ist häufiger anwendbar:

WURZELKRITERIUM

Satz III.4.9. (a) *Ist*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} < 1,$$

so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *absolut.*

(b) *Falls* $\sqrt[n]{|c_n|} \geq 1$ *für unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$ *gilt, so divergiert die Reihe. Dies ist insbesondere für*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} > 1$$

der Fall.

Beweis. (a) Ist $\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$, so existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} < \alpha < 1$. Dann gilt $|c_n| \leq \alpha^n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, d.h., für ein ausreichend großes $N \in \mathbb{N}$ ist die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} \alpha^n$ eine konvergente Majorante von $\sum_{n=N}^{\infty} c_n$. Die absolute Konvergenz der Reihe folgt also aus dem Majorantenkriterium.

(b) Ist $\sqrt[n]{|c_n|} \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so ist $|c_n| \geq 1$ und daher gilt $c_n \not\to 0$. Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nicht (Satz III.3.2). ■

Lemma III.4.10. *Es gelten*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1 \textit{ für alle } c > 0.$$

Beweis. Es gilt $\sqrt[n]{n} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir haben also zu zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$ gilt. Da $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$ zu $n < (1+\varepsilon)^n$ äquivalent ist, beachten wir zunächst

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k \geq \binom{n}{2} \varepsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2.$$

Aus dem Satz von Archimedes folgt die Existenz eines N_ε mit $\frac{n-1}{2}\varepsilon^2 > 1$ für $n > N_\varepsilon$. Damit gilt aber auch $(1+\varepsilon)^n \geq n$ für $n > N_\varepsilon$. Damit ist $\sqrt[n]{n} \to 1$ gezeigt.

Wegen $\sqrt[n]{\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[n]{c}}$ dürfen wir o.B.d.A. $c \geq 1$ annehmen. Dann ist $1 \leq c \leq n$ für fast alle n und somit auch $1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n}$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ folgt hieraus $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$. ■

Bemerkung III.4.11. (a) Für die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ergibt sich nach (a) für das Wurzelkriterium $\sqrt[n]{c_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$. Dieses Kriterium ist also nicht anwendbar, bzw. gibt uns keine Auskunft. Ebenso erhalten wir für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ mit dem Wurzelkriterium $\sqrt[n]{c_n} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1$; es ist also auch hier nicht anwendbar. Das Wurzelkriterium ist **hinreichend** für die Konvergenz, aber **nicht notwendig**.

(b) Ist das Quotientenkriterium anwendbar, so auch das Wurzelkriterium. Dies sieht man wie folgt:
Sei $0 \leq \alpha < 1$. Aus $|c_{n+1}| \leq \alpha |c_n|$ für alle $n > N$ folgt $|c_n| \leq \alpha^{n-N}|c_N| = \alpha^n \frac{|c_N|}{\alpha^N}$ (Induktion!). Hieraus erhält man wegen Lemma III.4.10

$$\sqrt[n]{|c_n|} \leq \alpha \sqrt[n]{\frac{|c_N|}{\alpha^N}} \to \alpha < 1.$$

Insbesondere ist $\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} \leq \alpha < 1$.

(c) Man kann beachte den Unterschied in den Divergenzbedingungen im Quotientenkriterium: $\underline{\lim} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} > 1$ und $\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} > 1$ im Wurzelkriterium.

(d) Für $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, die durch

$$c_n := \begin{cases} x^n, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2x^n, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

gegeben ist. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |x|$ (Lemma III.4.10) wegen $\lim \sqrt[n]{2} = 1$; das Wurzelkriterium liefert also Konvergenz für $|x| < 1$ und Divergenz $|x| > 1$. Hingegen erhält man mit dem Quotientenkriterium

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \begin{cases} 2x; & n \text{ gerade} \\ \frac{x}{2}; & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und somit Konvergenz für $|x| < \frac{1}{2}$ sowie Divergenz für $|x| > 2$. Man sieht, dass das Quotientenkriterium mitunter weniger scharfe Schlüsse zulässt. ■

Beispiel III.4.12. Ist die komplexe Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ absolut, denn ist $|a_k| \leq A$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so hat $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ die konvergente Majorante $A \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k$ (geometrische Reihe). ■

