Skriptum zur Analysis I

SS 2006 — TU Darmstadt

Karl – Hermann Neeb

I. Logik und Mengenlehre

Gegenstand der Analysis I ist die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen und der Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Um mit diesen Begriffen systematisch und präzise umgehen zu können, benötigen wir eine Sprache. Die Sprache der Mathematik ist die *Mengenlehre*. Wie man mit mathematischen Sachverhalten umgeht, lehrt uns die *Logik*. Sie spielt die Rolle der *Grammatik* der Mathematik.

I.1 Quantoren und Aussagenlogik

Die Logik handelt von Aussagen, die nach gewissen Regeln aus bestimmten Zeichen aufgebaut werden. Wir betrachten eine Aussage als *wohlgeformt*, wenn sich „entscheiden" lässt, ob sie wahr oder falsch ist. Wohlgeformte Aussagen sind beispielsweise

1) 0 ist eine ganze Zahl.
2) $2 + 2 = 5$.
3) $a + a = 2a$ gilt für jede ganze Zahl a.

Keine wohlgeformte Aussage hingegen ist etwa

$?!a = x + \diamond$.

Vorsicht: Wir stellen uns hiermit auf einen naiven Standpunkt. Die Wahrheit einer Aussage kann nämlich von gewissen Grundannahmen abhängen, die man *Axiome* nennt. Wenn im folgenden von Aussagen die Rede ist, sind damit immer wohlgeformte Aussagen gemeint.

Definition I.1.1. Seien p und q Aussagen. Wir bilden:

(i) *Negation:* $\neg p$ (nicht p) ist genau dann wahr, wenn p falsch ist.

(ii) *Konjunktion:* $p \wedge q$ (p und q) ist genau dann wahr, wenn p und q wahr sind.

(iii) *Disjunktion:* $p \vee q$ (p oder q) ist genau dann wahr, wenn p oder q wahr ist (dies ist kein ausschließliches „oder“).

(iv) *Implikation:* $p \Rightarrow q$ (p impliziert q; aus p folgt q) ist definiert als $(\neg p) \vee q$. Die Wahrheit dieser Aussage ist gleichbedeutend mit „Wenn p wahr ist, dann ist auch q wahr“ (Nachweis!)

(v) *Äquivalenz:* $p \Longleftrightarrow q$ (p ist äquivalent zu q) genau dann, wenn beide wahr oder beide falsch sind. ■

Die Wahrheitswerte der oben definierten verknüpften Aussagen sind in der folgenden Wahrheitstafel zusammengefasst:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Longleftrightarrow q$
W	W	F	W	W	W	W
W	F	F	F	W	F	F
F	W	W	F	W	W	F
F	F	W	F	F	W	W

■

Die folgenden Merkregeln verifiziert man direkt durch Aufstellen der jeweiligen Wahrheitstafel.

Merkregeln für den Umgang mit logischen Operatoren

Bemerkung I.1.2.

(a) Doppelte Verneinung bejaht: $\neg(\neg p) \Longleftrightarrow p$. Diese Aussage ist unabhängig von p wahr. Solche Aussagen nennt man *allgemeingültig*.

(b) Negation vertauscht $\wedge$ und $\vee$: (de Morgansche Regeln):

$$\neg(p \vee q) \Longleftrightarrow \neg p \wedge \neg q \quad \text{und} \quad \neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q.$$

(c) Wir schreiben **W** bzw. **F** für die Aussage, die immer wahr bzw. immer falsch ist. Dann gilt für jede Aussage p:

$$p \wedge \mathbf{F} \Longleftrightarrow \mathbf{F}, \quad p \vee \mathbf{F} \Longleftrightarrow p \quad \text{und} \quad p \wedge \mathbf{W} \Longleftrightarrow p, \quad p \vee \mathbf{W} \Longleftrightarrow \mathbf{W}.$$

Dies sind also 4 allgemeingültige Aussagen.

(d) Logische Distributivgesetze: Für Aussagen p, q, r gelten:

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad \text{und} \quad p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$ ■

Bemerkung I.1.3. (Regeln für logisches Schließen)

(1) *Direkter Schluss:*

$$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Longrightarrow q$$

Ist p wahr und impliziert p die Aussage q (d.h. folgt aus der Wahrheit von p die Wahrheit der Aussage q), so ist q wahr. Die Allgemeingültigkeit dieser Aussage verifiziert man direkt anhand der Tabelle.
Beispiel: Es ist sehr instruktiv, sich diesen Schluß an einem Beispiel klarzumachen:
p: Es ist Montag.
q: Es regnet heute.
$p \Rightarrow q$: Es regnet an jedem Montag.

Die Schlussweise besagt also: „Wenn heute Montag ist" und „Wenn es jeden Montag regnet", dann „regnet es heute".

(2) $(\neg q \wedge (p \Rightarrow q)) \Longrightarrow \neg p$
Im Beispiel: „Wenn es heute nicht regnet und wenn es jeden Montag regnet, dann ist heute nicht Montag."

(3) *Kontraposition*:

$$(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

Im Beispiel: „Es regent jeden Montag" $\Longleftrightarrow$ „Wenn es nicht regnet, ist es nicht Montag".

(4) *Schlussketten*: In der Notation logischer Schlüsse verwenden wir zwei Typen von Schlussketten: In einer Schlusskette des Typs

$$p_1 \Longleftrightarrow p_2 \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow p_n$$

verstehen wir das Zeichen $\Longleftrightarrow$ als ein Symbol, das uns signalisiert, dass alle Aussagen $p_1 \Longleftrightarrow p_2$, $p_2 \Longleftrightarrow p_3$ usw. wahr sind. Man sagt auch, dass die Aussagen durch *Äquivalenzumformungen* auseinander hervorgehen. Insbesondere gilt dann $p_1 \Longleftrightarrow p_n$. Zum Beispiel folgt die Gültigkeit von (3) unter Verwendung der doppelten Verneinung (I.1.2(a)) aus folgender Kette von Äquivalenzen:

$$(p \Rightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg p) \vee q \Longleftrightarrow q \vee (\neg p) \Longleftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

Entsprechend verwenden wir das Symbol $\Rightarrow$. In einer Schlusskette des Typs

$$p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow p_n$$

bedeutet es, dass alle Aussagen $p_1 \Rightarrow p_2$, $p_2 \Rightarrow p_3$ usw. wahr sind. Insbesondere gilt dies dann für $p_1 \Rightarrow p_n$. ■

Bemerkung I.1.4. (Formale Struktur mathematischer Sätze bzw. Beweise) Typischerweise haben mathematische Sätze die Gestalt:

$$p \Longrightarrow q.$$

In einem Beweis geht es also um die Verifikation einer solchen Aussage. Es gibt mehrere Möglichkeiten des Vorgehens:

(1) *direkter Beweis:* Man nimmt an, die *Voraussetzung* p ist wahr und schließt hieraus, dass die *Behauptung* q wahr ist (siehe I.1.1(iv)).

(2) Für den *indirekten Beweis* gibt es zwei Varianten, die auf den Äquivalenzen

$$(p \Rightarrow q) \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} (\neg q \Rightarrow \neg p) \Longleftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$$

beruhen.

(a) Man nimmt an, dass q falsch ist und leitet daraus ab, dass p falsch ist.

(b) Die andere Variante besteht darin anzunehmen, dass p wahr ist und q falsch und daraus einen Widerspruch herzuleiten. Hiermit ist die Wahrheit der Aussage $\neg(p \wedge \neg q)$ bewiesen und damit $p \Rightarrow q$. ■

Die *Menge der natürlichen Zahlen* sei mit

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$$

bezeichnet. (“:= bedeutet hier *definierte Gleichheit*, oben wird also die Menge $\mathbb{N}$ erst definert.)

Wir betrachten ein erstes Beispiel für einen indirekten Beweis.

Satz I.1.5. *Ist n eine durch 4 teilbare natürliche Zahl, so ist $n+3$ keine Quadratzahl.*

Beweis. (Indirekter Beweis) Wir nehmen an, $n+3$ sei eine Quadratzahl, d.h., es gibt eine natürliche Zahl k mit $n+3 = k^2$.

1. Fall: k ist gerade, d.h., es gibt eine natürliche Zahl m mit $k = 2m$. Dann ist $k^2 = 4m^2$ durch 4 teilbar und folglich $n = k^2 - 3$ nicht durch 4 teilbar.

2. Fall: k ist ungerade, d.h., es gibt eine natürliche Zahl m mit $k = 2m+1$. Dann ist $k^2 = 4m^2 + 4m + 1$, d.h. $k^2 - 1$ ist durch 4 teilbar, also $n = k^2 - 3 = (k^2 - 1) - 2$ nicht. ■

Definition I.1.6. (Quantoren)

(1) *Der Allquantor:* Sei J eine Menge (vgl. hierzu den nächsten Abschnitt) und $(p_j)_{j \in J}$ eine *Familie von Aussagen*, d.h., für jedes $j \in J$ ist p_j eine Aussage. Dann ist

$$(\forall j \in J)\, p_j$$

die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn p_j für alle $j \in J$ wahr ist.

Beispiele:

(a) $(\forall n \in \mathbb{N})\, \underbrace{\text{„}n \text{ ist gerade“}}_{p_n}$ ist falsch, da 3 nicht gerade ist.

(b) $(\forall n \in \mathbb{N})\, n \leq n^2$ ist wahr.

(2) *Der Existenzquantor:* Ist $(p_j)_{j \in J}$ eine Familie von Aussagen, so ist

$$(\exists j \in J)\, p_j$$

die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn ein $j_0 \in J$ so existiert, dass p_{j_0} wahr ist.

Beispiele:

(a) $(\exists n \in \mathbb{N})$ „ n ist gerade“ ist wahr.

(b) $(\exists n \in \mathbb{N})$ „ n ist Primzahl“ ist ebenfalls wahr.

(3) *Verschärfter Existenzquantor:* Die Aussage

$$(\exists! j \in J)\, p_j$$

bedeutet: Es existiert *genau* ein $j_0 \in J$, so dass p_{j_0} wahr ist.

Beispiele:

(a) $(\exists! n \in \mathbb{N})$ „ n ist gerade“ ist falsch.

(b) $(\exists! n \in \mathbb{N})$ $n^3 = 27$ ist wahr. ■

Bemerkung I.1.7. (Merkregeln für den Umgang mit Quantoren)

(a) Die Entsprechungen der *de Morganschen Regeln* für Quantoren sind

$$\neg\Big((\forall j \in J)\, p_j\Big) \iff (\exists j \in J)\, \neg p_j \quad \text{und} \quad \neg\Big((\exists j \in J)\, p_j\Big) \iff (\forall j \in J)\, \neg p_j .$$

(b) Man darf Existenz- und Allquantor im allgemeinen nicht vertauschen:

$$\underbrace{(\forall n \in \mathbb{N})(\exists k \in \mathbb{N})\, n \le k}_{W} \not\Longleftrightarrow \underbrace{(\exists k \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})\, n \le k}_{F} .$$

I.2 Mengenlehre

Dem Begriff der Menge stellen wir uns naiv gegenüber, d.h., wir stellen uns auf den Standpunkt, dass wir eine Menge kennen, wenn uns gesagt wird, welche Elemente sie enthält. Wie kann das aussehen?

Ist M eine Menge, so schreiben wir

$$x \in M$$

für die Aussage, die genau dann wahr ist, wenn x Element der Menge M ist, und

$$x \notin M :\Leftrightarrow \neg(x \in M).$$

Hierbei verwenden wir das Symbol $:\Leftrightarrow$ für *definierte Äquivalenz.* Durch obige Zeile wird die Bedeutung des Symbols $\notin$ definiert.

Definition I.2.1. (Beschreibung von Mengen)

(1) (Aufzählung der Elemente) Eine Menge kann durch Aufzählung ihrer Elemente beschrieben werden:

$M = \{4, 6, *\}$, $N = \{+, -, 8\}$.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — Die Menge der *natürlichen Zahlen*

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}$ — Die Menge der *ganzen Zahlen*

Beachte: $\{1, 2, 3, 2\} = \{1, 2, 3\}$.

Eine andere Möglichkeit besteht in der Beschreibung durch andere Mengen:

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ — Die Menge der *rationalen Zahlen*

(2) (Aussonderung) Die Elemente einer Menge können durch eine *Aussageform* spezifiziert werden: Zu jedem Element x einer Menge M sei uns eine Aussage $p(x)$ gegeben. Wir nennen das Symbol $p(x)$ dann eine *Aussageform* und x die *freie Variable* in $p(x)$. Wir können hiermit die Menge

$$N := \{x \in M : p(x)\} := \{x \in M : p(x) \text{ist wahr}\}$$

bilden. Sie enthält genau die Elemente x von M, für die die Aussage $p(x)$ wahr ist. Genau wie in Definition der Quantoren, kann man $(p(x))_{x \in M}$ auch als eine Familie von Aussagen auffassen. ■

Beispiele:

a) Die Menge der geraden Zahlen

$$G = \{n \in \mathbb{N} : (\exists m \in \mathbb{N})\, n = 2m\} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist gerade}\}$$

Hier ist $p(n)$ die Aussage „ $(\exists m \in \mathbb{N})\, n = 2m$ “ bzw. „ n ist gerade“.

b) Die Menge aller Primzahlen

$$P = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist Primzahl}\}.$$

Hier ist $p(n)$ die Aussage „ n ist Primzahl“. ■

Bemerkung I.2.2. Die Einschränkung $x \in M$ in Definition I.2.1(2) ist wesentlich, da sie unerlaubte Konstruktionen wie die folgende ausschließt:

$$R := \{x : x \notin x\} \text{ — die sogenannte } \textit{Russelsche Unmenge.}$$

Diese Definition führt zu einem Widerspruch (der Russelschen Antinomie[1]), wenn man fragt, ob die Menge R selbst Element von R ist:

- Ist $R \in R$, so folgt aus der definierenden Eigenschaft der Menge R, dass $R \notin R$ ist – Widerspruch; und

[1] Bertrand Russel (1872–1969), englischer Mathematiker, Logiker und Philosoph.

- ist $R \notin R$, so gilt die definierende Eigenschaft der Menge R für R, so dass $R \in R$ gilt – Widerspruch!

Diese Art von Konstruktion weist auf Probleme hin, die man erhält, wenn man Mengen von Mengen betrachtet. Insbesondere gilt:

Es gibt keine „Menge aller Mengen"! ■

Definition I.2.3. (1) $A \subseteq B$ (A ist *Teilmenge von* B) bedeutet $x \in A \Rightarrow x \in B$.

(2) $A = B :\iff \big((x \in A) \iff (x \in B)\big)$, d.h., zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. Man beachte

$$A = B \iff (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$$

(3) $\emptyset$: Die *leere Menge*. Sie enthält keine Elemente; die Aussage $x \in \emptyset$ ist immer falsch bzw. $x \in \emptyset \iff \mathbf{F}$. ■

In der folgenden Definition stellen wir zusammen, wie wir aus Mengen neue Mengen konstruieren dürfen. dass hierbei Vorsicht geboten ist, zeigt die Russelsche Antinomie.

Definition I.2.4. (Konstruktion neuer Mengen) Seien X und Y Mengen.

(i) *Das Komplement von Y in X* beschreiben wir durch Aussonderung:

$$X \setminus Y := \{x \in X : x \notin Y\}$$

(ii) *Die Vereinigung zweier Mengen*

$$X \cup Y := \{x : x \in X \vee x \in Y\}$$

lässt sich nicht durch Aussonderung beschreiben.

(iii) *Den Durchschnitt zweier Mengen* beschreiben wir wieder durch Aussonderung:

$$X \cap Y := \{x \in X : x \in Y\} = \{x : x \in X \wedge x \in Y\}$$

(iv) *Beliebige Durchschnitte und Vereinigungen:* Ist $\{A_j : j \in J\}$ eine Menge von Mengen, so definieren wir

$$\bigcup_{j \in J} A_j := \{x : (\exists j \in J)\ x \in A_j\}$$

Dann ist $x \in \bigcup_{j \in J} A_j \ \Leftrightarrow\ (\exists j \in J)\ x \in A_j$. Ist $J = \emptyset$, so ist diese Aussage immer falsch und daher $\bigcup_{j \in J} A_j = \emptyset$. Analog definieren wir für eine nichtleere (Index-)Menge J:

$$\bigcap_{j \in J} A_j := \{x : (\forall j \in J)\ x \in A_j\}.$$

Für endliche Mengen $J = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ schreibt man auch

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \bigcup_{j \in J} A_j = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

bzw.

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \bigcap_{j \in J} A_j = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n.$$

(v) *Die Produktmenge:* Für $x \in X$ und $y \in Y$ nennt man eine geordnete Auflistung (x, y) ein *Paar*. Die Menge

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X \wedge y \in Y\}$$

heißt *Produktmenge* (kartesisches Produkt) von X und Y.

Folgende Konstruktion ist etwas allgemeiner. Sind $A_1, \dots, A_n$ Mengen und $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$, so heißt die geordnete Liste $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ein n*-Tupel* (2-Tupel sind *Paare*; 3-Tupel werden *Tripel* genannt). Man definiert dann

$$A_1 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) : a_1 \in A_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in A_n\}.$$

Für $A_1 = A_2 = \ldots = A_n$ schreibt man auch

$$A^n := A_1 \times \ldots \times A_n = \underbrace{A \times \ldots \times A}_{\text{n Faktoren}}.$$

Beispiele:

a) $\mathbb{Z}^3 := \{(n, m, k) : n, m, k, \in \mathbb{Z}\}$

b) Die Mengen $A := \{\star, \circ\}$ und $B := \{\bullet, 1\}$ liefern

$$A \times B = \{(\star, \bullet), (\star, 1), (\circ, \bullet), (\circ, 1)\}.$$

(vi) *Die Potenzmenge:* Ist A eine Menge, so heißt

$$\mathcal{P}(A) := \{B : B \subseteq A\}$$

die *Potenzmenge* von A. Sie enthält alle Teilmengen von A.

Beispiel: Für $A = \{0, 1\}$ ist $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.

Beachte: Für jede Menge A gilt $\emptyset \subseteq A$. ■

I.3 Funktionen

Seien X und Y Mengen. Eine naive Definition einer Funktion bzw. Abbildung $f\colon X \to Y$ könnte beispielsweise so aussehen: „Eine *Funktion* $f\colon X \to Y$ ist eine Vorschrift, die jedem Element von X genau ein Element von Y zuordnet“. Hierbei haben wir zuerst zu klären, was man unter einer „Vorschrift“ versteht.

Definition I.3.1. Es seien X und Y Mengen. Eine *Funktion* (*Abbildung*) f ist ein Tripel (X, Y, Γ_f), bestehend aus den Mengen X, Y und einer Teilmenge $\Gamma_f \subseteq X \times Y$, für die gilt:

$$(\forall x \in X)(\exists! y \in Y)\,(x, y) \in \Gamma_f.$$

Bezeichnungen:

1) Ist $(x, y) \in \Gamma_f$, so heißt $f(x) := y$ *Funktionswert an der Stelle* x; man schreibt auch $x \mapsto f(x)$, womit suggeriert wird, dass dem Element $x \in X$ das Element $f(x)$ aus Y zugeordnet wird.
2) X heißt *Definitionsbereich.*
3) Y heißt *Werte-* oder *Bildbereich.*
4) Γ_f heißt *Graph* der Funktion.

Zwei Funktionen sind also genau dann gleich, wenn ihre Definitionsbereiche, Wertebereiche und Graphen übereinstimmen.

5) Man schreibt $f\colon X \to Y$ für Funktionen der Gestalt (X, Y, Γ_f), d.h. mit Definitionsbereich X und Bildbereich Y.
6) Die Menge $f(X) := \{y \in Y\colon (\exists x \in X)\, y = f(x)\}$ heißt *Bild von* f.
   Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt $f(A) := \{y \in Y\colon (\exists x \in A)\, y = f(x)\}$ das *Bild von* A unter f.
   Für $B \subseteq Y$ heißt $f^{-1}(B) := \{x \in X\colon f(x) \in B\}$ das *Urbild von* B.
   Für $B = \{y\} \subseteq Y$ schreiben wir kürzer $f^{-1}(y) := f^{-1}(\{y\})$. ■

Beispiel I.3.2. Sei $X = Y = \mathbb{Z}$.