Satz III.4.13. (Konvergenz von Potenzreihen) *Zu einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen betrachten wir die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.*

(1) *Die Zahl $R := \sup\{r \in \mathbb{R} \colon \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty\}$ heißt Konvergenzradius der Potenzreihe. Ist $|z| < R$ so konvergiert die Potenzreihe, und für $|z| > R$ liegt Divergenz vor.*

(2) *Der Konvergenzradius lässt sich durch folgende Formel von Hadamard berechnen:*

$$R := \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty],$$

wobei wir $\frac{1}{0} = \infty$ *und* $\frac{1}{\infty} = 0$ *setzen.*

Beweis. Aus dem Wurzelkriterium folgt sofort, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergiert, falls

$$|z| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n z^n|} < 1$$

gilt und divergiert, falls

$$|z| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

ist. Ist $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, so liegt als nur für $z = 0$ Konvergenz vor und für $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$. In allen anderen Fällen sehen wir, dass die Reihe konvergiert, wenn

$$|z| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

gilt und divergiert, wenn

$$|z| > \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ist. Hieraus ergeben sich sofort (1) und (2). ∎

Die Kreisscheibe $U_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ nennen wir *Konvergenzkreis der Potenzreihe.* Für $|z| = R$ erhalten wir aus dem Wurzelkriterium keine Information. Daher muss man diese Fälle jeweils gesondert betrachten, wie wir es bei der Diskussion der geometrischen Reihe (das ist der Fall $a_n = 1$) in Satz III.3.3 getan haben. Wir werden später auf Potenzreihen zurückkommen, da sie eine wichtige Rolle bei der Reihenentwicklung von Funktionen spielen (Taylorentwicklung).

Aufgabe III.4.2. (a) Für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ gilt $R = 1$.

(b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$ der Konvergenzradius $R = 1$.

(c) Ist $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion, so ist der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n$ durch $R = 1$ gegeben. ∎

Darstellungen reeller Zahlen

Die Beobachtung in Beispiel III.4.12 hat eine wichtige Anwendung:

Satz III.4.14. *Sei* $b \geq 2$ *eine natürliche Zahl. Dann lässt sich jede reelle Zahl* $x \geq 0$ *in der Form*

$$x = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k \cdot b^{-k}, \quad a_k \in \{0, \dots, b-1\}, m \in \mathbb{Z}$$

darstellen. Die Darstellung ist eindeutig, wenn man ausschließt, dass $a_k = b - 1$ *für fast alle* k *gilt.*

Man nennt obige Entwicklung für $b = 10$ *Dezimalentwicklung* und für $b = 2$ *Dualentwicklung*. Allgemein spricht man von der b-al-Entwicklung. Für $b = 10$ schreibt man auch kürzer

$$\sum_{k=-m}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} = a_{-m}a_{-m+1}\dots a_{-1}a_0, a_1a_2a_3\dots,$$

z.B.

$$2006,1107 = 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-4}.$$

Beweis. Zunächst folgt aus obigem Beispiel III.4.12 und $\frac{1}{b} < 1$ die Konvergenz von Reihen der Gestalt $\sum_{k=-m}^{\infty} a_k \cdot b^{-k}$, wenn $a_k \in \{0, \dots b-1\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Existenz der Darstellung: Wir dürfen o.B.d.A. $x > 0$ annehmen (warum?). Man bestimmt die Zahlen a_k rekursiv wie folgt: Ist $b^{-n} > x$ (beachte $b^{-n} \to \infty$ für $n \to -\infty$, vgl. Satz III.2.7), so setzen wir $a_n := 0$. Sei $m := \max\{k \in \mathbb{Z} \colon b^k \leq x\}$.