(a) $f(x) = x^2 + 5$ hat den Graphen $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2\colon y = x^2 + 5\}$.
(b) $f(x) = x + 1$ hat den Graphen $\Gamma_f = \{(x, y)\colon y = x + 1\}$.
(c) Es gibt keine Funktion $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, deren Graph die Menge $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2\colon y^2 = x\}$ ist (Skizze!).
(d) Funktionen müssen nicht immer auf Zahlenmengen definiert sein; eine durchaus sinnvolle Funktion ist etwa:

$$f\colon \{\text{Menschen}\} \to \mathbb{N}_0, \quad x \mapsto \text{ Alter von } x.$$ ■

Definition I.3.3. (1) *Die identische Funktion auf der Menge* X*:*

$$\mathrm{id}_X = (X, X, \Gamma_{\mathrm{id}_X}),$$

wobei der Graph $\Gamma_{\mathrm{id}_X} = \{(x,y) \in X \times X \colon x = y\}$ die *Diagonale* ist. Wir haben also $\mathrm{id}_X(x) = x$ für alle $x \in X$.

(2) *Die konstante Abbildung* auf $y_0 \in Y$ ist durch $f\colon X \to Y, f(x) = y_0$ für alle $x \in X$ definiert. Ihr Graph ist die Menge $\Gamma_f = \{(x, y_0)\colon x \in X\}$.

(3) Eine Möglichkeit, aus einer schon vorhandenen Abbildung eine neue zu gewinnen, ist die *Restriktion* oder *Einschränkung* einer Abbildung auf eine Teilmenge ihres Definitionsbereichs: Ist $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und $A \subseteq X$, so wird durch

$$f|_A\colon A \to Y, \quad x \mapsto f(x)$$

die *Einschränkung von f auf A* definiert. Der Graph dieser Funktion ist $\Gamma_{f|A} = \Gamma_f \cap (A \times Y) = \{(x,y) \in A \times Y \colon y = f(x)\} \subseteq \Gamma_f$. ∎

Bei einer Funktion $f\colon X \to Y$ wird jedem $x \in X$ *genau* ein $f(x) \in Y$ zugeordnet. Für ein $y \in Y$ kann es aber mehrere Urbilder geben. Man unterscheidet daher mehrere Typen von Funktionen:

Definition I.3.4. Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt

(a) *injektiv*, wenn jedes $y \in Y$ höchstens ein Urbild hat, d.h.

$$(\forall x \in X)(\forall x' \in X)\, f(x) = f(x') \Longrightarrow x = x'.$$

(b) *surjektiv*, wenn jedes $y \in Y$ mindestens ein Urbild hat, d.h.

$$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\, y = f(x),$$

d.h. $f(X) = Y$.

(c) *bijektiv*, wenn jedes $y \in Y$ genau ein Urbild hat, d.h. wenn f injektiv und surjektiv ist.

∎

Die Surjektivität von f besagt, dass die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in Y$ lösbar ist, wohingegen die Injektivität die Eindeutigkeit der Lösung bedeutet (sofern sie existiert).

Beispiel I.3.5.

(a) Die Funktion

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto n+1$$

ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(b) Die Funktion

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} n-1, & \text{falls } n \geq 2 \\ 1, & \text{falls } n = 1 \end{cases}$$

ist surjektiv, aber nicht injektiv (denn $f(2) = f(1) = 1$).

(c) Die Funktion

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto n^2$$

ist weder injektiv noch surjektiv. ∎

Umkehrfunktionen

Sind X und Y zwei Mengen und ist $R \subseteq X \times Y$, so setzen wir

$$R^{-1} := \{(y,x) \in Y \times X : (x,y) \in R\}.$$

Eine Teilmenge $R \subseteq X \times Y$ nennt man eine *Relation* (zwischen X und Y).

Satz I.3.6. *Für eine Funktion $f: X \to Y$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(1) *f ist bijektiv.*

(2) *$(\Gamma_f)^{-1}$ ist der Graph einer Funktion $g: Y \to X$, d.h., $\big(Y, X, (\Gamma_f)^{-1}\big)$ ist eine Funktion.*

Beweis. $(Y, X, (\Gamma_f)^{-1})$ ist genau dann eine Funktion, wenn es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $(y,x) \in (\Gamma_f)^{-1}$ gibt. Dies ist nach der Definition von $(\Gamma_f)^{-1}$ genau dann der Fall, wenn es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ mit $(x,y) \in \Gamma_f$ gibt. Dies wiederum ist äquivalent zur Existenz genau eines $x \in X$ mit $y = f(x)$ für jedes $y \in Y$, was heißt, dass f bijektiv ist. ■

Definition I.3.7. Erfüllt $f: X \to Y$ die Bedingungen von Satz I.3.6, so schreiben wir $f^{-1} := (Y, X, (\Gamma_f)^{-1})$ (bzw. $f^{-1}: Y \to X$) für die Funktion mit dem Graphen $\Gamma_{f^{-1}} = (\Gamma_f)^{-1}$. Sie heißt *Umkehrfunktion von f*.

Für $x \in X$ und $y \in Y$ ist $(x,y) \in \Gamma_f$ äquivalent zu $f(x) = y$ und $f^{-1}(y) = x$. Insbesondere gilt

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(y)) = y.$$

Beachte: Für jede Funktion $f: X \to Y$ und jede Teilmenge $B \subseteq Y$ ist die Urbildmenge $f^{-1}(B)$ immer definiert; ob f bijektiv ist oder nicht. In diesem Sinne verwenden wir das Symbol f^{-1} also auch, wenn keine Umkehrfunktion zu f existiert. ■

Beispiel I.3.8. Für die Funktion $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, f(x) = 3x+2$ ist die Umkehrfunktion f^{-1} gegeben durch $f^{-1} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$. ■

Definition I.3.9. Sind $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ Funktionen, so wird durch

$$g \circ f: X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x))$$

eine Funktion definiert (Nachweis!). Sie heißt die *Komposition* (*Verknüpfung*) der Funktionen f und g. ■

Bemerkung I.3.10. (a) Ist eine Funktion $f: X \to Y$ bijektiv, so gilt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_Y$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$. Das folgt sofort aus den beiden Formeln in Definition I.3.7.

(b) Für

$$f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto 3x + 1 \quad \text{und} \quad g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto x^2 - 1$$

ist

$$g \circ f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto (3x + 1)^2 - 1 = 9x^2 + 6x$$

und

$$f \circ g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad x \mapsto 3(x^2 - 1) + 1 = 3x^2 - 2.$$

Insbesondere erkennt man an diesem Beispiel, dass für zwei Funktionen $f, g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ im allgemeinen $f \circ g \neq g \circ f$ gilt. ■

Aufgabe I.3.1. (a) Sind $f: X \to Y$ und $g: Y \to Z$ injektive (surjektive) Abbildungen, so ist auch deren Komposition $g \circ f: X \to Z$ injektiv (surjektiv).

(b) Ist $f: X \to \emptyset$ eine Funktion, so ist $X = \emptyset$.

(c) Für jede Menge Y ist $f = (\emptyset, Y, \emptyset)$ eine Funktion. Ihr Graph Γ_f ist die leere Menge. Man beachte, dass auch die Menge $\emptyset \times Y$ leer ist. ■

Aufgabe I.3.2. Seien X und Y Mengen sowie $f: X \to Y$ eine Funktion und

$$f^*: \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X), \quad A \mapsto f^{-1}(A)$$

die Abbildung, die jeder Teilmenge von Y ihr Urbild in X zuordnet. Zeigen Sie:

(1) f ist genau dann injektiv, wenn f^* surjektiv ist.

(2) f ist genau dann surjektiv, wenn f^* injektiv ist. ■

Aufgabe I.3.3. Zeige: Eine Funktion $f: X \to Y$ ist genau dann bijektiv, wenn eine Funktion $g: Y \to X$ existiert, so dass

$$f \circ g = \mathrm{id}_Y \quad \text{und} \quad g \circ f = \mathrm{id}_X. \qquad ■$$

Aufgabe I.3.4. (Komposition von Funktionen ist assoziativ) Zeige: Sind $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ und $h: Z \to U$ Funktionen, so gilt

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f). \qquad ■$$

Mächtigkeit von Mengen

Definition I.3.11. (a) Eine Menge X heißt *endlich*, wenn sie leer ist oder eine surjektive Abbildung

$$f: \{1, 2, \ldots, n\} \to X$$

für ein $n \in \mathbb{N}$ existiert. Sie heißt *abzählbar*, wenn sie leer ist, oder es eine surjektive Abbildung $f: \mathbb{N} \to X$ gibt, d.h. wenn man die Elemente von X „abzählen" kann: $X = \{f(1), f(2), \ldots\}$ bzw. $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. Wenn sie nicht abzählbar ist, so nennen wir sie *überabzählbar*.

(b) Zwei Mengen X und Y heißen *gleichmächtig*, wenn es eine bijektive Abbildung $F: X \to Y$ gibt. Zwei Mengen X und Y sind also genau dann gleichmächtig, wenn es möglich ist, jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y \in Y$ derart zuzuordnen, dass jedes Element von Y genau einem Element von x zugeordnet ist. Man stellt sich vor, dass die beiden Mengen X und Y dann „gleichviele" Elemente enthalten, wieviele es auch sein mögen. ■

Bemerkung I.3.12. (a) Jede endliche Menge M ist gleichmächtig zu genau einer Menge der Gestalt $\{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}_0$. In diesem Fall schreiben wir $|M| = n$. Die Menge M hat n verschiedene Elemente (Nachweis!).

(b) Ist X eine abzählbare Menge und $f: X \to Y$ eine surjektive Funktion, so ist auch Y abzählbar. (Ist $g: \mathbb{N} \to X$ surjektiv, so ist $f \circ g: \mathbb{N} \to Y$ surjektiv. (Nachweis!))

(c) Jede endliche Menge ist abzählbar (Nachweis!).

(d) Jede unendliche abzählbare Menge ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}$. Hierzu muss man zeigen, dass aus der Existenz einer surjektiven Funktion $f: \mathbb{N} \to M$ die einer bijektiven Funktion $g: \mathbb{N} \to M$ folgt. Hierzu definiert man

$$h(n) := \min\{m \in \mathbb{N}: |\{f(1), \ldots, f(m)\}| = n\}.$$

Dann ist $h(n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und man kann zeigen, dass $h: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine injektive Funktion ist, für die $g := f \circ h : \mathbb{N} \to M$ bijektiv ist. (Details als Übung!) ■

Satz I.3.13. *Die Mengen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sind gleichmächtig.*

Beweis. Wir definieren eine Abbildung $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch

$$f(p, q) = \frac{(p + q - 1)(p + q - 2)}{2} + p.$$

Diese Abbildung ist bijektiv (Nachweis als Übung; hierbei ist eine Skizze hilfreich). ■

Folgerung I.3.14. *Jede abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ist abzählbar, d.h. ist* $M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$ *und sind alle Mengen* M_n *abzählbar, so auch* M.

Beweis. Seien die Mengen M_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ abzählbar, d.h., wir können sie beschreiben als $M_n = \{x_{n,1}, x_{n,2}, \ldots\}$. Dann existiert für die Menge

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n = \{x_{n,m} \colon (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$$

eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} M_n$, sie ist also abzählbar (Bemerkung I.3.12(b)). ■

Folgerung I.3.15. *Die Menge* $\mathbb{Q}$ *der rationalen Zahlen ist abzählbar.*

Beweis. Da die Menge $\mathbb{Z}$ abzählbar ist, ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\frac{1}{n}\mathbb{Z} := \{\frac{p}{n} \colon p \in \mathbb{Z}\}$ abzählbar. Wegen

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n}\mathbb{Z}$$

folgt die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$ daher aus Folgerung I.3.14. ■

Satz I.3.16. (Cantor[1]-Russel) *Sei* X *eine Menge. Dann existiert keine surjektive Funktion* $f \colon X \to \mathcal{P}(X)$, *insbesondere auch keine bijektive.*

Beweis. Sei $f \colon X \to \mathcal{P}(X)$ eine Funktion. Wir zeigen, dass f nicht surjektiv ist, indem wir zeigen, dass die Menge $A := \{x \in X \colon x \notin f(x)\}$ nicht in $f(X)$ liegt. Wir führen einen indirekten Beweis; dazu nehmen wir an, dass $A = f(y)$ für ein $y \in X$ gilt.

1. Fall: $y \in f(y)$. Dann ist $y \in A$, also $y \notin f(y)$; Widerspruch!

2. Fall: $y \notin f(y)$. Dann ist $y \in A = f(y)$; Widerspruch!

Die Annahme ist also falsch, d. h. es gilt $A \notin f(X)$. ■

Eine wichtige Folgerung aus Satz I.3.16 ist, dass es keine größte Menge gibt, denn für jede Menge X ist die Potenzmenge $\mathcal{P}(X)$ echt größer.

Folgerung I.3.17. *Die Menge* $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *aller Teilmengen der natürlichen Zahlen ist nicht abzählbar.* ■

---

[1] Georg Cantor (1845–1918), deutscher Math. in Halle, Begründer der Mengenlehre; besuchte 1859–1862 die Höhere Gewerbeschule in Darmstadt, studierte in Berlin.

I.4. Das Prinzip der vollständigen Induktion

In diesem Abschnitt werden wir die natürlichen Zahlen etwas genauer betrachten. Hierbei werden wir das Beweisprinzip der vollständigen Induktion kennenlernen.

Wir stellen uns hier auf den Standpunkt, dass wir die *natürlichen Zahlen*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

die *ganzen Zahlen*

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

und die *rationalen Zahlen* (Brüche)

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \colon p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$$

kennen. Wir haben damit folgende Inklusionen von Mengen:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Am Anfang unserer Überlegungen steht das:

Wohlordnungsprinzip

Jede nichtleere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.

Wir werden dieses Prinzip als ein Axiom über die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen betrachten. Man sollte sich an dieser Stelle noch einmal bewusst machen, dass wir nicht axiomatisch präzisiert haben, was die natürlichen Zahlen sind, sondern von einer naiven Vorstellung der Menge $\mathbb{N}$ mit ihren arithmetischen Operationen ausgehen. Präzisiert man die Eigenschaften von $(\mathbb{N}, +, \cdot)$ axiomatisch (Peano-Axiome[1]), so ist das Wohlordnungsprinzip letztendlich in die Axiomatik eingebaut.

Aus dem Wohlordnungsprinzip leiten wir sogleich eine wichtige Folgerung ab:

Satz I.4.1. (Das Prinzip der vollständigen Induktion) *Sei* $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *eine Familie von Aussagen. Gilt*

(A) p_1 *und*

(S) $p_n \Rightarrow p_{n+1}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$,

so gilt: $(\forall n \in \mathbb{N})\, p_n$.

Beweis. (Indirekter Beweis) Wir betrachten die Menge $M := \{n \in \mathbb{N} \colon \neg p_n\}$. Ist M nicht leer, so besitzt M nach dem Wohlordnungsprinzip ein kleinstes Element m. Wegen (A) ist $m \neq 1$. Daher ist $m - 1$ eine natürliche Zahl mit $m - 1 \notin M$, d.h., p_{m-1} ist wahr. Wegen (S) ist dann auch p_m wahr; ein Widerspruch. ■

[1] Guiseppe Peano (1858–1932), italienischer Mathematiker in Torino, formulierte 1892 das Peanosche Axiomensystem für die natürlichen Zahlen.

Möchte man für jede natürliche Zahl n eine Aussage p_n beweisen, so kann man also wie folgt vorgehen:
Induktionsanfang (A) Zeige die Aussage p_1.
Induktionsschritt (S) Zeige: $(\forall n \in \mathbb{N})\ p_n \Rightarrow p_{n+1}$, d.h., aus der *Induktionsannahme* p_n wird die Aussage p_{n+1} hergeleitet.
Anschaulich:

$$\begin{array}{ccccccccc} p_1 & \Rightarrow & p_2 & \Rightarrow & p_3 & \Rightarrow & p_4 & \Rightarrow & \dots \\ W & & W & & W & & W & & \end{array}$$

(Dominoprinzip!)
Man kann das Induktionsprinzip auch verwenden, um mathematische Objekte rekursiv zu definieren.

Definition I.4.2. Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Q}$, so setzen wir

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n := (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) + x_n \qquad \text{für } n > 1.$$

dass man hiermit jede mögliche Anzahl von Summanden erfasst, folgt sofort aus dem Induktionsprinzip. Weiter definiert man

$$\sum_{j=1}^{n} x_j := \sum_{j \in \{1,2,\dots,n\}} x_j := x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

und

$$\sum_{j=1}^{0} x_j \ := \sum_{j \in \emptyset} x_j \ := 0$$

(die *leere Summe*).

Analog definiert man Mehrfachprodukte

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n := (x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{n-1}) \cdot x_n \qquad \text{für } n > 1$$

und weiter

$$\prod_{j=1}^{n} x_j := \prod_{j \in \{1,2,\dots,n\}} x_j := x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n.$$

Hier setzen wir

$$\prod_{j=1}^{0} x_j \ := \prod_{j \in \emptyset} x_j \ := 1 \quad \text{(das \textit{leere Produkt})}.$$

Speziell definieren wir für $n \in \mathbb{N}_0$ die *n-te Potenz* von x durch

$$x^n := \prod_{j=1}^{n} x = \underbrace{x \cdots x}_{\text{n mal}}.$$

Ist $x \neq 0$ und $n \in \mathbb{Z}$, $n < 0$, so setzen wir $x^n := \frac{1}{x^{-n}}$. ■

Wir schauen uns jetzt an einigen Beispielen an, wie das Induktionsprinzip für Beweise verwendet werden kann.

Satz I.4.3. (a) *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
(b) *Für alle* $n, m \in \mathbb{N}$ *und* $q \in \mathbb{Q}$ *gilt* $q^m q^n = q^{n+m}$.
(c) *Für alle* $n, m \in \mathbb{N}$ *und* $q \in \mathbb{Q}$ *gilt* $(q^m)^n = q^{nm}$.

Beweis. (a) (A) $(n = 1)$ $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$ ist richtig.
(S) Es gelte $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Dann ist

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \tfrac{n(n+1)}{2} + n + 1 = (n+1)(\tfrac{n}{2} + 1) = (n+1)\tfrac{n+2}{2}.$$

(b) (A) $(n = 1)$ $q^m q^1 = q^{m+1}$ folgt für alle $m \in \mathbb{N}$ aus der Definition.
(S) Es gelte $q^m q^{n-1} = q^{m+(n-1)}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$q^m q^n = q^m (q^{n-1} q) = (q^m q^{n-1}) q = q^{m+(n-1)} q = q^{m+(n-1)+1} = q^{m+n}.$$

(c) (A) $(n = 1)$ $(q^m)^1 = q^m$ gilt trivialerweise.
(S) Es gelte $(q^m)^{n-1} = q^{(n-1)m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Dann ist wegen (b)

$$(q^m)^n = (q^m)^{n-1} q^m = q^{(n-1)m} q^m = q^{(n-1)m+m} = q^{nm}. \qquad \blacksquare$$

Man beachte, dass der Induktionsanfang (A) sehr wesentlich ist, denn z.B. lässt sich für die Aussagen

$$p_n : \quad \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1) + 5$$

zeigen, dass $p_n \Rightarrow p_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Der Induktionsschluss wie im Beweis von Satz I.4.3(a) lässt sich also problemlos durchführen, obwohl keine der Aussagen p_n wahr ist.

Mit der Formel aus Satz I.4.3(a) verbindet sich eine berühmte Anekdote um *Carl Friedrich Gauß*[1]*. Dieser bekam im Alter von sieben Jahren von seinem Lehrer die Aufgabe gestellt, alle Zahlen von 1 bis 100 aufzusummieren. Carl Friedrich fing dies etwas anders an als seine Klassenkameraden, und zwar so:*

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & 1 & + & 2 & + & 3 & + & & \ldots & & + & 50 & + & \\
 & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \ldots & + & 52 & + & 51 & & \\
= & 101 & + & 101 & + & 101 & + & & \ldots & & + & 101 & = & 101 \cdot 50 = 5050
\end{array}$$

Dieser Ansatz steckt auch implizit in der soeben bewiesenen Formel:

$$\sum_{k=1}^{100} k = 101 \cdot \tfrac{100}{2} = 5050.$$

[1] Carl Friedrich Gauß (1777–1855), Mathematiker und Physiker in Göttingen, leistete entscheidende Beiträge in vielen Bereichen der Mathematik.

Satz I.4.4. *Seien M und N nichtleere Mengen mit n Elementen. Dann existieren genau*

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \text{ } (n\text{-}Fakultät)$$

bijektive Abbildungen von M nach N.

Beweis. (Induktion nach n).
(A) $n = 1$: Dann gilt $|M| = |N| = 1$ und es gibt genau eine Bijektion.
(S) Sei $M = \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ und $N = \{y_1, \ldots, y_{n+1}\}$, wobei alle x_j bzw. y_k jeweils paarweise verschieden seien. Ist $f : M \to N$ eine Bijektion, so gibt es für $f(x_{n+1})$ genau $n + 1$ Möglichkeiten. Ist $f(x_{n+1})$ gegeben, so ist die eingeschränkte Abbildung

$$f|_{\{x_1,\ldots,x_n\}} \to N \setminus \{f(x_{n+1})\}$$

eine Bijektion. Hierfür gibt es nach Induktionsannahme $n!$ Möglichkeiten, da $|\{x_1, \ldots, x_n\}| = n$ und $|N \setminus \{f(x_{n+1})\}| = n$ gilt. Insgesamt ergeben sich so $(n + 1) \cdot n! = (n + 1)!$ Möglichkeiten. ■

Bemerkung I.4.5. (a) Eine Bijektion $f : M \to M$ der Menge M auf sich nennt man eine *Permutation*. Es gibt also $n!$ Permutationen einer n-elementigen Menge.

(b) Für den Spezialfall $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ ist eine Bijektion $f : M \to N$ eine Aufzählung der Menge N als $N = \{f(1), \ldots, f(n)\}$. Es gibt nach Satz I.4.4 also genau $n!$ verschieden Anordnungen der Menge N. Konkret kann man dies folgendermaßen interpretieren: Hat man eine Menge N von n Büchern, so gibt es $n!$ Möglichkeiten, diese Bücher in einem Regal nebeneinander aufzustellen.

(c) Der Satz I.4.4 bleibt für $M = N = \emptyset$ richtig, wenn wir

$$0! := 1$$

setzen. ■

Definition I.4.6. Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \quad , \quad \binom{\alpha}{0} := 1.$$

Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0$, so ist

$$\binom{\alpha}{n} = \begin{cases} \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} & \text{für } 0 \leq n \leq \alpha \\ 0 & \text{für } n > \alpha, \end{cases}$$

denn

$$\begin{aligned} \frac{\alpha!}{n!(\alpha-n)!} &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \frac{(\alpha-n)\cdots 2\cdot 1}{(\alpha-n)\cdots 2\cdot 1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} \end{aligned}$$

■

Satz I.4.7. (Additionstheorem für Binomialkoeffizienten) *Für* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *und* $n \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\binom{\alpha}{n} = \binom{\alpha - 1}{n - 1} + \binom{\alpha - 1}{n}.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
\binom{\alpha-1}{n-1} + \binom{\alpha-1}{n} &= \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-1-(n-1)+1)}{(n-1)!} + \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \\
&= \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} + \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!} \\
&= \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} \left(1 + \frac{\alpha-n}{n}\right) \\
&= \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{(n-1)!} \, \frac{\alpha}{n} \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}
\end{aligned}$$

■

Eine leicht eingängige Möglichkeit, sich kleine Werte der Binomialkoeffizienten schnell zu besorgen, stellt das *Pascalsche Dreieck* dar. In ihm ergeben sich die Einträge nach der gerade bewiesenen Formel als Summe der diagonal darüberstehenden:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & & & \binom{n}{0} & & & & \\
 & & & & & & & \swarrow & & \binom{n}{1} & & & \\
 & & & & & & 1 & & \swarrow & & \binom{n}{2} & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & \swarrow & & \ddots & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
\iddots & & & & & & & & & & & & \ddots
\end{array}$$

Man sieht, wie die Binomialkoeffizienten angeordnet sind:

$$\begin{array}{ccc}
\binom{n-1}{k-1} & & \binom{n-1}{k} \\
\searrow & + & \swarrow \\
 & \binom{n}{k} &
\end{array}$$

Satz I.4.8. *Eine Menge M mit m Elementen hat $\binom{m}{n}$ Teilmengen mit n Elementen. Insbesondere ist $\binom{m}{n} \in \mathbb{N}_0$ für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. (Durch Induktion nach m).
(A) Ist $m = 0$, so ist

$$\binom{m}{n} = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Behauptung ist also richtig, da $M = \emptyset$ nur eine Teilmenge mit 0 Elementen hat.

(S) Wir nehmen nun an, dass die Behauptung für Mengen mit m Elementen gilt (Induktionsannahme). Sei jetzt $|M| = m + 1$ und $x_0 \in M$. Dann ist $M = \{x_0\} \cup (M \setminus \{x_0\})$ und $|M \setminus \{x_0\}| = m$. Für eine n-elementige Teilmenge $N \subseteq M$ gibt es zwei Fälle:

(1) $x_0 \in N$. Dann ist $N \cap (M \setminus \{x_0\})$ eine $(n-1)$-elementige Teilmenge. Nach Induktionsannahme gibt es hierfür $\binom{m}{n-1}$ Möglichkeiten.

(2) $x_0 \notin N$. Dann ist $N \subseteq M \setminus \{x_0\}$. Hierfür gibt es $\binom{m}{n}$ Möglichkeiten.
Insgesamt gibt es also

$$\binom{m}{n-1} + \binom{m}{n} = \binom{m+1}{n}$$

Möglichkeiten. ■

Man kann den gerade bewiesenen Sachverhalt auch kombinatorisch interpretieren: Man betrachtet die verschiedenen Möglichkeiten, die Elemente einer Menge $M = \{x_1, \ldots, x_m\}$ anzuordnen. Das geht auf $m!$ Weisen. Ist die Menge der ersten n Elemente $N := \{x_1, \ldots, x_n\}$ festgelegt, so gibt es $n!(m-n)!$ Möglichkeiten der Anordnung. Insgesamt ergeben sich also

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

Möglichkeiten, n Elemente aus M herauszunehmen, da jeweils $n!(m-n)!$ Anordnungen die gleiche Teilmenge liefern.

Satz I.4.9. (Binomischer Lehrsatz) *Für $x, y \in \mathbb{Q}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}.$$

Beweis. (durch vollständige Induktion nach m) (A) Für $n = 0$: $(x+y)^n =$

$1 = \sum_{k=0}^{0} \binom{n}{k} x^0 y^0$ ist wahr. Für den Induktionsschluss (S) rechnen wir:

$$
\begin{aligned}
&(x+y)^{n+1} \\
&= (x+y)(x+y)^n \\
&\overset{\text{Ann.}}{=} (x+y)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1} \cdot y^{n-k} \;+\; \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n+1-k} \\
&= \binom{n}{n} x^{n+1} y^0 \;+\; \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} \cdot y^{n-k} \;+\; \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n+1-k} \;+\; \binom{n}{0} x^0 y^{n+1} \\
&= x^{n+1} \;+\; \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k \cdot y^{n+1-k} \;+\; \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot y^{n+1-k} \;+\; y^{n+1} \\
&= x^{n+1} \;+\; \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right) x^k \cdot y^{n+1-k} \;+\; y^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 \;+\; \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k \cdot y^{n+1-k} \;+\; \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k \cdot y^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

■

Auch hier kann man eine kombinatorische Interpretation finden. In der Summe

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)(x+y)\cdots(x+y) \quad (n \text{ Faktoren}) \\
&= x^n + x^{n-1}y + \ldots
\end{aligned}
$$

kommt der Term $x^k y^{n-k}$ genau $\binom{n}{k}$-mal vor, da es genau $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten gibt, aus der n-elementigen Menge der Faktoren eine k-elementige auszuwählen.

Aufgabe I.4.1. Zeigen Sie: Für eine Selbstabbildung $f\colon M \to M$ einer endlichen Menge M sind folgende Aussagen äquivalent:

(1) f ist bijektiv.
(2) f ist injektiv.
(3) f ist surjektiv. ■

Aufgabe I.4.2. Sei M eine k-elementige Menge und N eine n-elementige Menge. Zeigen Sie:

(1) Es gibt
$$\prod_{j=0}^{k-1}(n-j) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$$
injektive Abbildungen $f\colon M \to N$. Was passiert für $k > n$?

(2) Es gibt n^k Abbildungen $f\colon M \to N$. ■

II. Die reellen Zahlen

In diesem Kapitel wenden wir uns dem Hauptgegenstand der Analysis, der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen, zu. Wir stellen uns die reellen Zahlen als eine "kontinuierliche Zahlengerade" vor, mit der wir messen und Geometrie treiben wollen. Die rationalen Zahlen sind dafür nicht ausreichend, denn mit ihnen lässt sich nicht einmal die Diagonale eines Einheitsquadrats messen, die bekanntlich die Länge $\sqrt{2}$ besitzt, und diese Zahl ist irrational. Wir werden im Verlauf der Vorlesung noch viele Gründe dafür kennenlernen, dass die reellen Zahlen einen minimalen Zahlbereich bilden, der den Anforderungen der Analysis gerecht wird. Es gibt durchaus größere Zahlbereiche, mit denen man Analysis treiben kann (Nonstandard Analysis), und andere Zahlbereiche (p-adische Zahlen), die zwar allen metrischen Anforderungen genügen, aber nicht zum Messen geeignet sind. Diese Zahlbereiche sind Gegenstand der p-adischen Analysis bzw. der Algebra.

Was sind die reellen Zahlen und welche Struktur tragen sie? Um dies zu verstehen, betrachten wir zunächst die bekannten Strukturen auf der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen.

Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen trägt mehrere Strukturen:

(1) Die *Addition:*

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \mapsto \frac{ad + bc}{bd}$$

(2) Die *Multiplikation:*

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \mapsto \frac{ac}{bd}$$

(3) Eine dritte Struktur ist durch die *Ordnungsrelation* $<$ auf $\mathbb{Q}$ gegeben:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \Longleftrightarrow \quad bc - ad \in \mathbb{N}$$

(beachte: $b, d \in \mathbb{N}$).

Gegenstand dieses Abschnitts sind diese drei Strukturen, ihre Eigenschaften, und wie man sie auf die reellen Zahlen übertragen kann. Hierbei werden wir der axiomatischen Methode folgen, d.h., wir werden einzelne Eigenschaften bzw. Rechenregeln als *Axiome* formulieren, die in dem Bereich, den wir jeweils betrachten, gelten sollen. Dies führt uns zu vielen Strukturen, die in der Mathematik eine zentrale Rolle spielen. Die reellen Zahlen samt der drei Strukturen

(Addition, Multiplikation und Ordnung) werden schließlich durch eine Liste von Axiomen, die sich auf diese Strukturen beziehen, (eindeutig) als *vollständig angeordneter Körper* charakterisiert.

II.1 Axiome der Arithmetik

Axiome der Addition

Wir betrachten zuerst die Axiome der Addition bzw. den Begriff der abelschen Gruppe.

Definition II.1.1. Ein Paar $(G, *)$ aus einer Menge G und einer Abbildung

$$*\colon G \times G \to G, \ (x, y) \mapsto x * y$$

heißt *Gruppe*, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

(A) *Assoziativgesetz:* $(\forall x, y, z \in G)\, x * (y * z) = (x * y) * z$.

(N) *Neutrales Element:*$(\exists e \in G)(\forall x \in G)\ x * e = e * x = x$.

(I) *Existenz eines Inversen:* $(\forall x \in G)(\exists y \in G)\, x * y = y * x = e$.

Man sagt dann auch, dass die (binäre) Operation $*$ auf G die Struktur einer Gruppe definiert.

Gilt zusätzlich das

(K) *Kommutativgesetz:* $(\forall x, y \in G)\, x * y = y * x$,

so spricht man von einer *abelschen Gruppe*. In diesem Fall schreiben wir in der Regel $+$ statt $*$ für die Gruppenoperation und 0 statt e für das neutrale Element, das man dann auch *Nullelement* nennt. ■

Beispiel II.1.2. (a) Einfache Beispiele für abelsche Gruppen sind $(\mathbb{Z}, +)$ und $(\mathbb{Q}, +)$. Warum ist $(\mathbb{N}, +)$ keine abelsche Gruppe? Welche Axiome sind verletzt? Ein weiteres Beispiel ist $(\mathbb{Q}^\times, \cdot)$, wobei $\mathbb{Q}^\times := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ist.

(b) Wir betrachten die zweielementige Menge $\mathbb{F} := \{0, 1\}$ mit der Addition modulo 2:

$$0 + 0 := 1 + 1 := 0 \quad \text{und} \quad 0 + 1 := 1 + 0 := 1.$$

Dann ist $(\mathbb{F}, +)$ eine abelsche Gruppe. ■

Aus den 4 Axiomen (A),(N),(I) und (K) einer abelschen Gruppe lassen sich weitere Eigenschaften ableiten, die wir uns nun anschauen. Man kann sich überlegen, dass keines der 4 Axiome aus den drei anderen folgt. In diesem Sinn bilden sie ein minimales System.

Bemerkung II.1.3. Sei $(A, +)$ eine abelsche Gruppe. Wir halten einige Folgerungen aus den Axiomen fest:
(1) Eindeutigkeit des Nullelements: Sind 0 und $0'$ Nullelemente von A, so gilt $0 = 0 + 0' = 0'$ und folglich $0 = 0'$.
(2) Eindeutigkeit des Inversen: Sind y und y' invers zu x, so gilt

$$y \overset{\text{(N)}}{=} y + 0 \overset{\text{(I)}}{=} y + (x + y') \overset{\text{(A)}}{=} (y + x) + y' \overset{\text{(I)}}{=} 0 + y' \overset{\text{(N)}}{=} y'.$$

Da das Inverse des Elements $x \in A$ eindeutig bestimmt ist, ist es sinnvoll, dieses Element mit $-x$ zu bezeichnen. Weiter definieren wir

$$x - y := x + (-y).$$

(3) $0 = -0$: Dies folgt wegen $0 + 0 = 0$ aus (2).
(4) Für alle $x \in A$ gilt $-(-x) = x$ aufgrund der Symmetrie von (I).
(5) Für alle $x, y \in A$ gilt $-(x + y) = -y - x$:

$$\begin{aligned}(x + y) + (-y - x) &\overset{\text{(A)}}{=} x + (y + (-y - x)) \overset{\text{(A)}}{=} x + ((y - y) - x) \\ &\overset{\text{(I)}}{=} x + (0 - x) \overset{\text{(N)}}{=} x - x \overset{\text{(I)}}{=} 0.\end{aligned}$$

Aus (2) folgt somit $-y - x = -(x + y)$.
(6) (Subtraktion bei Gleichungen) Es gilt $x + a = b \Leftrightarrow x = b - a$:
„ $\Rightarrow$ “: Es gilt $x \overset{\text{(N)}}{=} x + 0 \overset{\text{(I)}}{=} x + (a - a) \overset{\text{(A)}}{=} (x + a) - a = b - a$.
„ $\Leftarrow$ “: Aus $x = b - a$ folgt $x + a = (b - a) + a \overset{\text{(A)}}{=} b + (-a + a) \overset{\text{(I)}}{=} b + 0 \overset{\text{(N)}}{=} b$. ∎

Axiome der Multiplikation

Definition II.1.4. Ist K eine Menge mit zwei Verknüpfungen (Abbildungen)

$$K \times K \to K,\ (x, y) \mapsto x + y \quad \text{und} \quad K \times K \to K,\ (x, y) \mapsto x \cdot y,$$

so heißt K bzw. das Tripel $(K, +, \cdot)$ *Körper*, falls $(K, +)$ eine abelsche Gruppe ist und für die Multiplikation folgende Axiome gelten
(MA) *Assoziativgesetz:* $(\forall x, y, z \in K)\, x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
(MK) *Kommutativgesetz:* $(\forall x, y \in K)\, x \cdot y = y \cdot x$
(E) *Einselement:* $(\exists 1 \in K)\big((1 \neq 0) \wedge (\forall x \in K)\ x \cdot 1 = 1 \cdot x = x\big)$
(MI) *Existenz eines Inversen:* $(\forall x \in K \setminus \{0\})\, (\exists y \in K)\, x \cdot y = y \cdot x = 1$.
Weiter seien Addition und Multiplikation verbunden durch das
(D) *Distributivgesetz*: $(\forall x, y, z \in K)\, x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. ∎

Man lässt bei der Multiplikation aus Bequemlichkeitsgründen üblicherweise den Punkt weg und schreibt xy anstatt $x \cdot y$.

Bemerkung II.1.5. Wir halten wieder einige Folgerungen aus den Körperaxiomen fest:
(7) Es gilt $0 \cdot x = 0 = x \cdot 0$ für alle $x \in K$:

$$x \cdot 0 \overset{(N)}{=} x \cdot (0+0) \overset{(D)}{=} x \cdot 0 + x \cdot 0 \overset{(6)}{\Longrightarrow} x \cdot 0 = x \cdot 0 - x \cdot 0 = 0.$$

(8) Wir schreiben $K^\times := K \setminus \{0\}$. Dann ist $(K^\times, \cdot)$ eine abelsche Gruppe: Zuerst müssen wir zeigen, dass die Multiplikation die Menge $K^\times \times K^\times$ nach $K^\times$ abbildet. Sind $x, y \in K^\times$ und x' bzw. y' jeweils multiplikative Inverse von x bzw. y, so erhalten wir wie in (6) zunächst

$$(xy)(y'x') \overset{(MA)}{=} x\big(y(y'x')\big) \overset{(MA)}{=} x\big((yy')x'\big) \overset{(MI)}{=} x\big(1x'\big) \overset{(E)}{=} xx' \overset{(MI)}{=} 1.$$

Wegen (7) und $0 \neq 1$ ist daher $xy \neq 0$. Also ist die Multiplikationsabbildung

$$\cdot : K^\times \times K^\times \to K^\times, \quad (x,y) \mapsto x \cdot y$$

definiert, da für $x, y \in K^\times$ das Produkt xy wieder in $K^\times$ liegt. Die Axiome (MA), (MK) und (E) liefern Assoziativität, Kommutativität und das neutrale Element (Nullelement), das in diesem Fall das Element 1 ist. Zur Existenz des Inversen: Ist $x \in K^\times$ und $y \in K$ mit $xy = 1$, so ist $y \neq 0$ wegen (7), da sonst $1 = x \cdot y = x \cdot 0 = 0$ gelten würde. Damit ist $y \in K^\times$, d.h., in $K^\times$ ist die Existenz eines Inversen gesichert.