Sei jetzt $n \geq -m$. Wir nehmen an, dass wir a_k für $k < n$ schon so gewählt haben, dass

$$x - b^{-(n-1)} < \sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot b^{-k} \leq x$$

gilt. Dies ist insbesondere für $n = -m$ der Fall. Dann bestimmen wir a_n maximal mit $\sum_{k=-m}^{n} a_k \cdot b^{-k} \leq x$ und beachten, dass dies $a_n \leq b-1$ zur Folge hat, denn

$$\sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot b^{-k} + bb^{-n} = \sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot b^{-k} + b^{-(n-1)} > x.$$

Weiter folgt aus der Maximalität von a_n:

$$x - b^{-n} < \sum_{k=-m}^{n} a_k \cdot b^{-k} \leq x.$$

Die n-te Partialsumme ist also die größte b-al Zahl mit n Stellen hinter dem Komma, die noch nicht größer als x ist. Induktiv erhalten wir

$$\left| \sum_{k=-m}^{n} a_k \cdot b^{-k} - x \right| < b^{-n}$$

und daher $\sum_{k=-m}^{\infty} a_k \cdot b^{-k} = x$ wegen $b^{-n} \to 0$.

Eindeutigkeit der Darstellung: Sei

$$x = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k \cdot b^{-k} = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k \cdot b^{-k},$$

wobei unendlich viele a_k bzw. c_k ungleich $b-1$ sind. Gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $a_n \neq c_n$, so existiert ein minimales n mit dieser Eigenschaft (Wohlordnungsprinzip). Sei o.B.d.A. $a_n > c_n$. Dann gilt

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \cdot b^{-k} < \sum_{k=n+1}^{\infty} (b-1)b^{-k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} b^{-(k-1)} - \sum_{k=n+1}^{\infty} b^{-k} = b^{-n}$$

und folglich

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=-m}^{\infty} c_k \cdot b^{-k} = \sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot b^{-k} + c_n b^{-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \cdot b^{-k} \\ &< \sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot b^{-k} + (a_n - 1)b^{-n} + b^{-n} \\ &= \sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot b^{-k} + a_n b^{-n} = \sum_{k=-m}^{n} a_k \cdot b^{-k} \leq x. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch. ■

Bemerkung III.4.15. (a) Mit Satz III.4.13 haben wir unsere reellen Zahlen wieder als das erkannt, was man schon in der Schule kennenlernt: Alle Zahlen, die sich durch Dezimalentwicklungen darstellen lassen. Der große Nachteil des Zugangs zu den reellen Zahlen über ihre Dezimalentwicklung ist, dass man die zentralen Eigenschaften der reellen Zahlen, die wir direkt axiomatisch fixiert haben, nur sehr umständlich verifizieren kann.

(b) In Digitalrechnern sind Systeme zur Basis 2^n am einfachsten zu behandeln. Das gilt insbesondere für $n = 1$, da ein Schalter zwei Zustände hat, 1 (für „ein") und 0 (für „aus"). ■

Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

Wir haben in Folgerung II.2.20 gesehen, dass zwischen zwei reellen Zahlen immer eine rationale Zahl liegt. Man könnte daher annehmen, dass es genausoviele reelle wie rationale Zahlen gibt. dass dieser Schluss in die Irre führt, zeigt der folgende Satz:

Satz III.4.16. *Das Intervall* $]0,1[$ *ist nicht abzählbar. Insbesondere ist die Menge* $\mathbb{R}$ *der reellen Zahlen nicht abzählbar.*

Beweis. Wir verwenden das *Cantorsche Diagonalverfahren.* Angenommen, $]0,1[$ ist abzählbar, d.h. $]0,1[= \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann lässt sich jede Zahl x_n als Dezimalreihe

$$x_n = 0,a_1^{(n)}a_2^{(n)}a_3^{(n)}\ldots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} 10^{-k}$$

darstellen (Satz III.4.14). Wir definieren $c \in]0,1[$ durch $c = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 10^{-k}$ mit

$$c_k := \begin{cases} 5, & \text{falls } a_{k,k} \neq 5 \\ 4, & \text{falls } a_{k,k} = 5. \end{cases}$$

Dann ist $c_k \neq a_{k,k}$ für alle $k \geq 1$. Aus Satz III.4.13 folgt nun $c \neq x_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ wegen der Eindeutigkeit der Darstellung. Die reelle Zahl c ist also nicht in der Aufzählung enthalten; Widerspruch. ■

Folgerung III.4.17. *Die Menge* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *der irrationalen Zahlen ist nicht abzählbar. In diesem Sinne gibt es also „mehr" irrationale Zahlen als rationale.* ■

Die Exponentialfunktion

Satz III.4.18. *Die Exponentialreihe*

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$. *Die Exponentialfunktion*

$$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

hat folgende Eigenschaften:

(1) (*Funktionalgleichung*) $e^{x+y} = e^x e^y$ *für alle* $x, y \in \mathbb{C}$.