Aus (1) bis (6) folgt jetzt: (9) Eindeutigkeit des Einselements (wegen (1)).
(10) Eindeutigkeit des multiplikativen Inversen. Man bezeichnet das multiplikative Inverse von $x \neq 0$ mit x^{-1} oder $\frac{1}{x}$. Weiter definieren wir für $y \neq 0$

$$\frac{x}{y} := xy^{-1}.$$

(11) $1 = 1^{-1}$ (wegen (3)).
(12) Für alle $x \neq 0$ gilt $(x^{-1})^{-1} = x$ (wegen (4)).
(13) Für $x, y \in K^\times$ ist $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$: Das haben wir schon unter (8) gezeigt. Es folgt aber auch mit (8) aus (5).
(14) Für $a \neq 0$ gilt $xa = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{a}$:
„$\Rightarrow$“: Aus $xa = b$ folgt $\frac{b}{a} = ba^{-1} = (xa)a^{-1} \overset{(MA)}{=} x(aa^{-1}) \overset{(MI)}{=} x1 \overset{(E)}{=} x$, also $x = \frac{b}{a}$.
„$\Leftarrow$“: Aus $x = \frac{b}{a}$ folgt umgekehrt $xa = (ba^{-1})a \overset{(MA)}{=} b(a^{-1}a) \overset{(MI)}{=} b1 \overset{(E)}{=} b$, also $xa = b$.
(15) Für alle $x, y \in K$ gilt $(-x)y = -(xy)$:

$$xy + (-x)y \overset{(D)}{=} (x + (-x))y \overset{(N)}{=} 0 \cdot y \overset{(7)}{=} 0,$$

also $(-x)y = -(xy)$.

(16) Für alle $x, y \in K$ gilt $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$: Wegen (15) gilt

$$(-x)(-y) \overset{(15)}{=} -(x \cdot (-y)) \overset{(\mathrm{MK})}{=} -((-y) \cdot x) \overset{(15)}{=} -(-(yx)) \overset{(5)}{=} yx \overset{(\mathrm{MK})}{=} xy. \qquad \blacksquare$$

Aufgabe II.1.1. Sei K ein Körper und

$$L := K^2 = \{(a,b) \colon a, b \in K\}.$$

Auf L definieren wir Addition und Multiplikation durch

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d), \qquad \text{und} \qquad (a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, bc + ad).$$

Weiter definieren wir eine Funktion

$$N \colon L \to K, \quad (a,b) \mapsto a^2 + b^2.$$

Zeigen Sie:

(1) $N(xy) = N(x)N(y)$ für $x, y \in L$.

(2) $(L, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(3) Für $x = (a,b)$ mit $N(x) \neq 0$ ist

$$x^{-1} := \Big(\frac{a}{N(x)}, -\frac{b}{N(x)}\Big)$$

ein multiplikatives Inverses.

(4) $(L, +, \cdot)$ ist genau dann ein Körper, wenn $N(x) \neq 0$ für alle $x \neq (0,0)$ in L gilt.

(5) $(L, +, \cdot)$ ist genau dann ein Körper, wenn $a^2 \neq -1$ für alle $a \in K$ gilt, d.h. wenn -1 in K kein Quadrat ist. $\blacksquare$

Aufgabe II.1.2. Wir betrachten die vier Axiome (A), (N), (I) und (K) für abelsche Gruppen. Finde Paare $(M, *)$, wobei $*$ eine Abbildung $M \times M \to M, (x,y) \mapsto x * y$ ist, die jeweils folgenden Bedingungen genügen:

(1) (A), (N), (I), $\neg$ (K).

(2) (A), (N), (K), $\neg$ (I).

(3) (N), (K), (I), $\neg$ (A).

In diesem Sinn sind diese Bedingungen voneinander unabhängig, aber natürlich macht (I) nur Sinn, wenn (N) erfüllt ist. $\blacksquare$

II.2 Anordnung

Nachdem wir die Axiome für Addition und Multiplikation kennengelernt haben, wenden wir uns nun Anordnungen auf Körpern zu. Hierbei haben wir zu klären, in welchem Sinne diese Anordnungen mit Addition und Multiplikation verträglich sein sollen.

Definition II.2.1. Ein Paar (K, K_+) aus einem Körper K und einer Teilmenge K_+ heißt *angeordneter Körper*, wenn folgende Axiome gelten:

(O1) Für alle $x \in K$ gilt genau eine der Aussagen

$$x \in K_+, \quad -x \in K_+ \quad \text{oder} \quad x = 0.$$

(O2) Für alle $x, y \in K_+$ ist $x + y \in K_+$.

(O3) Für alle $x, y \in K_+$ ist $x \cdot y \in K_+$.

Die Elemente in K_+ heißen *positiv*. Wir schreiben für $x \in K_+$ auch $x > 0$. Weiter definieren wir folgende Relationen auf K:

- $x > y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y > 0$,
- $x \geq y \quad :\Leftrightarrow \quad (x > y) \vee (x = y)$,
- $x < y \quad :\Leftrightarrow \quad y > x$ und
- $x \leq y \quad :\Leftrightarrow \quad y \geq x$. ■

Denkt man daran, dass K eingentlich nur die Menge ist, die dem Körper $(K, +, \cdot)$ unterliegt, so sollte man ausführlicher eine angeordneten Körper ausführlicher als Quadrupel $(K, +, \cdot, K_+)$ schreiben. Ein solcher *Bezeichnungsmissbrauch* ist oft bequem und daher in der Mathematik sehr gebräuchlich.

Beispiel II.2.2. Für $\mathbb{Q}_+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ ist das Paar $(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+)$ ein angeordneter Körper (Nachweis!). ■

Von nun an steht K bzw. (K, K_+) immer für einen angeordneten Körper.

Satz II.2.3. (Anordnungseigenschaften)

(Ver) *Vergleichbarkeit: Es gilt genau eine der Aussagen*

$$x < y, \quad x = y \quad \text{oder} \quad x > y.$$

(Tr) *Transitivität: Gilt $x < y$ und $y < z$, so auch $x < z$.*

(Ad) *Verträglichkeit mit der Addition:*

$$(x < y) \wedge (z \leq w) \Rightarrow x + z < y + w.$$

$(\text{Mul})_+$ *Verträglichkeit mit der Multiplikation:*

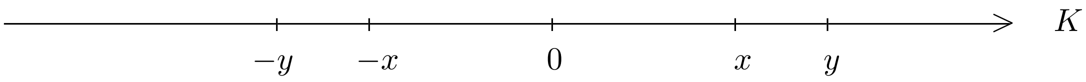
$$(x < y) \wedge (z > 0) \Rightarrow zx < zy.$$

(Neg) *Ist* $x < y$, *so ist* $-x > -y$.

Man erhält die gleichen Regeln für $\leq$ und $\geq$ statt $<$ und $>$ mit Ausnahme von (Ver); diese wird zu

(Verg) *Es gilt* $x \leq y$ *oder* $y \geq x$*; gilt beides, so folgt daraus* $x = y$.

Beweis. (Ver) wird durch Einsetzen der Definitionen zu $y - x > 0$ oder $y - x = 0$ oder $y - x < 0$; dies ist gerade (O1).
(Tr): Aus $y - x > 0$ und $z - y > 0$ folgt wegen (O2) $z - x = (z - y) + (y - x) > 0$, also $x < z$.
(Ad): Wir haben $y + w - (x + z) = (y - x) + (w - z) > 0$.
$(\text{Mul})_+$: Aus $y - x > 0$ und $z > 0$ folgt wegen (O3) $z(y - x) = zy - zx > 0$, also $zx < zy$.
(Neg) folgt aus (Ad) Ist $x < y$, d.h. $y - x > 0$, so ist auch $(-x) - (-y) = -x + y = y - x > 0$, also $-x > -y$.
(Verg) ist klar. ■



Satz II.2.4. (Multiplikative Regeln) *Es gelten für alle* $x, y, z \in K$*:*

(i) $x < y, z < 0 \quad \Rightarrow \quad zx > zy$.
(ii) *Für* $0 \neq x \in K$ *ist* $x^2 > 0$. *Insbesondere ist* $1 > 0$.
(iii) $x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$.
(iv) $xy > 0 \Rightarrow (x < y \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y})$.

Beweis. (i) Wegen (Neg) ist $-z > 0$, also $(-z)x < (-z)y$ wegen $(\text{Mul})_+$, d.h. $-zx < -zy$, also $zy < zx$ wegen (Neg).

(ii) Ist $x > 0$, so ist $x^2 > 0$. Andernfalls ist $-x < 0$ und $x^2 = (-x)^2 > 0$ wegen Bemerkung II.1.5(16).

(iii) Wegen $(x^{-1})^2 > 0$ ist $x^{-1} = x(x^{-1})^2 > 0$ wegen (O3).

(iv) Multiplikation mit $(xy)^{-1} > 0$ liefert

$$x < y \Leftrightarrow x \cdot (xy)^{-1} < y \cdot (xy)^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$$ ■

Bemerkung II.2.5. Die Anordnung eines Körpers K hat auch arithmetische Konsequenzen. Insbesondere lässt sich nicht jeder Körper anordnen:

Wegen $1 > 0$ und (Neg) ist $-1 < 0$. Also ist $x^2 \neq -1$ für alle $x \in K$ und somit -1 kein Quadrat in K. Hieraus schließen wir insbesondere, dass die Konstruktion aus Aufgabe II.1 für jeden angeordneten Körper K einen Körper L liefert, dessen zugrundeliegende Menge K^2 ist. ■

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in K$ setzen wir

$$nx := \sum_{j \in \{1,2,\ldots,n\}} x = \underbrace{x + \ldots + x}_{n \text{ mal}}.$$

Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$ setzen wir $nx := -(-nx)$.

Bemerkung II.2.6. (Einbettung von $\mathbb{Q}$ in angeordnete Körper) Ist K ein angeordneter Körper und $n \in \mathbb{N}$, so ist $n \cdot 1 = 1 + \ldots + 1$ (n mal) positiv und daher nie 0. Weiter gilt $(nm) \cdot 1 = (n \cdot 1)(m \cdot 1)$ $(n+m) \cdot 1 = n \cdot 1 + n \cdot 1$ für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ (Nachweis durch vollständige Induktion für $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$ und dann Berücksichtigung der Vorzeichen!). Sind $a, c \in \mathbb{Z}$ und $b, d \in \mathbb{N}$ mit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, d.h. $ad = bc$, so ist $(a \cdot 1)(d \cdot 1) = (ad) \cdot 1 = (bc) \cdot 1 = (b \cdot 1)(c \cdot 1)$ und daher $(a \cdot 1) \cdot (b \cdot 1)^{-1} = (c \cdot 1) \cdot (d \cdot 1)^{-1}$. Wir erhalten daher eine Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{Q} \to K, \quad \frac{a}{b} \mapsto (a \cdot 1) \cdot (b \cdot 1)^{-1},$$

denn die rechte Seite hängt nicht von der Darstellung des Bruches $\frac{a}{b}$ ab. Man rechnet leicht nach, dass

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{Q} \tag{2.1}$$

gelten. Ist $\varphi(\frac{a}{b}) = 0$, so ist $a \cdot 1 = 0$ und daher $a = 0$, denn für $a > 0$ ist $a \cdot 1 > 0$ und für $a < 0$ ist $-(a \cdot 1) = (-a) \cdot 1 > 0$. Hieraus schließen wir, dass φ injektiv ist, denn aus $\varphi(\frac{a}{b}) = \varphi(\frac{c}{d})$ folgt $0 = \varphi(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}) = \varphi(\frac{ad-bc}{cd})$ und daher $ad = bc$, d.h. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Eine injektive Abbildung $\varphi\colon \mathbb{Q} \to K$ für die (2.1) gilt, nennt man eine *Körpereinbettung* oder einen *Homomorphismus von Körpern*. Wir haben also den Körper $\mathbb{Q}$ durch φ in K eingebettet und dürfen ihn uns in diesem Sinn als einen *Unterkörper* von K vorstellen, d.h. als eine Teilmenge von K, die unter Addition und Multiplikation abgeschlossen ist und diesbezüglich einen Körper bildet. In diesem Sinn schreiben wir auch kurz $\frac{a}{b}$ für $\frac{a \cdot 1}{b \cdot 1}$.

Obige Argumente zeigen also, dass jeder angeordenete Körper K den Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen als Unterkörper enthält. ■

Definition II.2.7. Wir wollen einige der in diesem Paragraphen eingeführten Operationen und Relationen auf Mengen erweitern.

(a) Zu diesem Zweck definieren wir für Mengen $M, N \subseteq K$ und Zahlen $x \in K$:
(1) $M + N := \{m + n\colon m \in M, n \in N\}$
(2) $M \cdot N := \{m \cdot n\colon m \in M, n \in N\}$ und $-M := (-1) \cdot M = \{-m\colon m \in M\}$.
(3) $x \leq M :\Leftrightarrow (\forall m \in M)\, x \leq m$
(4) $x \geq M$, $x < M$ und $x > M$ (analog)

Einige Eigenschaften der Addition und Multiplikation von Elementen von K übertragen sich auf die entsprechenden Operationen für Mengen; so gilt beispielsweise

$$M + N = N + M \quad \text{und} \quad (M + N) + U = M + (N + U).$$

Enthält M mehr als ein Element, so gibt es keine Menge N, für die $M + N = \{0\}$ gilt (Nachweis!).

(b) Ein $x \in K$ mit $x \leq M$ heißt *untere Schranke von* M und ein $x \in K$ mit $M \leq x$ *obere Schranke von* M (vgl. Definition II.2.11). Die Menge M heißt *nach oben* bzw. *nach unten beschränkt*, falls M eine obere bzw. untere Schranke hat. Ist M nach oben und nach unten beschränkt, so heißt M *beschränkt*. ■

Maximum und Minimum

In diesem Abschnitt sei K ein angeordneter Körper.

Definition II.2.8. Sei $M \subseteq K$. Ein Element $x \in M$ heißt *Maximum*, wenn $M \leq x$ gilt. Sind $x, y \in M$ Maxima, so gilt $x \leq y \leq x$, also $x = y$. In diesem Sinn sind Maxima eindeutig bestimmt. Wir schreiben daher

$$x = \max(M),$$

wenn x ein Maximum der Menge M ist. Analog bezeichnet man ein Element $y \in M$ als *Minimum*, wenn $y \leq M$ ist und schreibt $y = \min(M)$. ■

Beispiel II.2.9. (a) Sind $x, y \in K$, so gilt $\max\{x,y\} = \begin{cases} x & \text{für } x \geq y \\ y & \text{für } x \leq y. \end{cases}$ Insbesondere existiert das Maximum jeder zweielementigen Teilmenge von K.

(b) Nicht jede Teilmenge von K mit einer oberen Schranke besitzt ein Maximum. Wir betrachten hierzu die Menge

$$M := \{x \in K : x < 0\}.$$

Für jedes $x \in M$ ist $2x < x < 0$, also $x < \frac{x}{2} < 0$. Wir schließen hieraus, dass M kein Maximum besitzt, obwohl 0 eine obere Schranke ist. ■

Satz II.2.10. *Seien $M, N \subseteq K$ Teilmengen für die $\max M$ und $\max N$ existieren. Dann gilt:*

(1) $M \subseteq N \Longrightarrow \max(M) \leq \max(N)$

(2) $\max(M + N) = \max(M) + \max(N)$

(3) $M, N \geq 0 \Rightarrow \max(M \cdot N) = \max(M) \cdot \max(N)$.

(4) $\max(M \cup N) = \max\{\max(M), \max(N)\}$.

(5) $\min(M) = -\max(-M)$*, falls* $\max(-M)$ *existiert.*

(6) $\min(M \cup N) = \min\{\min(M), \min(N)\}$*, falls* $\min(M)$ *und* $\min(N)$ *existieren.*

Beweis. (1) Wegen $M \leq \max(N)$ ist auch $\max(M) \leq \max(N)$.

(2) Sei $m := \max(M)$ und $n := \max(N)$. Für $a \in M$ und $b \in N$ ist dann $a \leq m$ und $b \leq n$, also $a+b \leq m+n$, d.h. $M+N \leq m+n$. Aus $m+n \in M+N$ folgt somit $m + n = \max(M + N)$.

(3) Analog zu (2).

(4) Seien wieder $m := \max(M)$ und $n := \max(N)$. Dann ist $\max\{m,n\} \in M \cup N$ und für $a \in M, b \in N$ gilt $a, b \leq \max\{m,n\}$; daher ist

$$\max\{m,n\} = \max(M \cup N).$$

(5) Es gilt $-\max(-M) \in -(-M) = M$. Zu zeigen ist noch

$$-\max(-M) \leq M.$$

Sei also $n \in M$. Dann ist $-n \in -M$, also $\max(-M) \geq -n$. Also ist $-\max(-M) \leq n$.

(6) zeigt man analog zu (4). ∎

Satz II.2.11. *Jede endliche Teilmenge $M \subseteq K$ besitzt ein Maximum.*

Beweis. Wir beweisen diese Behauptung über vollständige Induktion nach der Anzahl n der Elemente von M.
(A) Induktionsanfang: $|M| = 1$, d.h. $M = \{x\}$. Dann ist $\max M = x$.
(S) Induktionsannahme: Die Behauptung gelte für Mengen N mit n Elementen und M habe $n+1$ Elemente. Dann ist $M \neq \emptyset$ und folglich gibt es ein $x \in M$. Sei $M' := M \setminus \{x\}$. Dann ist $|M'| = n$, so dass nach der Induktionsannahme das Maximum $\max(M')$ existiert. Dann existiert auch $\max(M) = \max(M' \cup \{x\}) = \max\{\max(M'), x\}$ (Satz II.2.10(4)). ∎

Wendet man Satz II.2.11 auf die endliche Menge $-M$ an, so sieht man natürlich auch, dass jede endliche Menge M ein Minimum besitzt (Satz II.2.10(5)). Im folgenden schreiben wir daher

$$\max(x_1, \ldots, x_n) := \max\{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad \min(x_1, \ldots, x_n) := \max\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

Satz II.2.12. (Bernoullische[1] Ungleichung) *Für $x \in K$ mit $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$1 + nx \leq (1+x)^n.$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung über Induktion nach n.
(A) Für $n = 1$ gilt $1 + x = (1+x)^1$.
(S)

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\
&\overset{\text{Ann.}}{\geq} (1+x)(1+nx) \qquad \text{wegen } 1+x \geq 0 \\
&= 1 + x + nx + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2 \\
&\geq 1 + (n+1)x.
\end{aligned}$$

∎

Für $x \geq 0$ erhalten wir direkter

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + x^n \geq 1 + \binom{n}{1} x = 1 + nx.$$

Aufgabe II.2.1. (a) Zeigen Sie die *Ungleichung vom arithmetischen Mittel*: Für Elemente x, y eines angeordneten Körpers K gilt

$$x < y \quad \Rightarrow \quad x < \frac{x+y}{2} < y.$$

---

[1] Jacob Bernoulli (1654–1705), Schweizer Mathematiker und Physiker in Basel.

Hinweis: Zeige, dass für $2 = 1 + 1$ die Beziehung $1 > \frac{1}{2} > 0$ gilt.

(b) Für $0 < x < y$ und alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $0 < x^k < y^k$. Hinweis: Vollständige Induktion. ■

Aufgabe II.2.2. (a) Zeigen Sie: Für $n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in K$ mit $a \geq 0$ und $a + b \geq 0$ gilt $(a + b)^n \geq a^n + na^{n-1}b$.

(b) Aus $a, b \geq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ folgt $(a + b)^n \geq a^n + b^n$. ■

Das Vollständigkeitsaxiom

Das folgenden Konzept liefert einen Ersatz für fehlende Maxima und Minima von Mengen.

Definition II.2.13. (a) Für eine nach oben beschränkte Teilmenge $M \subseteq K$ definieren wir ihr *Supremum* (*obere Grenze*, *kleinste obere Schranke*)

$$\sup(M) := \min\{x \colon M \leq x\},$$

falls es existiert. Für nach unten beschränkte Teilmengen $M \subseteq K$ definieren wir ihr *Infimum* (*untere Grenze*, *größte untere Schranke*)

$$\inf(M) := \max\{x \colon x \leq M\},$$

falls es existiert.

Existiert $\max(M)$ und ist $M \leq x$, so ist auch $\max(M) \leq x$ und daher $\sup(M) = \max(M)$, d.h., das Maximum einer Menge ist eine kleinste obere Schranke, falls es existiert.

(b) Eine Menge, die keine obere Schranke besitzt, heißt *nach oben unbeschränkt*; wir schreiben dann $\sup(M) := \infty$. Analog setzt man $\inf(M) := -\infty$, wenn M *nach unten unbeschränkt* ist. Für die leere Menge setzt man $\sup(\emptyset) = -\infty$ und $\inf(\emptyset) = \infty$ (jedes Element ist obere und untere Schranke von $\emptyset$). ■

Lemma II.2.14. [1] *Sei $\emptyset \neq M \subseteq K$ nach oben beschränkt und $s \in K$. Dann ist $s = \sup(M)$ genau dann, wenn*

$$M \leq s \quad \text{und} \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in M) \;\; m > s - \varepsilon.$$

Beweis. $\Rightarrow$: Sei zunächst $s = \sup(M)$. Dann gilt trivialerweise $M \leq s$. Ist $\varepsilon > 0$, so ist $s - \varepsilon$ keine obere Schranke von M. Also existiert ein $m \in M$ mit $m > s - \varepsilon$.

$\Leftarrow$: Erfüllt s die angegebenen Bedingungen, so ist s eine obere Schranke von M und für kein $\varepsilon > 0$ ist $s - \varepsilon$ eine obere Schranke. Ist $x < s$, so ist $\varepsilon := s - x$ und $x = s - \varepsilon$, also ist x keine obere Schranke von M. Folglich ist s die kleinste obere Schranke von M, d.h. $s = \sup(M)$. ■

---

[1] Zur Terminologie: Mathematische Sachverhalte werden typischerweise in Sätzen formuliert. Sätze, die vorbereitender Natur sind, werden *Lemma* genannt. Das Wort Lemma (Pural: Lemmata) ist griechisch und bedeuetet Horn (weist in eine Richtung; vgl. Dilemma). Dagegen heißen Sätze, die mehr oder minder Konsequenzen eines vorausgegangenen Satzes sind, oft *Folgerung* oder *Korollar*. Besonders wichtige Sätze heißen *Theorem*.

Aufgabe II.2.3. Verallgemeinern Sie Satz II.2.10, indem Sie die entsprechenden Aussagen für Suprema bzw. Infima zeigen. Z.B. gilt

$$\sup(M+N) = \sup(M) + \sup(N),$$

falls alle Suprema existieren. ■

Definition II.2.15. (Vollständigkeitsaxiom) Ein angeordneter Körper $(K, +, \cdot, K_+)$ heißt *(ordnungs-)vollständig* oder *vollständig angeordnet*, wenn für jede nichtleere nach oben beschränkte Menge $M \subseteq K$ das Supremum existiert.■

Definition II.2.16. Eine Teilmenge $I \subseteq K$ heißt *Intervall*, wenn

$$x, z \in I, \quad x \leq y \leq z \quad \Rightarrow \quad y \in I$$

gilt, d.h., mit zwei Elementen x und z enthält I auch alle Elemente dazwischen. Für $a, b \in K$ erhält man spezielle Beispiele von Intervallen wie folgt:

$[a, b] := \{x \in K : a \leq x \leq b\}$ (*abgeschlossenenes* Intervall)
$[a, b[:= \{x \in K : a \leq x < b\}$ (*rechtsoffenes* Intervall)
$]a, b] := \{x \in K : a < x \leq b\}$ (*linksoffenes* Intervall)
$]a, b[:= \{x \in K : a < x < b\}$ (*offenes* Intervall).

Die Intervalleigenschaft dieser Mengen ergibt sich sofort aus der Transitivität der Ordnung (Satz II.2.3). Man beachte, dass diese Intervalle für $b < a$ alle leer sind. Für $b = a$ ist lediglich das abgeschlossene Intervall $[a, b] = \{a\}$ nicht leer. Weitere Beispiele für Intervalle sind

$]a, \infty] := \{x \in K : a < x\}$.
$[a, \infty[:= \{x \in K : a \leq x\}$.
$]-\infty, b] := \{x \in K : x \leq b\}$.
$]-\infty, b[:= \{x \in K : x < b\}$. ■

Bemerkung II.2.17. Sei $a < b$ in K. Alle Intervalle $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$ sind durch b nach oben beschränkt, d.h., b ist eine obere Schranke. Weiter ist

$$\max([a, b]) = \max(]a, b]) = b,$$

aber $\max([a, b[)$ und $\max(]a, b[)$ existieren nicht. In der Tat haben wir für $x \in]a, b[$ wegen der Ungleichung vom arithmetischen Mittel:

$$x < \frac{x + b}{2} < b,$$

so dass kein Element maximal ist. Allerdings ist

$$\sup([a, b[) = \sup(]a, b[) = b,$$

denn b ist die kleinste obere Schranke dieser Intervalle. Analog gilt

$$\min([a, b]) = \min([a, b[) = a = \inf(]a, b[) = \inf(]a, b[).$$ ■

Im weiteren werden wir einige Eigenschaften vollständig angeordneter Körper studieren. In folgenden steht K daher immer für einen vollständig angeordneten Körper.

Bemerkung II.2.18. (a) Ist die nichtleere Menge M nach unten beschränkt, so existiert $\inf(M)$: Ist M nach unten beschränkt, so ist $-M$ nach oben beschränkt und $x \leq M$ ist äquivalent zu $-M \leq -x$. Wegen dem Vollständigkeitsaxiom existiert $\sup(-M)$. Die Behauptung folgt nun aus

$$\begin{aligned} -\sup(-M) &= -\min\{a \colon a \geq -M\} \overset{\text{II.2.10}}{=} \max\{-a \colon a \geq -M\} \\ &= \max\{b \colon b \leq M\} = \inf(M). \end{aligned}$$

(b) Wir erinnern uns daran, dass wir $\mathbb{Z}$ mit der Teilmenge $\mathbb{Z} \cdot 1 \subseteq K$ identifizieren (Bemerkung II.2.6). Ist eine nichtleere Teilmenge $M \subseteq \mathbb{Z}$ nach oben bzw. nach unten beschränkt, so besitzt sie ein Maximum bzw. ein Minimum: Zunächst existiert $m := \sup(M)$. Gemäß Lemma II.2.14 existiert ein $x \in M$ mit $x > m - 1$. Für $y \in M$ ist nun $y \leq m < x + 1$ und daher $y \leq x$, wegen $x, y \in \mathbb{Z}$. Somit ist $x = \max(M) = m$. Analog zeigt man, dass eine nach unten beschränkte Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ein Minimum besitzt. ∎

Satz II.2.19. (Satz von Archimedes) *Ist K ein vollständig angeordneter Körper und $a, b, \in K$ mit $b > 0$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nb > a$.*

Beweis. Sei $M := \{nb \colon n \in \mathbb{N}\}$. Wir führen einen indirekten Beweis. Ist die Behauptung falsch, so ist $M \leq a$, die Menge M hat also nach dem Vollständigkeitsaxiom ein Supremum $s = \sup(M)$. Wegen Lemma II.2.14 existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $nb > s - b$. Dann ist $(n+1)b > s$, was der Annahme widerspricht. ∎

Einen Körper, in dem der Satz von Archimedes gilt, nennt man *archimedisch geordnet*, z.B. ist der geordnete Körper $(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}_+)$ archimedisch geordnet. Obiger Satz wird oft „Axiom des Archimedes“ genannt, da er als Axiom in der Geometrie der Griechen eine zentrale Rolle spielte. Bei uns folgt er aus dem Vollständigkeitsaxiom. Denkt man sich a und b als die Länge von Streckenstücken, so besagt er, dass man durch Aneinanderlegen einer ausreichend großen Zahl von Strecken der Länge b eine Strecke erhält, die länger als a ist. Da sich die Griechen positive Zahlen als etwas vorstellten, womit man Strecken messen kann, ist das Archimedische Axiom eine sehr natürliche Anforderung an diese „Meßzahlen“. Man kann zeigen, dass vollständig angeordnete Körper in einem gewissen Sinn maximal archimedisch angeordnet sind. Man kann sich das so vorstellen, dass sie die größtmöglichen Körper sind, mit denen man Streckenlängen messen kann.

Folgerung II.2.20. *Ist $a < b$, so enthält das Intervall $]a, b[$ eine rationale Zahl (vgl.* Bemerkung II.2.6*).*

Beweis. Wegen $b - a > 0$ existiert nach Archimedes (Satz II.2.19) eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $n(b - a) > 1$, also $\frac{1}{n} < b - a$. Weiter existiert $m := \max\{x \in \mathbb{Z} \colon x \leq na\}$ nach Bemerkung II.2.18(b). Dann ist $\frac{m}{n} \leq a$ und $\frac{m+1}{n} > a$, wegen der Maximalität von m. Andrerseits ist

$$\frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b$$

und somit $a < \frac{m+1}{n} < b$. Da offensichtlich $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Q}$ gilt, haben wir die Behauptung gezeigt. ∎

Wir kommen nun zur Existenz von Wurzeln aus positiven Elementen eines vollständig angeordneten Körpers K.

Satz II.2.21. (Existenz k-ter Wurzeln) *Sei K ein vollständig angeordneter Körper. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und $a \geq 0$ existiert genau ein $b \geq 0$ mit $b^k = a$.*

Beweis. Der Fall $a = 0$ ist trivial (Nachweis!). Wir dürfen daher $a > 0$ annehmen.

Eindeutigkeit: Für $b < c$ gilt nach Aufgabe II.2.1(b) die Beziehung $b^k < c^k$. Also existiert höchstens ein $b \geq 0$ mit $b^k = a$.

Existenz: Wir betrachten die Menge

$$M := \{x \in [0, \infty[: x^k \leq a\}.$$

Dann ist $0 \in M$ und daher $M \neq \emptyset$. Für $y := \max(1, a)$ und $x > y$ gilt

$$x^k > y^k \geq y \geq a$$

(vgl. Aufgabe II.2.1(b)). Also ist $M \leq y$, d.h., M ist nach oben beschränkt. Wegen dem Vollständigkeitsaxiom existiert daher

$$b := \sup M.$$

Wie zeigen $b^k = a$. Sei dazu

$$C := k \cdot \max\left\{\binom{k}{j} b^{k-j} : j = 1, \ldots, k\right\}.$$

Aus dem Binomischen Lehrsatz folgt dann für $0 < h < 1$:

$$(b+h)^k = b^k + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} b^{k-j} h^j \leq b^k + \sum_{j=1}^k \frac{1}{k} C h^j \leq b^k + hC$$

und entsprechend

$$(b-h)^k = b^k + \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} (-1)^j h^j b^{k-j} \geq b^k - \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} h^j b^{k-j} \geq b^k - hC.$$

Ist $b^k < a$, so setzen wir $h := \frac{1}{2} \min\left(1, \frac{a-b^k}{C}\right)$. Für dieses h erhalten wir mit obiger Abschätzung

$$(b+h)^k \leq b^k + hC < b^k + a - b^k = a,$$

im Widerspruch zur Definition von b, denn $b + h > b$. Gilt $b^k > a$, so erhalten wir für $0 < h < \min\left(1, \frac{b^k - a}{C}\right)$ entsprechend

$$(b-h)^k \geq b^k - hC > b^k + a - b^k = a,$$

im Widerspruch zur Definition von b. Da die Annahme $b^k \neq a$ zu einem Widerspruch führt, ist daher $b^k = a$ und somit die Existenz eines $b > 0$ mit $b^k = a$ gezeigt. ■

Definition II.2.22. Ist $a \in K$ mit $a \geq 0$ und $k \in \mathbb{N}$, so schreiben wir $\sqrt[k]{a}$ für die k-te Wurzel aus a. Für $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $q \in \mathbb{N}$ und $a > 0$ setzen wir

$$a^{\frac{p}{q}} := \sqrt[q]{a^p} = (\sqrt[q]{a})^p \quad \text{und} \quad 0^{\frac{p}{q}} := 0 \quad \text{für } p > 0. \qquad \blacksquare$$

Aufgabe II.2.4. Zeigen Sie:

(a) Für $0 < x < y$ in K und $q \in \mathbb{Q}_+$ gilt $x^q < y^q$.

(b) Für $0 < x, y$ in K und $q \in \mathbb{Q}_+$ gilt $(xy)^q = x^q y^q$. Hinweis: Man betrachte zuerst den Fall $q \in \mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{Z}$ und dann den Fall $q = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$. Schließlich setze man beides zusammen. $\blacksquare$

Aufgabe II.2.5. Zeigen Sie: Der angeordnete Körper $\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig. Hierzu betrachte man die Menge

$$M := \{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x, x^2 \leq 2\}$$

und zeige wie im Beweis von Satz II.2.11, dass M beschränkt ist. Welche Eigenschaft hätte $s = \sup(M)$, wenn solch ein Element in $\mathbb{Q}$ existieren würde? $\blacksquare$

Die rellen Zahlen

Für die Zwecke der Analysis ist es sekundär, wie man die reellen Zahlen konstruiert, denn hierzu gibt es viele Methoden, die alle zum gleichen Ziel führen. Wir müssen von den reellen Zahlen nur ihre arithmetischen und die Ordnungseigenschaften kennen. Wie wir sogleich präzisieren werden, sind all diese Eigenschaften vollständig dadurch bestimmt, dass die reellen Zahlen einen vollständig angeordneten Körper bilden, d.h. je zwei vollständig angeordnete Körper lassen sich nicht durch Eigenschaften der Ordnung oder ihrer Arithmetik unterscheiden. Man sagt dann auch, sie seien *isomorph.*

Definition II.2.23. Seien (K, K_+) und (L, L_+) angeordnete Körper. Eine Abbildung $f : K \to L$ heißt *Homomorphismus von angeordneten Körpern*, wenn die Bedingungen

(a) $(\forall x, y \in K)\ f(x + y) = f(x) + f(y)$

(b) $(\forall x, y \in K)\ f(xy) = f(x) \cdot f(y)$

(c) $f(K_+) \subseteq L_+$

gelten. Die Abbildung f heißt *Isomorphismus von angeordneten Körpern*, wenn f zusätzlich bijektiv ist. Existiert solch ein Isomorphismus, so nennen wir (K, K_+) und (L, L_+) *isomorph.* $\blacksquare$

Man sollte sich dies so vorstellen, dass sich isomorphe angeordnete Körper nur durch die Bezeichnung ihrer Elemente unterscheiden, und dass sie durch die Umbenennung ihrer Elemente, die durch einen Isomorphismus realisiert wird, auseinander hervorgehen. In diesem Sinne stellen wir uns isomorphe angeordnete Körper als im wesentlichen gleiche mathematische Objekte vor.

Theorem II.2.24. (Eindeutigkeitssatz) *Zwei vollständig angeordnete Körper sind zueinander isomorph.*

Beweis. Für einen schönen, gut lesbaren Beweis verweisen wir auf das schöne Buch von B. Artmann, „Der Zahlbegriff“.

Wir schildern hier nur kurz die Grundidee des Beweises. Seien K und L vollständig angeordneter Körper. Für eine nach oben beschränkte Teilmenge $M \subseteq K$ schreiben wir $\sup_K M$ für deren Supremum und analog $\sup_L M$ für eine Teilmenge M von L. Wir haben schon gesehen, dass wir $\mathbb{Q}$ als Unterkörper von K und L auffassen können (Bemerkung II.2.6). Wir betrachten nun die Abbildung

$$\Phi: K \to L, \quad \Phi(x) := \sup_L\{q \in \mathbb{Q}: q < x\}.$$

Hierbei existiert $\Phi(x)$, da $\mathbb{N}$ in L unbeschränkt ist, und die Existenz eines $q \in \mathbb{Q}$ mit $q < x$ erhalten wir aus Folgerung II.2.20, die zeigt, dass das Intervall $]x-1, x[\subseteq K$ eine rationale Zahl enthält.

Sind $x, y \in K$ mit $x < y$, so enthält das Intervall $]x, y[$ ebenfalls eine rationale Zahl. Also ist $\Phi(x) \neq \Phi(y)$, d.h., Φ ist injektiv.

Wir zeigen noch, dass Φ surjektiv ist. Sei dazu $s \in L$ und $x := \sup_K\{q \in \mathbb{Q}: q < s\}$. Wir zeigen $s = \Phi(x)$. In der Tat ist $\{q \in \mathbb{Q}: q < s\} = \{q \in \mathbb{Q}: q < x\}$, so dass die Behauptung aus

$$\Phi(x) = \sup_L\{q \in \mathbb{Q}: q < x\} = \sup_L\{q \in \mathbb{Q}: q < s\} = s$$

folgt. Die letzte Gleichheit ist wieder eine Konsequenz aus Folgerung II.2.20. Wir haben damit eingesehen, dass $\Phi: K \to L$ bijektiv ist.

Jetzt hat man sich nur noch davon zu überzeugen, dass Φ Addition, Multiplikation und Ordnung respektiert. Das ist wieder etwas technisch und wir verweisen auf das Artmannsche Buch. ■

Mit dem Eindeutigkeitssatz wird klar, dass es bis auf Isomorphie höchstens einen vollständig angeordneten Körper gibt. Daher ist das folgende Axiom sinnvoll.

Axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen

$(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R}_+)$ IST EIN VOLLSTÄNDIG ANGEORDNETEN KÖRPER

Damit ist sehr präzise zusammengefasst, als was wir die reellen Zahlen verstehen werden. Die Gesamtheit der Axiome eines vollständig angeordneten Körpers bilden die Regeln, die wir beim Umgang mit den reellen Zahlen einhalten müssen. Ausgehend von dieser axiomatischen Fixierung werden wir nun darangehen, die reellen Zahlen zu studieren. Hierbei wird sich schnell herausstellen, dass die Bilder, die man sich von den reellen Zahlen macht, ihre Eigenschaften recht gut wiedergeben.

Die komplexen Zahlen

Da die reellen Zahlen einen angeordneten Körper bilden, sind alle Quadrate nichtnegativ und die Zahl -1 ist in $\mathbb{R}$ kein Quadrat. Insbesondere können wir die Konstruktion aus Aufgabe II.1 anwenden und erhalten einen Körper

$$\mathbb{C} := \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

dessen Addition und Multiplikation wie folgt aussehen:

$$(a,b) + (c,d) := (a+c, b+d) \quad \text{ und } \quad (a,b) \cdot (c,d) := (ac - bd, bc + ad).$$

Wir nennen die Elemente von $\mathbb{C}$ *komplexe Zahlen*.

Der Nachweis der Körperaxiome ist eine elementare Verifikation (Aufgabe II.1). Das Einselement ist $1 = (1,0)$. Wir schreiben

$$i := (0,1).$$

Dann gilt $i^2 = (-1,0) = -1$, d.h., in $\mathbb{C}$ ist -1 ein Quadrat.

Die reellen Zahlen finden wir in $\mathbb{C}$ leicht wieder, da

$$(a,0) + (c,0) := (a+c, 0), \quad \text{ und } \quad (a,0) \cdot (c,0) := (ac, 0)$$

für alle $a, c \in \mathbb{R}$ gilt, d.h., die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad x \mapsto (x, 0)$$

ist eine Einbettung von Körpern. In diesem Sinne dürfen wir $\mathbb{R}$ als Unterkörper von $\mathbb{C}$ auffassen, was wir von nun an tun werden.

Jede komplexe Zahl (x,y) lässt sich in eindeutiger Weise schreiben als

$$(x,y) = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Von nun an wollen wir uns komplexe Zahlen immer in dieser Form vorstellen. Wir rechnen in dieser Darstellung wie folgt:

$$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d) \quad \text{ und } \quad (a+ib)(c+id) = (ac-bd)+i(bc+ad).$$

Definition II.2.25. Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieren wir:

(a) die *konjugierte Zahl* durch $\overline{z} := x - iy$.

(b) den *Betrag von* z durch $|z| := \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Man beachte, dass die Wurzel wegen $x^2 + y^2 \geq 0$ existiert.