(2) *Für alle* $x \in \mathbb{C}$ *gilt* $e^{-x} = (e^x)^{-1}$.

(3) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $e^x > 0$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Konvergenz der Reihe. Für $c_n = \frac{z^n}{n!}$ gilt $|c_{n+1}| = |c_n| \cdot \frac{|z|}{n+1}$ und $\frac{|z|}{n+1} \to 0$. Die absolute Konvergenz der Reihe folgt daher für jedes $z \in \mathbb{C}$ aus dem Quotientenkriterium.

(1) Wegen der absoluten Konvergenz der Reihen für e^x und e^y gilt nach der Cauchy-Produktformel III.3.15

$$e^x \cdot e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{1}{k!} y^k.$$

Nun folgt aus dem binomischen Lehrsatz

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!} x^{n-k} y^k = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k-n} y^k = \frac{1}{n!}(x+y)^k.$$

Also ist $e^x \cdot e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = e^{x+y}$.

(2) Dies folgt einfach aus $e^{-x} e^x = e^{-x+x} = e^0 = 1$.

(3) erhalten wir aus (1) und (2) durch $e^x = e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}} = (e^{\frac{x}{2}})^2 > 0$. ■

Die Zahl

$$e := e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

heißt *Eulersche Zahl.* Wegen $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots$ ist $e > 2,6$. Etwas genauer ist $e = 2,7182871826198\ldots$. Eine andere Darstellung der Zahl e erhalten wir aus dem folgenden Satz.

Satz III.4.19. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Beweis. Sei $x_n := \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, $y_n := \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ und $\varepsilon > 0$. Wir zeigen die Existenz von $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - y_n| < \varepsilon$ für alle $n > N_\varepsilon$. Hieraus folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = e^z.$$

Wegen der absoluten Konvergenz $y_n \to e^z$ existiert zunächst ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit dem binomischen Lehrsatz erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} x_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\,n^k} \cdot z^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \underbrace{\prod_{l=0}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{n}\right)}_{\leq 1} \end{aligned}$$

und daher

$$y_n - x_n = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \underbrace{\left[1 - \prod_{l=0}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{n}\right)\right]}_{\in[0,1]}.$$

Also ist

$$|y_n - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=0}^N \frac{|z|^k}{k!} \left[1 - \prod_{l=0}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{n}\right)\right]$$

für alle $n > N$. Schließlich existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=0}^N \frac{|z|^k}{k!} \left[1 - \prod_{l=0}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{n}\right)\right] < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $n > N_\varepsilon$. Damit ergibt sich $|y_n - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ∎

Bemerkung III.4.20. Eine Möglichkeit, den Grenzwert aus Satz III.4.19 zu interpretieren, stellt die kontinuierliche Verzinsung dar. Wir stellen uns z als Zinssatz für ein Jahr vor und bezeichnen mit k_{alt} das Anfangskapital. Dann gilt bei

- jährlicher Berechnung der Zinsen: $k_{neu}^{(1)} = k_{alt} \cdot (1 + z)$
- halbjähriger Berechnung: $k_{neu}^{(2)} = k_{alt} \cdot (1 + \frac{z}{2})^2$
- $\frac{1}{n}$-jähriger Berechnung: $k_{neu}^{(n)} = k_{alt} \cdot (1 + \frac{z}{n})^n$.

Im Grenzwert (kontinuierliche Verzinsung) ergibt sich $k_{neu}^{\infty} = k_{alt} \cdot e^z$. ■

Aufgabe III.4.1. Zeigen Sie, dass für $z \geq 0$ die Folge $(1 + \frac{z}{n})^n$ monoton wachsend ist. Warum liegt dies wegen Bemerkung III.4.20 nahe? ■