(c) den *Realteil von* z: $\operatorname{Re} z := \frac{z+\overline{z}}{2} = x$.

(d) den *Imaginärteil von* z: $\operatorname{Im} z := \frac{z-\overline{z}}{2i} = y$. ■

Lemma II.2.26. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:*

(i) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

(ii) *Für $z \neq 0$ ist $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$.*

(iii) $|zw| = |z| \cdot |w|$.

Beweis. (i) rechnet man sofort nach.

(ii) Wegen $z \neq 0$ ist $|z| > 0$, und die Behauptung ergibt sich aus (i) und $|z|^2 = z\overline{z}$ (vgl. Aufgabe II.1).

(iii) ergibt sich direkt aus (i), da:

$$|zw| = \sqrt{zw\overline{zw}} = \sqrt{z\overline{z}w\overline{w}} = \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{w\overline{w}} = |z| \cdot |w|$$

(vgl. Aufgabe II.2.3(b)). ■

III. Konvergenz von Folgen und Reihen

Durch die Betragsfunktion erhalten wir auf den reellen Zahlen einen Abstandsbegriff. Hierdurch erhalten die reellen Zahlen eine metrische Struktur, und wir können Konvergenz und Grenzwerte von Folgen, Reihen und Funktionen sowie die Stetigkeit von Funktionen untersuchen. Die Begriffe der Konvergenz einer Folge und der Stetigkeit einer Funktion sind grundlegend für die gesamte Analysis.

III.1. Die Betragsfunktion — metrische Räume

Wir erinnern uns daran, dass wir uns $\mathbb{R}$ als Teilmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ denken. In diesem Sinn haben wir für eine reelle Zahl x

$$|x| = \sqrt{x\overline{x}} = \sqrt{x^2} = \max\{x, -x\}.$$

Satz III.1.1. (Rechenregeln für den Betrag) *Es gelten für $z, w \in \mathbb{C}$:*

(1) $|0| = 0$ *und* $|z| > 0$ *für* $z \neq 0$.

(2) $|zw| = |z| \cdot |w|$ *und* $|\frac{z}{w}| = \frac{|z|}{|w|}$, *falls* $w \neq 0$.

(3) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (*Subadditivität*).

(4) $|z - w| \geq \big||z| - |w|\big|$.

Beweis. (1) Die Beziehung $|0| = 0$ ist trivial. Ist $z \neq 0$, so ist $\operatorname{Re} z \neq 0$ oder $\operatorname{Im} z \neq 0$. Also ist $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 > 0$ und somit $|z| > 0$.

(2) Aus Lemma II.2.26(iii) erhalten wir $|zw| = |z| \cdot |w|$. Ist $z \neq 0$, so folgt hieraus $1 = |1| = |z| \cdot |z^{-1}|$, also $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$. Hieraus folgt $|\frac{z}{w}| = |z||w^{-1}| = \frac{|z|}{|w|}$.

(3) Wir haben

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{w} + w\overline{z} + z\overline{w} \\
&= |z|^2 + |w|^2 + \overline{z\overline{w}} + z\overline{w} = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \\
&\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2.
\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus der Eindeutigkeit von Quadratwurzeln nichtnegativer Zahlen.

(4) Aus (3) erhalten wir

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w| = |z - w| + |w|$$

und analog $|w| \leq |z - w| + |z|$. Somit haben wir $|z| - |w| \leq |z - w|$ und $|w| - |z| \leq |z - w|$, also $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$. ■

Definition III.1.2. Sei X eine Menge. Eine Funktion $d : X \times X \to [0, \infty[$ heißt *Metrik auf X,* falls für alle $x, y, z \in X$ gelten:

(M1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung).

Die Zahl $d(x, y)$ heißt *Abstand von x und y*; das Paar (X, d) heißt *metrischer Raum.* ■

Aufgabe III.1.1. Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum (X, d) gilt:

$$|d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z) \quad \text{für alle } x, y, z \in X. \qquad ■$$

Satz III.1.3. *Die Funktion*

$$d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to [0, \infty[, \quad d(x, y) := |x - y|$$

ist eine Metrik auf $\mathbb{C}$.

Beweis. Mit Satz III.1.1 prüfen wir die Axiome (M1), (M2) und (M3) nach:
(M1) $d(x, y) = |x - y| = 0 \iff x - y = 0 \iff x = y$.
(M2) $d(x, y) = |x - y| = |-(x - y)| = |y - x| = d(y, x)$.
(M3) $d(x, z) = |x - z| = |x - y + y - z| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$.
Hierbei haben wir die Subadditivität des Betrags $|\cdot|$ verwendet. ■

Im folgenden denken wir uns jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{C}$ mit der durch $d(z, w) := |z - w|$ definierten Metrik ausgestattet. Insbesondere erhalten wir dadurch eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

Definition III.1.4. Sei (X, d) ein metrischer Raum.

(a) Für $p \in X$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(p) := \{x \in X : d(x, p) < \varepsilon\}$$

die *ε-Umgebung von p* oder *offene Kugel vom Radius ε um p.*

(b) Eine *Umgebung von p* ist eine Teilmenge $U \subseteq X$, für die ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq U$ existiert.

(c) Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt *offen*, wenn U Umgebung aller Punkte $p \in U$ ist.

(d) Eine Teilmenge $F \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn $X \setminus F$ offen ist. ■

Beispiel III.1.5. (a) Im metrischen Raum $(\mathbb{R}, d)$ mit $d(x,y) = |x-y|$ erhalten wir für $\varepsilon > 0$ und $p \in \mathbb{R}$

$$U_\varepsilon(p) =]\, p - \varepsilon, p + \varepsilon\, [,$$

denn

$$\begin{aligned} |x-p| < \varepsilon &\iff \max\{x-p, p-x\} < \varepsilon \\ &\iff (x-p<\varepsilon) \wedge (p-x<\varepsilon) \\ &\iff (x<p+\varepsilon) \wedge (x>p-\varepsilon) \\ &\iff x \in]\, p-\varepsilon, p+\varepsilon\, [. \end{aligned}$$

(b) Für $X = \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ und $p = a + ib \in \mathbb{C}$ ist

$$U_\varepsilon(p) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z-p| < \varepsilon\} = \{x + iy \in \mathbb{C} \colon (x-a)^2 + (y-b)^2 < \varepsilon^2\}.$$

Identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit der Ebene $\mathbb{R}^2$, so ist dies eine Kreisscheibe vom Radius ε um den Punkt (a,b).

(c) Es seien $a, b, c \in \mathbb{C}$. Betrachten wir das Dreieck mit den Ecken a, b, c in $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, so sind $d(a,b) = |a-b|$ etc. die Längen der Seiten des Dreiecks. In diesem Sinn besagt die Dreiecksungleichung, dass die Summe der Längen der Seiten ab und bc mindestens so groß ist wie die Länge der Seite ac. Daher kommt der Name Dreiecksungleichung. ■

Lemma III.1.6. *In einem metrischen Raum (X,d) sind die offenen Kugeln $U_r(p)$ offen im Sinne von Definition III.1.4.*

Beweis. Ist $x \in U_r(p)$, so ist nach Definition $d(x,p) < r$. Sei $\varepsilon := r - d(x,p)$. Wir zeigen $U_\varepsilon(x) \subseteq U_r(p)$, d.h., $U_r(p)$ ist Umgebung von x. Sei also $y \in U_\varepsilon(x)$. Dann ist $d(p,y) \leq d(p,x) + d(x,y) < d(p,x) + \varepsilon = r$, also $y \in U_r(p)$. Folglich ist $U_\varepsilon(x) \subseteq U_r(p)$. Somit ist $U_r(p)$ Umgebung aller seiner Punkte, also nach Definition offen. ■

Satz III.1.7. (Eigenschaften offener Mengen) *Sei (X,d) ein metrischer Raum. Dann gelten folgende Aussagen:*

(O1) *Die Mengen $\emptyset$ und X sind offen.*

(O2) *Sind $U_1, \ldots, U_n$ offene Mengen, so ist auch $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ offen.*

(O3) *Ist $(U_j)_{j \in J}$ eine Familie offener Mengen, so ist auch $\bigcup_{j \in J} U_j$ offen.*

Beweis. (O1) ist klar.
(O2) Sei $x \in U_1 \cap \ldots \cap U_n$. Dann existiert für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ ein $\varepsilon_j > 0$ mit $U_{\varepsilon_j}(x) \subseteq U_j$. Für $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ gilt daher $U_\varepsilon(x) \subseteq \bigcap_{j=1}^n U_j$.
(O3) Sei $x \in \bigcup_{j \in J} U_j$. Dann existiert ein $j_0 \in J$ mit $x \in U_{j_0}$. Weiter existiert ein $\varepsilon_0 > 0$ mit $U_{\varepsilon_0}(x) \subseteq U_{j_0}$. Also ist $U_{\varepsilon_0}(x) \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j$. ■

Aufgabe III.1.2. (a) Sei X eine Menge und $f \colon X \to]0, \infty[$ eine Funktion. Dann wird durch

$$d(x,y) := \begin{cases} f(x) + f(y) & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$$

eine Metrik auf X definiert.

Nimmt man noch einen Punkt P hinzu und setzt $d(P,P) = 0$ sowie $d(x,P) = d(P,x) = f(x)$, so erhält man eine Metrik auf $X' := X \cup \{P\}$.

Die Metrik auf $X \cup \{P\}$ wird „französische Eisenbahnmetrik" genannt. Hierbei spielt P die Rolle von Paris und $f(x)$ ist die Entfernung von Paris. Um von x nach y zu kommen, muss man den Umweg um P nehmen, so dass sich als Entfernung $f(x) + f(y)$ ergibt.

(b) (Die diskrete Metrik) Sei X eine Menge. Dann wird durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \neq y \\ 0 & \text{für } x = y \end{cases}$$

eine Metrik auf X definiert. ■

Aufgabe III.1.3. Zeigen Sie, dass in einem metrischen Raum (X,d) jede der Mengen

$$\{x \in X : d(x,p) \leq r\}, \quad p \in X, r \in \mathbb{R},$$

abgeschlossen ist. ■

III.2. Zahlenfolgen

In diesem Abschnitt lernen wir den Grenzwertbegriff für Folgen in metrischen Räumen kennen.

Definition III.2.1. Sei X eine Menge. Eine *Folge in X* ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \to X, \ n \mapsto a_n.$$

Wir bezeichnen sie auch durch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder durch $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

Unter einer *Zahlenfolge* verstehen wir eine Folge komplexer Zahlen, d.h. $X = \mathbb{C}$. ■

Beispiel III.2.2. Wir betrachten einige Beispiele von Zahlenfolgen:

(1) $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$.

(2) $(\frac{n}{n+1})_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$.

(3) Für $z \in \mathbb{C}$ heißt $(z^n)_{n\in\mathbb{N}} = z, z^2, z^3, z^4, \ldots$ *geometrische Folge.*

(4) $(\frac{n}{2^n})_{n\in\mathbb{N}} = \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \ldots$.

(5) Die *Fibonacci-Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird durch die Vorschrift

$$f_1 := 1, \quad f_2 := 1$$
$$f_n := f_{n-1} + f_{n-2} \ (n \geq 3),$$

rekursiv definiert; also $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$. ■

Wir kommen nun zu einem zentralen Begriff der Analysis.

Definition III.2.3. Sei (X,d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt *konvergent gegen* $p \in X$, geschrieben

$$a_n \to p \qquad \text{oder} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = p,$$

falls folgendes gilt:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N_\varepsilon)\ d(a_n,p) < \varepsilon.$$

Für $X = \mathbb{C}$ erhält man speziell:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N_\varepsilon)\ |a_n - p| < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Man beachte: Gilt $d(a_n,p) < \varepsilon$, so gilt auch $d(a_n,p) < \varepsilon_1$ für alle $\varepsilon \leq \varepsilon_1$. Für den Nachweis der Konvergenz einer Folge reicht es also aus, beliebig kleine ε zu betrachten, z.B. folgt aus

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists N_m \in \mathbb{N})(\forall n \geq N_m)\ d(a_n,p) < \frac{1}{m}$$

die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen p (Nachweis! Hinweis: Satz von Archimedes).

Man gebraucht für die Aussage „ $a_n \to p$ “ noch andere Formulierungen, so zum Beispiel: „Für alle $\varepsilon > 0$ gilt $a_n \in U_\varepsilon(p)$ für *fast alle* $n \in \mathbb{N}$ “, wobei man „fast alle“ als „alle bis auf endlich viele“ liest. Oder: „Für alle $\varepsilon > 0$ gilt *schließlich* $a_n \in U_\varepsilon(p)$ “.

Definition III.2.4. Eine nicht konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im metrischen Raum X heißt *divergent*, d.h.

$$(\forall p \in X)\ (\exists \varepsilon > 0)\ (\forall N \in \mathbb{N})\ (\exists n \geq N)\ d(a_n,p) \geq \varepsilon.$$

In Worten: Jedes $p \in X$ besitzt eine Umgebung $U_\varepsilon(p)$, außerhalb derer unendlich viele Folgenglieder liegen. Man rufe sich an dieser Stelle in Erinnerung, wie man Aussagen mit Quantoren negiert und vergleiche mit der Aussage, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert:

$$(\exists p \in X)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geq N)\ d(a_n,p) < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Beispiele III.2.5.

(1) $\frac{1}{n} \to 0$.

(2) $\frac{n}{n+1} \to 1$.

(3) Für $a \in \mathbb{C}$ konvergiert die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.

(4) $\frac{n}{2^n} \to 0$.

Beweis. (1) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach dem Satz von Archimedes (Satz II.2.19) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Für $n \geq N$ ist dann $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$, also $|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$.

(2) Wegen $|1-\frac{n}{n+1}| = |\frac{n+1}{n+1}-\frac{n}{n+1}| = \frac{1}{n+1}$ und (1) existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|1-\frac{n}{n+1}| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Also gilt $\frac{n}{n+1} \to 1$.

(3) Ist $\varepsilon > 0$, so gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $0 = |a_n - a| < \varepsilon$ und daher $a_n \to a$.

(4) Nach dem Binomischen Lehrsatz gilt

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1 + n + \binom{n}{2} + \ldots \geq n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \geq \frac{n^2}{2},$$

also $\frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{\frac{n^2}{2}} = \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$ und daher $|\frac{n}{2^n}| \leq \frac{2}{n} < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. ∎

Satz III.2.6. *Eine konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen ist beschränkt, d.h., die Menge $\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$ ist beschränkt.*

Beweis. Sei $a_n \to a$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n > N$. Damit ist $|a_n| \leq |a_n - a| + |a| \leq 1 + |a|$ für alle $n > N$, also $|a_n| \leq \max\{|a_1|, \ldots, |a_N|, 1 + |a|\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ∎

Satz III.2.7. (Die geometrische Folge) *Sei $z \in \mathbb{C}$ und $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ die zugehörige geometrische Folge. Dann gilt*

$$z^n \to \begin{cases} 1, & \text{für } z = 1 \\ 0, & |z| < 1 \end{cases}$$

und die Folge ist divergent für $|z| \geq 1$ und $z \neq 1$.

Beweis. Es sind vier Fälle zu betrachten:
Fall 1: Sei $z = 1$. Dann ist $z^n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h., die Folge ist konstant, also $z^n \to 1$.
Fall 2: $|z| > 1$. Dann erhalten wir mit der Bernoulli-Ungleichung

$$|z^n| = |z|^n = (1 + (|z| - 1))^n \geq 1 + n(|z| - 1).$$

Die Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also nicht beschränkt (Satz von Archimedes) und daher nicht konvergent (Satz III.2.6).
Fall 3: $|z| < 1$. Ist $z = 0$, so gilt trivialerweise $z^n \to 0$. Sei also $z \neq 0$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert wegen Fall 2 ein N mit

$$|z^n|^{-1} = |z^{-1}|^n \geq 1 + n(|z^{-1}| - 1) > \frac{1}{\varepsilon}$$

für alle $n \geq N$, und wir erhalten $|z^n - 0| = |z^n| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Folglich gilt $z^n \to 0$.
Fall 4: $|z| = 1$, $z \neq 1$. Um die Divergenz der Folge zu zeigen, führen wir einen indirekten Beweis. Hierzu nehmen wir $z^n \to p$ für ein $p \in \mathbb{C}$ an. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|z^n - p| < \frac{1}{2}|z - 1|$ für alle $n \geq N$. Also ist

$$\begin{aligned} |z-1| &= |z^N||z-1| = |z^{N+1} - z^N| \leq |z^{N+1} - p| + |p - z^N| \\ &< \tfrac{1}{2}|z-1| + \tfrac{1}{2}|z-1| = |z-1|, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. ∎

Bemerkung III.2.8. Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent, denn dies ist eine geometrische Folge. Andererseits ist diese Folge beschränkt. Es existieren also beschränkte Folgen, die nicht konvergieren. In diesem Sinne ist die Umkehrung von Satz III.2.6 falsch. ■

Satz III.2.9. (Eindeutigkeit des Grenzwerts) *Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge im metrischen Raum (X,d). Gilt $a_n \to a$ und $a_n \to b$, so ist $a = b$.*

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und $d(a_n, a) < \varepsilon$ für alle $n \geq N_1$ sowie $d(a_n, b) < \varepsilon$ für alle $n \geq N_2$. Für $n \geq \max(N_1, N_2)$ gilt dann

$$d(a,b) \leq d(a,a_n) + d(a_n,b) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt $d(a,b) = 0$, also $a = b$. ■

Durch diesen Satz wird die Bezeichnung $\lim_{n\to\infty} a_n$ für den Grenzwert einer Folge, den man ja als ein Element von X verstehen will, erst gerechtfertigt.

Folgerung III.2.10. *Eine Folge komplexer Zahlen hat höchstens einen Grenzwert.* ■

Für divergente reelle Folgen können wir wie folgt noch etwas feiner unterscheiden, in welchem Sinne sie divergieren.

Definition III.2.11. (Bestimmte Divergenz) Für eine reelle Zahlenfolge schreiben wir

$$a_n \to \infty \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty,$$

wenn für jedes $R > 0$ die Beziehung $a_n > R$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Analog definiert man $a_n \to -\infty$ bzw. $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$. In diesem Fall heißt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *bestimmt divergent* gegen ∞ bzw. $-\infty$. ■

Beispiel III.2.12. (a) Die Fibonaccifolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert bestimmt gegen ∞. Wir zeigen hierzu durch vollständige Induktion, dass $f_n \geq n$ für $n \geq 5$ gilt. Um dies zu zeigen, beweisen wir die Aussagen

$$p_n \quad : \quad f_n \geq n \wedge f_{n-1} \geq n-1 \quad \text{für} \quad n \geq 6$$

durch vollständige Induktion.
(A) (Induktionsanfang) Für $n = 6$ ist die Behauptung wegen $f_5 = 5, f_6 = 8$ richtig.
(S) Sei also $n \geq 7$. Dann folgt aus der Induktionsannehme $f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \geq n-1+n-2$, da $n-1 \geq 6$ ist. Weiter folgt

$$n-1+n-2 = 2n-3 \geq n,$$

da $n \geq 3$ ist, und damit die Behauptung.
Also gilt $f_n \geq n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, und hieraus folgt sofort die bestimmte Divergenz gegen ∞.

(b) Die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert nicht bestimmt gegen ∞.
(c) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = \infty$: In Beispiel III.2.5(4) haben wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

gezeigt. Also existiert zu jedem $R > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{2^n} < \frac{1}{R}$ für $n > N$. Dann ist $\frac{2^n}{n} > R$ für $n > N$ und daher $\frac{2^n}{n} \to \infty$. ■

Aufgabe III.2.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in dem metrischen Raum (X, d).
(a) Ist $p \in X$, so gilt $a_n \to p$ genau dann, wenn $d(a_n, p) \to 0$ gilt.
(b) Existiert eine reelle Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n \to 0$ und $d(a_n, p) \leq b_n$, so gilt $a_n \to p$. ■

Grenzwertsätze für Folgen

Der folgende Satz zeigt uns, in welcher Weise Grenzwerte von Folgen mit Addition, Multiplikation und Ordnung verträglich sind. Zuerst bemerken wir, dass eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum X schon gegen p konvergiert. wenn eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\ (\forall n \geq N_\varepsilon)\ d(a_n, p) < C\varepsilon$$

(Nachweis als Übung).

Satz III.2.13. (Grenzwertsätze für Folgen) *Für die komplexen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelte $a_n \to a$ und $b_n \to b$. Dann gilt:*
(1) $a_n + b_n \to a + b$.
(2) $a_n \cdot b_n \to a \cdot b$.
(3) *Für $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ gilt $\lambda a_n + \mu b_n \to \lambda a + \mu b$.*
(4) *Ist $b \neq 0$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $b_n \neq 0$ für alle $n \geq N$, und es gilt dann $\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq N}} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.*
(5) *Sind beide Folgen reell und $a_n \leq b_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \leq b$.*
(6) *Sind $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \leq a_n \leq B$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $a \in [A, B]$.*

Beweis. (1) Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $a_n \to a$ und $b_n \to b$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|b_n - b| < \varepsilon$ für $n > N$. Dann haben wir für $n > N$:

$$|a_n + b_n - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

(2) Da (a_n) nach Satz III.2.6 beschränkt ist, existiert ein $C > 0$ mit $|b|, |a_n| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $\varepsilon > 0$. Wir suchen ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n \cdot b_n - ab| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Sei hierzu $N \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $|b_n - b| < \varepsilon$ und $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Damit erhalten wir für $n \geq N$:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + (a_n - a)b| \leq |a_n| \cdot |b_n - b| + |a_n - a| \cdot |b| \\ &\leq C\varepsilon + \varepsilon C = 2C\varepsilon. \end{aligned}$$

(3) Aus (2) folgt zunächst $\lambda a_n \to \lambda a$ und $\mu b_n \to \mu b$. Hierbei betrachten wir λ und μ als konstante Folgen. Die Behauptung folgt daher aus (1).

(4) Wir betrachten zuerst die Folge $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Wegen $|b| > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - b| < \frac{1}{2}|b|$ für alle $n \geq N$. Damit ist

$$|b_n| = |b_n - b + b| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0$$

für alle $n \geq N$. Insbesondere ist $b_n \neq 0$ für $n \geq N$. Weiter erhalten wir für alle $n \geq N$:

$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\Big| = \Big|\frac{b - b_n}{b_n\, b}\Big| = \frac{|b - b_n|}{|b_n| \cdot |b|} \leq \frac{2}{|b|^2}|b - b_n|.$$

Wir wählen nun zu $\varepsilon > 0$ ein $N_1 \geq N$ mit $|b - b_n| \leq \frac{\varepsilon \cdot |b|^2}{2}$ für alle $n \geq N_1$. Damit erhalten wir für $n \geq N_1$:

$$\Big|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\Big| \leq \frac{2}{|b|^2}|b_n - b| \leq \frac{2\varepsilon|b|^2}{2|b|^2} = \varepsilon.$$

Also gilt $\frac{1}{b_n} \to \frac{1}{b}$ und wegen (2) schließlich $\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n} \to a\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$.

(5) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt nach Voraussetzung $|a_n - a| < \varepsilon$ und $|b_n - b| < \varepsilon$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Für diese n haben wir

$$a \leq a_n + \varepsilon \leq b_n + \varepsilon \leq b + 2\varepsilon$$

und daher $a \leq b$, da $\varepsilon > 0$ beliebig war.

(6) Indem wir (5) auf die konstante Folge $b_n = B$ anwenden, erhalten wir $a \leq B$. Analog ergibt sich $A \leq a$. ■

Vorsicht: Aus $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt im allgemeinen *nicht* $a < b$: So gilt für $a_n := 0$ und $b_n := \frac{1}{n}$ zwar $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber es ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Beispiel III.2.14. (Rationale Zahlenfolgen) (a) Wir betrachten die Folge

$$a_n = \frac{3n^2 + 13n}{n^2 - 2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mit Satz III.2.13(2) und Beispiel III.2.5(1) erhalten wir $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}\frac{1}{n} \to 0$ und daher den Grenzwert

$$a_n = \frac{3 + \frac{13}{n}}{1 - \frac{2}{n^2}} \to \frac{3+0}{1-0} = 3,$$

wobei wir für Zähler und Nenner jeweils Satz III.2.13(1) und dann Satz III.2.13(4) anwenden.

(b) Die gleiche Argumentation lässt sich für Folgen der Gestalt

$$a_n = \frac{x_k n^k + x_{k-1} n^{k-1} + \ldots + x_0}{y_m n^m + y_{m-1} n^{m-1} + \ldots + y_0}$$

anwenden. Hierbei sind $m, k \in \mathbb{N}$, $x_i, y_j \in \mathbb{C}$ und $x_k, y_m \neq 0$. In diesem Fall haben wir

$$a_n = n^{k-m} \frac{x_k + \frac{x_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{x_0}{n^k}}{y_m + \frac{y_{m-1}}{n} + \ldots + \frac{y_0}{n^m}}.$$

Wegen

$$x_k + \frac{x_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{x_0}{n^k} \to x_k \quad \text{und} \quad y_m + \frac{y_{m-1}}{n} + \ldots + \frac{y_0}{n^m} \to y_m$$

gilt

$$\frac{x_k + \frac{x_{k-1}}{n} + \ldots + \frac{x_0}{n^k}}{y_m + \frac{y_{m-1}}{n} + \ldots + \frac{y_0}{n^m}} \to \frac{x_k}{y_m}.$$

Nun haben wir 3 Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: $k = m$. Dann erhalten wir $a_n \to \frac{x_k}{y_m}$.

2. Fall: $k < m$. Wegen $n^{k-m} \to 0$ erhalten wir in diesem Fall $a_n \to 0$.

3. Fall: $k > m$. Dann ist die Folge a_n divergent, denn wäre dies nicht der Fall, so fänden wir ein $a \in \mathbb{C}$ mit $a_n \to a$. Hieraus erhielten wir $n^{m-k} a_n \to 0 \cdot a = 0$, im Widerspruch zu $\frac{x_k}{y_m} \neq 0$. ■

Aufgabe III.2.2. (a) Zeigen Sie: Eine komplexe Zahlenfolge

$$(z_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n + iy_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert genau dann gegen die komplexe Zahl $z = x + iy$, wenn $x_n \to x$ und $y_n \to y$ gelten. Hinweis: Verwende

$$\max(|x_n - x|, |y_n - y|) \leq |z_n - z| \leq |x_n - x| + |y_n - y|.$$

(b) Zeigen Sie: $\lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} + i \frac{n^2}{2^n + 1} = 1$. ■

Aufgabe III.2.3. Wir suchen eine explizite Formel für die Fibonacci Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Wir gehen dabei in folgenden Schritten vor:

(1) Zuerst betrachten wir eine Folge $a_n := c\lambda^n$. Zeige: Diese Folge genügt genau dann der Rekursionsvorschrift $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \geq 1$, wenn $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$ gilt.

(2) Bestimme die beiden Lösungen $\lambda_1 > \lambda_2$ der Gleichung $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$.

(3) Jede Folge der Form $a_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$ genügt der Rekursionsvorschrift $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

(4) Zeige: $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Hinweis: Bestimme c_1 und c_2 in (3), so dass $a_n = f_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. ■

Teilfolgen

Definition III.2.15. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge und $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ eine Folge natürlicher Zahlen, so heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine *Teilfolge* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Beispiele:

(a) Für $n_k = k^2$ ist $a_1, a_4, a_9, a_{16}, \ldots$ die Teilfolge $(a_{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Wählt man $n_k = 2k-1$, so ist $a_1, a_3, a_5, a_7, \ldots$ die Teilfolge $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beim Übergang zu einer Teilfolge ändert sich der Grenzwert nicht. Allgemeiner gilt der folgende Satz:

Satz III.2.16. *Sei $a_n \to a$ und $\rho\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine injektive Funktion. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_{\rho(n)} = a$.*

Beweis. Die Voraussetzung $a_n \to a$ bedeutet, dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so existiert, dass

$$\{n \in \mathbb{N}\colon a_n \notin U_\varepsilon(a)\} \subseteq \{1, 2, \ldots, N_\varepsilon\}.$$

Da $\rho\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injektiv ist, gibt es höchstens N_ε Zahlen n mit $\rho(n) \leq N_\varepsilon$. Also gilt $a_{\rho(n)} \in U_\varepsilon(a)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $a_{\rho(n)} \to a$. ■

Folgerung III.2.17. *Gilt $a_n \to a$, so konvergiert auch jede Teilfolge gegen a.*

Beweis. Sei $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge. Mit $\rho(k) = n_k$ folgt die Behauptung dann sofort aus Satz III.2.16. ■

Satz III.2.16 besagt sogar, dass auch das *Umordnen* der Folgenglieder den Grenzwert nicht ändert, z.B. gilt für $a_n \to a$ und

$$b_n := \begin{cases} a_{n-1}, & n \text{ gerade} \\ a_{n+1}, & n \text{ ungerade,} \end{cases} \qquad \text{d.h. } (b_n)_{n\in\mathbb{N}} = a_2, a_1, a_4, a_3, a_6, a_5, \ldots$$

die Beziehung $b_n \to a$.

Monotone Folgen

Definition III.2.18. (a) Eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt

$$\left.\begin{array}{l} \textit{monoton wachsend} \\ \textit{monoton fallend} \\ \textit{streng monoton wachsend} \\ \textit{streng monoton fallend} \end{array}\right\}, \text{ wenn für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } \left\{\begin{array}{l} a_n \leq a_{n+1} \\ a_n \geq a_{n+1} \\ a_n < a_{n+1} \\ a_n > a_{n+1}. \end{array}\right.$$

(b) Im folgenden nennen wir eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben (unten) beschränkt, wenn dies für die Menge $\{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ der Folgeglieder der Fall ist. ■

Der folgende Satz ist ein Kernresultat der Analysis. Hier wird das Vollständigkeitsaxiom dazu verwendet, um die Existenz von Grenzwerten zu beweisen. An dieser Stelle geht also wesentlich ein, dass der Körper, mit dem wir Analysis treiben, ordnungsvollständig ist. Im Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen gilt der entsprechende Satz nicht, wie zum Beispiel jede monotone Folge rationaler Zahlen zeigt, die in $\mathbb{R}$ gegen $\sqrt{2}$ konvergiert und daher in $\mathbb{Q}$ keinen Grenzwert besitzt.

SATZ VON DER MONOTONEN KONVERGENZ

Satz III.2.19. (a) *Jede reelle monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen*

$$\sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) *Jede reelle monoton fallende und nach unten beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen*

$$\inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis. Wir zeigen nur (a), denn (b) erhält man, indem man (a) auf die Folge $(-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ anwendet.

Nach Voraussetzung existiert $a := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ (Vollständigkeitsaxiom). Es gilt $a_n \le a$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $\varepsilon > 0$, so ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke, also existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_N \ge a - \varepsilon$. Für $n > N$ ist dann $a - \varepsilon \le a_N \le a_n \le a$; also ist $|a_n - a| < \varepsilon$. Somit gilt $a_n \to a$. ∎

Beispiel III.2.20. (*Babylonisches Wurzelziehen*) Für $a > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ betrachten wir die induktiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_1 := a + 1, \qquad a_{n+1} := a_n \cdot \left(1 + \frac{a - a_n^k}{k \cdot a_n^k}\right), \ n \in \mathbb{N}.$$

Sie hat die folgenden drei Eigenschaften:

$$(1)\ a_n > 0, \qquad (2)\ a_n^k \ge a, \qquad (3)\ a_{n+1} \le a_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir beweisen dies durch vollständige Induktion nach n:
(A) $n = 1$. Dann ist (1) $a_1 = a + 1 > 0$, (2) $a_1^k = (a+1)^k \ge a + 1 > a$, und (3) $a_2 = a_1 \cdot \left(1 + \frac{a - a_1^k}{k \cdot a_1^k}\right) < a_1$, da $a_1^k > a$ ist und $\frac{a_1^k - a}{k a_1^k} < \frac{1}{k}$.
(S) Wir nehmen an, die Eigenschaften (1)-(3) gelten für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann haben wir
(1) $k \cdot a_n^k + a - a_n^k = (k-1)a_n^k + a > 0$. Damit ist $1 + \frac{a - a_n^k}{k \cdot a_n^k} > 0$ und folglich $a_{n+1} > 0$.
(2) Unter Verwendung der Bernoulli-Ungleichung rechnen wir

$$a_{n+1}^k = a_n^k \cdot \left(1 + \frac{a - a_n^k}{k \cdot a_n^k}\right)^k \ge a_n^k \cdot \left(1 + k\,\frac{a - a_n^k}{k \cdot a_n^k}\right) = a_n^k + a - a_n^k = a.$$

(3) $a_{n+2} < a_{n+1}$ folgt aus (2).

Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine monoton fallende Folge, die durch 0 nach unten beschränkt ist. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz III.2.19 muss sie damit einen Grenzwert $b \in \mathbb{R}$ haben. Wie sieht dieser Grenzwert aus?

Zunächst folgt aus $a_n^k \geq a$ für alle n die Beziehung $b^k \geq a$ (Grenzwertsätze). Insbesondere ist $b > 0$. Aus

$$a_{n+1} = a_n \cdot \left(1 + \frac{a - a_n^k}{k \cdot a_n^k}\right)$$

erhalten wir durch Übergang zum Grenzwert auf beiden Seiten:

$$b = b \cdot \left(1 + \frac{a - b^k}{k \cdot b^k}\right).$$

Somit ist $1 + \frac{a-b^k}{k \cdot b^k} = 1$ und folglich $b^k = a$, d.h. $b = \sqrt[k]{a}$. ■

Häufungspunkte von Folgen

Um uns die Konvergenzeigenschaften monotoner Folgen zunutze zu machen, ist die folgende Beobachtung ein effektives Hilfsmittel.

Lemma III.2.21. *Jede reelle Folge besitzt eine monotone Teilfolge.*

Beweis. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Eine Stelle $n \in \mathbb{N}$ heiße *niedrig*, wenn $a_{n+k} \geq a_n$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. Zwei Fälle treten auf.
1. Fall: Es gibt unendlich viele niedrige Stellen. Dann bilden die Folgenglieder a_n, n niedrig, eine monoton wachsende Teilfolge.
2. Fall: Es existieren nur endlich viele niedrige Stellen. Es existiert also ein $N \in \mathbb{N}$, so dass keine Stelle $n > N$ niedrig ist. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a_{n+k} < a_n$, da n nicht niedrig ist. Induktiv findet man so eine monoton fallende Teilfolge $(a_{n_m})_{m\in\mathbb{N}}$. ■

$\boxed{\text{Satz von Bolzano-Weierstrass}}$

Satz III.2.22. [1] [2] *Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Mit Lemma III.2.21 finden wir eine monotone Teilfolge. Diese konvergiert aufgrund ihrer Beschränktheit nach dem Satz von der monotonen Konvergenz (Satz III.2.19). ■

---

[1] Bernard Bolzano (1781–1848), tschechischer Philosoph und Mathematiker in Prag.
[2] Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897), Mathematiker in Berlin.

Definition III.2.23. Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in einem metrischen Raum X, so heißt $p \in X$ *Häufungspunkt* dieser Folge, wenn eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, die gegen p konvergiert. ■

Satz III.2.24. (Häufungspunkte) *Für reelle Folgen gelten:*

(a) *Jede beschränkte reelle Folge hat einen Häufungspunkt.*

(b) *Eine konvergente Folge hat genau einen Häufungspunkt.*

(c) *Eine beschränkte Folge ist genau dann konvergent, wenn sie nur einen Häufungspunkt besitzt.*

(d) *Der Punkt $a \in \mathbb{R}$ ist genau dann Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn jede Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder enthält.*

Beweis. (a) Dies ist genau der Satz von Bolzano-Weierstraß.

(b) Dies ist Folgerung III.2.17 (jede Teilfolge konvergiert gegen den gleichen Grenzwert).

(c) Wegen (b) müssen wir hier nur noch zeigen, dass jede beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit nur einem Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$ konvergiert. Gilt nicht $a_n \to a$, so existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass unendlich viele Folgenglieder nicht in $U_\varepsilon(a) =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ liegen. Gilt $a_n \geq a+\varepsilon$ für unendlich viele Folgenglieder, so erhalten wir eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \geq a+\varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$, die nach (a) einen Häufungspunkt $b \geq a+\varepsilon$ besitzt; Widerspruch. Gilt $a_n \geq a+\varepsilon$ nicht für unendlich viele Folgenglieder, so gilt $a_n \leq a-\varepsilon$ für unendlich viele Folgenglieder, und man argumentiert entsprechend.

(d) Ist a ein Häufungspunkt und $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge, die gegen a konvergiert, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_k} \in U_\varepsilon(a)$ für alle $k \geq K_\varepsilon$. Somit enthält $U_\varepsilon(a)$ unendlich viele Folgenglieder.

Nun nehmen wir an, dass die Umgebung $U_\varepsilon(a)$ für jedes $\varepsilon > 0$ unendlich viele Folgenglieder enthält. Wir konstruieren rekursiv eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, indem wir zunächst a_{n_1} so wählen, dass $|a_{n_1} - a| < 1$ ist und dann zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein Folgenglied a_{n_k} wählen, für das $|a_{n_k} - a| < \frac{1}{k}$ und $n_k > n_{k-1}$ gilt. Diese Teilfolge konvergiert dann offensichtlich gegen a. ■

Im vorherigen Beweis (aber auch schon in Lemma III.2.21) haben wir die Methode der rekursiven Konstruktion einer Folge angewandt. Wir werden im Rahmen dieser Vorlesung solche Konstruktionen bedenkenlos anwenden. Es sei an dieser Stelle allerdings bemerkt, dass hier einige logische Subtilitäten lauern, die man berücksichtigen muss, wenn man die Existenz solcher Folgen auf einer formalen Ebene rechtfertigen will.

Beispiele III.2.25. (1) Die Folge $a_n = (-1)^n$ besitzt die Häufungspunkte 1 und -1, denn es gilt $a_{2n} = 1 \to 1$ und $a_{2n+1} = -1 \to -1$. Warum gibt es keine anderen Häufungspunkte?

(2) Die Folge $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ besitzt ebenfalls die Häufungspunkte 1 und -1, denn es gilt $a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n} \to 1$ und $a_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1} \to -1$.

(3) Die Folge $a_n = n$ besitzt keinen Häufungspunkt, da jede Teilfolge unbeschränkt ist, also nicht konvergiert.

(4) Die Folge

$$a_n = \begin{cases} n, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

ist unbeschränkt, besitzt aber den Häufungspunkt 0, da $a_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \to 0$. ■

Definition III.2.26. Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ heißt

$$\overline{\lim}\, a_n := \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n := \inf\{x\colon a_n \leq x \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

der *Limes superior* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man überlegt sich leicht, dass $\overline{\lim}\, a_n < \infty$ äquivalent dazu ist, dass die Folge nach oben beschränkt ist, denn $\overline{\lim}\, a_n < \infty$ ist äquivalent dazu, dass ein $x \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $a_n \leq x$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dann existiert auch ein $x' \in \mathbb{R}$ mit $a_n \leq x'$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Analog definiert man den *Limes inferior* der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$\underline{\lim}\, a_n := \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n := \sup\{x\colon a_n \geq x \text{ für fast alle } n \in \mathbb{N}\}.$$ ■

Lemma III.2.27. *Ist $\overline{\lim}\, a_n \in \mathbb{R}$, so ist $\overline{\lim}\, a_n$ der größte Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entsprechend folgt aus $\underline{\lim}\, a_n > -\infty$, dass $\underline{\lim}\, a_n$ der kleinste Häufungspunkt der Folge ist.*

Beweis. Wir beweisen nur den ersten Teil. Sei $c := \overline{\lim}\, a_n$. Wir zeigen zuerst, dass c ein Häufungspunkt ist. Ist dies nicht der Fall, so existiert nach Satz III.2.24(d) ein $\varepsilon > 0$, so dass $U_\varepsilon(c) =]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ nur endlich viele Folgenglieder enhält. Andererseits gilt $a_n < c + \varepsilon$ für fast alle n. Hieraus folgt $a_n \leq c - \varepsilon$ für fast alle n. Dies ist ein Widerspruch zu $c = \overline{\lim}\, a_n$.

Wir zeigen noch, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keinen größeren Häufungspunkt als c haben kann. Sei dazu $d > \overline{\lim}\, a_n$. Dann existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x < d$ und $a_n \leq x$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ (Definition des Infimums). Also enthält $U_\varepsilon(d)$ für $\varepsilon < d - x$ nur endlich viele Folgenglieder, und d ist daher kein Häufungspunkt (Satz III.2.24). ■

Beispiele. (a) $\overline{\lim}\,(-1)^n = 1$ und $\underline{\lim}\,(-1)^n = -1$.

Für die Folge $a_n := \frac{1}{n} + (-1)^n$ erhalten wir die gleichen Werte.

(b) Für die Folge $a_n = -n$ ist $\overline{\lim}\, a_n = -\infty$. D.h., $-\infty$ kann auch als Limes superior einer Folge auftreten. ■

Cauchy-Folgen

In diesem Abschnitt lernen wir eine Klasse von Folgen kennen, die uns im weiteren Verlauf der Analysis immer wieder begegnen wird.

Definition III.2.28. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt *Cauchy-Folge*[1] oder *C-Folge*, wenn sie folgende Bedingung erfüllt

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\,(\forall n, m > N_\varepsilon)\ d(a_n, a_m) < \varepsilon.$$ ■

[1] Augustin Louis Cauchy (1789-1857); französischer Mathematiker

Lemma III.2.29. *Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.*

Beweis. Es gelte $a_n \to a$ in dem metrischen Raum (X,d). Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $d(a_n,a) < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > N_\varepsilon$. Für alle $m,n > N_\varepsilon$ gilt damit wegen der Dreiecksungleichung

$$d(a_n,a_m) \le d(a_n,a) + d(a,a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Also ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. ■

Das wesentliche bei Cauchy-Folgen ist, dass nur auf die Folgenglieder selbst und nicht auf einen eventuellen Grenzwert Bezug genommen wird.

Wir haben gesehen, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist. Nun stellt sich die Frage, wann bzw. ob es Cauchy-Folgen gibt, die nicht konvergieren.

Definition III.2.30. Ein metrischer Raum (X,d) heißt *vollständig*, wenn in X jede Cauchy-Folge konvergiert. ■

Beispiel III.2.31. Der metrische Raum $(\mathbb{Q},d)$ mit $d(x,y) = |x-y|$ ist nicht vollständig. Hierzu betrachten wir die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit

$$a_1 = 3 \quad \text{und} \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\big(a_n + \frac{2}{a_n}\big) = a_n\big(\frac{1}{2} + \frac{1}{a_n^2}\big) = a_n\Big(1 + \frac{2-a_n^2}{2a_n^2}\Big).$$

In Beispiel III.2.19 (der Fall $k = 2$ und $a = 2$) haben wir gesehen, dass diese Folge monoton fallend in $\mathbb{R}$ (!) gegen $\sqrt{2}$ konvergiert. Insbesondere ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Lemma III.2.29 eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ und daher existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für $n,m > N$, d.h., $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes in $\mathbb{R}$ (Satz III.2.5) existiert keine rationale Zahl x mit $a_n \to x$. Also ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ nicht konvergent. ■

Wir kommen nun zu einem sehr wichtigen Konvergenzkriterium für Folgen, das sich unter Umständen nachprüfen lässt, ohne dass man einen Kandidaten für einen Grenzwert kennt.

CAUCHY-KRITERIUM FÜR REELLE FOLGEN

Satz III.2.32. *Der metrische Raum* $(\mathbb{R},d)$ *ist vollständig, d.h., eine Folge reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Wegen Lemma III.2.29 haben wir nur noch zu zeigen, dass jede Cauchy-Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Sei dazu $\varepsilon > 0$ und $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für $n,m \ge N_\varepsilon$. Dann ist $|a_n| \le |a_n - a_{N_\varepsilon}| + |a_{N_\varepsilon}| \le \varepsilon + |a_{N_\varepsilon}|$, d.h., die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert dann eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Sei $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$. Wir wählen ein $K_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ für alle $k \ge K_\varepsilon$. Zu $n \ge N_\varepsilon$ wählen wir nun ein $k \in \mathbb{N}$ mit $k \ge K_\varepsilon$ und $n_k \ge N_\varepsilon$. Dann ist $|a_n - a| \le |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt hieraus schließlich $a_n \to a$. ■

Folgerung III.2.33. (Cauchy-Kriterium für komplexe Folgen) *Der metrische Raum* $(\mathbb{C}, d)$ *ist vollständig, d.h., eine Folge komplexer Zahlen konvergiert genau dann, wenn sie eine Cauchy-Folge ist.*

Beweis. Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge komplexer Zahlen und $z_n = x_n + iy_n$. Wegen $|x_n - x_m| \leq |z_n - z_m|$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$ ist dann $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen, also nach Satz III.2.32 konvergent gegen ein $x \in \mathbb{R}$. Analog zeigt man $y_n \to y$ für ein $y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $z_n \to z := x + iy$ (Aufgabe III.2.2).■

Das Cauchy-Kriterium für die Konvergenz von Folgen ist eher von theoretischem Interesse, d.h., zum Nachweis der Konvergenz konkreter Folgen wird man es nur selten verwenden. Allerdings ist es in vielen allgemeinen Konvergenzbeweisen ein sehr nützliches Hilfsmittel.

Konstruktion von $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$

Bemerkung III.2.34. Anders als wir es bisher getan haben, kann man die reellen Zahlen auch als einen archimedisch angeordneten Körper charakterisieren, der als metrischer Raum bzgl. der durch

$$d(x, y) = |x - y| = \max\{x - y, y - x\}$$

definierten Metrik vollständig ist.

Vor diesem Hintergrund kann man eine Konstruktion der reellen Zahlen aus den rationalen Zahlen beschreiben. Wir skizzieren kurz die Cauchy'sche Konstruktion. Hierzu betrachten wir auf dem angeordneten Körper $\mathbb{Q}$ die Abstandsfunktion

$$d\colon \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad (x, y) \mapsto |x - y|.$$

Man beachte, dass wir an dieser Stelle nicht auf die reellen Zahlen als Wertebereich der Abstandsfunktion zurückgreifen dürfen, da wir diese ja konstruieren wollen. Mittels der Abstandsfunktion definiert man nun Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$ und betrachtet die Menge $\mathcal{C}$ alle Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$. Auf dieser Menge definieren wir eine Äquivalenzrelation (d.h. eine reflexive, symmetrische und transitive Relation) durch

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad :\Leftrightarrow \quad a_n - b_n \to 0.$$

Die reellen Zahlen erhalten wir nun als die Menge

$$\mathbb{R} := \mathcal{C}/\sim := \{[(c_n)]\colon (c_n) \in \mathcal{C}\}$$

aller Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen in $\mathbb{Q}$. Um einzusehen, dass diese Menge all die Strukturen trägt, die wir auf den reellen Zahlen erwarten, hat man Addition, Multiplikation und Ordnung auf $\mathbb{R}$ zu definieren. Dies geschieht durch

$$[(a_n)] + [(b_n)] := [(a_n + b_n)] \quad \text{und} \quad [(a_n)] \cdot [(b_n)] := [(a_n \cdot b_n)].$$

Hierbei ist nachzuweisen, dass die rechte Seite nicht von der Wahl des jeweiligen Repräsentanten abhängt, d.h., dass für $[(a_n)] = [(a_n')]$ und $[(b_n)] = [(b_n')]$ auch $[(a_n + b_n)] = [(a_n' + b_n')]$ und $[(a_n \cdot b_n)] = [(a_n' \cdot b_n')]$ gelten. Die Ordnung erhalten wir dadurch, dass wir $[(a_n)] > [(0)]$ definieren, falls ein $q > 0$ in $\mathbb{Q}$ existiert, so dass $a_n > q$ für alle bis auf endlich viele Folgenglieder a_n gilt. Man kann nun zeigen, dass $(\mathbb{R}, +, \cdot, \mathbb{R}_+)$ ein vollständig angeordneter Körper ist, also ein Modell für die reellen Zahlen. ■

III.3. Zahlenreihen

In diesem Abschnitt führen wir den Begriff einer unendlichen Reihe von Zahlen ein.

Definition III.3.1. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Zahlenfolge. Die Folge $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Summen

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

heißt *unendliche Reihe* mit den *Gliedern* a_k und wird symbolisch mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet, d.h.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k\Big)_{n\in\mathbb{N}}.$$

(a) S_n heißt *n-te Partialsumme* der Reihe.
(b) Gilt $S_n \to S$, so schreibt man auch $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und nennt S die *Summe der Reihe.*
(c) Ist $n_0 \in \mathbb{Z}$, so schreiben wir allgemein $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ für die Folge der Partialsummen $B_n := a_{n_0} + \ldots + a_n = \sum_{k=n_0}^{n} a_k$, $n \geq n_0$. ∎

Man beachte, dass sich das qualitative Konvergenzverhalten einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nicht ändert, wenn man endlich viele Reihenglieder abändert. Man betrachtet dann einfach die Reihe $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ für ein ausreichend großes $n_0 \in \mathbb{N}$.

Das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hat also **zwei verschiedene Bedeutungen**. Einerseits steht es für die Folge der Partialsummen und im Falle der Konvergenz steht es auch für den Grenzwert der Reihe. Im folgenden wird jeweils aus dem Kontext deutlich werden, auf welche Bedeutung man sich bezieht.

Satz III.3.2. *Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, so gilt $a_k \to 0$.*

Beweis. Es gelte $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k \to S \in \mathbb{C}$. Dann gilt wegen den Grenzwertsätzen III.2.13:

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0.$$ ∎

Die Umkehrung von Satz III.3.2 ist im allgemeinen *falsch*; wir werden beispielsweise zeigen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ ist. Die Bedingung $a_n \to 0$ ist also **notwendig** für die Konvergenz der Reihe, aber nicht **hinreichend**.

Wir diskutierenn nun einen der wichtigsten Typen von Reihen in der Analysis.

Satz III.3.3. (Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$)

(a) *Für $1 \neq z \in \mathbb{C}$ gilt die geometrische Summenformel: Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ ist*

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$

(b) *Für* $|z| < 1$ *ist die geometrische Reihe konvergent mit*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}.$$

(c) *Für* $|z| \geq 1$ *ist die geometrische Reihe divergent.*

Beweis. (a) Sei $S_n := \sum_{k=0}^n z^k$. Dann ist

$$\begin{aligned}(1-z)S_n &= \sum_{k=0}^n z^k - \sum_{k=0}^n z^{k+1} \\ &= (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots + z^n) - (z + z^2 + z^3 + \ldots + z^{n+1}) \\ &= 1 - z^{n+1}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Formel sofort.
(b) Für $|z| < 1$ erhalten wir $z^{n+1} \to 0$ aus Satz III.2.7. Also folgt $S_n \to \frac{1-0}{1-z} = \frac{1}{1-z}$ aus den Grenzwertsätzen III.2.13.
(c) Für $|z| \geq 1$ ist $S_{n+1} - S_n = z^{n+1}$ nicht konvergent gegen 0 (Satz III.2.7), so dass die Reihe wegen Satz III.3.2 nicht konvergiert. ■

Satz III.3.4. (Grenzwertsatz für Reihen) *Sind die Reihen* $\sum_{k=1}^\infty a_k$ *und* $\sum_{k=1}^\infty b_k$ *konvergent und* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, *so ist die Reihe* $\sum_{k=1}^\infty (\lambda\, a_k + \mu\, b_k)$ *konvergent mit*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda\, a_k + \mu\, b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} a_k \; + \mu \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

Beweis. Das folgt sofort aus den Grenzwertsätzen III.2.13 für Folgen, da für $A_n := \sum_{k=1}^n a_k$, $B_n := \sum_{k=1}^n b_k$ und $C_n := \sum_{k=1}^n (\lambda\, a_k + \mu\, b_k)$ die Beziehung $C_n = \lambda \cdot A_n + \mu \cdot B_n$ gilt. ■

Beispiel III.3.5. Wir betrachten die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)}$. Für die Teilsummen erhalten wir

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Daher gilt $S_n \to 1$ und somit $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)} = 1$. ■

Definition III.3.6. (i) Eine Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ heißt *beschränkt*, wenn die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihrer Partialsummen beschränkt ist, d.h., die Menge $\{|A_n| \colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ ist beschränkt.

(ii) Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ heißt *positiv*, wenn $a_k \geq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. ■

Beachte: Eine Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ ist genau dann positiv, wenn ihre Partialsummenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und $a_1 \geq 0$ ist.

Satz von der monotonen Konvergenz für Reihen

Satz III.3.7. *Jede positive beschränkte Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert gegen*

$$\sup\{\sum_{k=1}^{n} a_k : n \in \mathbb{N}\}.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus dem Satz über die monotone Konvergenz (Satz III.2.19), den wir auf die Folge der Teilsummen der Reihe anwenden. Da die Reihe positiv ist, ist die so erhaltene Folge monoton wachsend. ■

Wir kommen nun zu einem Konvergenzkriterium für Reihen mit nicht notwendigerweise nichtnegativen Gliedern. Wir nennen Reihen der Gestalt $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ mit $a_n \geq 0$ *alternierend.*

Leibniz-Kriterium

Satz III.3.8. *Sei* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton fallende Folge nichtnegativer Zahlen. Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *genau dann, wenn* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Nullfolge ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung $a_n \to 0$ folgt sofort aus Satz III.3.2. Es bleibt zu zeigen, dass diese Bedingung für alternierende Reihen hinreichend ist, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist.

Sei $A_n := \sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$ die n-te Teilsumme. Dann gelten:

(1) $A_{2n} \geq A_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} = A_{2n+2}\,,$
(2) $A_{2n+1} \leq A_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} = A_{2n+3}\,,$
(3) $A_{2n} \geq A_{2n} - a_{2n+1} = A_{2n+1} \geq A_1$ und
(4) $A_{2n} - A_{2n+1} = a_{2n+1}\,.$

Die Folge $(A_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist wegen (1) monoton fallend, die Folge $(A_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ wegen (2) monoton wachsend. Mit (3) folgt $A_{2n} \geq A_{2n+1} \geq A_1$; somit ist (A_{2n}) nach unten beschränkt. Also konvergiert (A_{2n}) nach dem Satz von der monotonen Konvergenz. Sei

$$A := \lim_{n\to\infty} A_{2n} = \inf\{A_{2n} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Gilt $a_n \to 0$, so folgt aus (4) weiter $A_{2n+1} = A_{2n} - a_{2n+1} \to A - 0 = A$ und folglich $A_n \to A$, da für jedes $\varepsilon > 0$ nur jeweils endlich viele A_{2n} bzw. A_{2n+1} nicht in $U_\varepsilon(A)$ liegen. ■

Beispiele III.3.9. Die folgenden beiden Reihen sind konvergent:

(a) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots (= \log 2)$
(b) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots (= \frac{\pi}{4})$. ■

Wie man an den beiden obigen Reihen erkennt, hätte man den Grenzwert sicher nicht so leicht direkt ausrechnen können. In diesem Sinne werden wir uns nun weiter damit beschäftigen, wie man die Konvergenz von Reihen untersuchen kann, ohne a priori Information über ihren Grenzwert zu haben.

Absolute Konvergenz von Reihen

Satz III.3.10. (Cauchy-Kriterium für Reihen) *Eine Zahlenreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *ist genau dann konvergent, wenn*

$$(CK) \qquad (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n, m \geq N) \ \Big|\sum_{k=n}^{m} c_k\Big| < \varepsilon.$$

Beweis. Sei $S_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$. Dann ist $S_m - S_{n-1} = \sum_{k=n}^{m} c_k$. Die Behauptung folgt nun aus dem Cauchy-Kriterium für Folgen (Folgerung III.2.33). ∎

Definition III.3.11. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn die positive Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ der Beträge konvergiert.

Satz III.3.12. *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Beweis. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konvergent. Zu $\varepsilon > 0$ existiert dann ein N_ε mit $\sum_{n=1}^{N_\varepsilon} |c_n| > \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| - \varepsilon$, d.h. $\sum_{n=N_\varepsilon+1}^{\infty} |c_n| < \varepsilon$. Für $m \geq n > N_\varepsilon$ gilt dann

$$\Big|\sum_{k=n}^{m} c_k\Big| \leq \sum_{k=n}^{m} |c_k| \leq \sum_{k=N_\varepsilon+1}^{\infty} |c_k| \leq \varepsilon.$$

Die Reihe konvergiert also nach dem Cauchy-Kriterium III.3.10. ∎

Reihen, die nicht absolute konvergent sind, zeigen ein etwas merkwürdiges Konvergenzverhalten, wie das folgende Beispiel zeigt: Sei

$$S := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \pm \dots$$

die Summe der alternierenden harmonischen Reihe, die nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} S &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} \pm \dots \\ +\frac{1}{2}S &= 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} \pm \dots \\ \frac{3}{2}S &= 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \pm \dots \end{aligned}$$

Lässt man die Nullen weg, so entsteht nach geeigneter Umordnung aus der Reihe in der letzten Zeile wieder die alternierende harmonische Reihe. Die führt zu dem scheinbaren Widerspruch $S = \frac{3}{2}S$, der sich nur dadurch auflösen lässt, dass man feststellt, dass der Grenzwert einer Reihe sich im allgemeinen bei einer Umordnung ändert (vgl. Satz III.3.14).

Dass dies bei absolut konvergenten Reihen nicht passiert, sagt uns der folgende Satz.

$\boxed{\text{UMORDNUNGSSATZ}}$

Satz III.3.13. *Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *sei absolut konvergent und* $\alpha\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijektiv. Dann konvergiert auch die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha(k)}$ *absolut und hat denselben Grenzwert.*

Beweis. Sei $C_n := \sum_{k=1}^{n} c_k$, $B_n := \sum_{k=1}^{n} c_{\alpha(k)}$ und $\varepsilon > 0$. Nach Voraussetzung existiert ein $M \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{k=M}^{m} |c_k| < \varepsilon$ für alle $m \geq M$. Wir setzen

$$N := \max\{n \in \mathbb{N}\colon \alpha(n) \leq M\}$$

und beachten, dass dieses Maximum existiert, da wegen der Bijektivität genau M natürliche Zahlen n mit $\alpha(n) \leq M$ existierten. Für $n > N$ erhalten wir nun

$$\begin{aligned} |B_n - C_n| &= \Big| \sum_{k=1}^{n} c_{\alpha(k)} - \sum_{k=1}^{n} c_k \Big| = \Big| \sum_{k=1,\alpha(k)>M}^{n} c_{\alpha(k)} - \sum_{k=M+1}^{n} c_k \Big| \\ &\leq \Big| \sum_{k=1,\alpha(k)>M}^{n} c_{\alpha(k)} \Big| + \Big| \sum_{k=M+1}^{n} c_k \Big| \\ &\leq \sum_{k=1,\alpha(k)>M}^{n} |c_{\alpha(k)}| + \sum_{k=M+1}^{n} |c_k| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} C_n = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

und somit $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k$. Wendet man dies nun auf die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|$ an, so folgt $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |c_{\alpha(k)}|$, d.h., die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha(k)}$ ist absolut konvergent. ■

Wie wenig stabil nicht absolut konvergente Reihen gegenüber Umordnungen sind, zeigt der folgende Satz.

Satz III.3.14. (Riemannscher[1] Umordnungssatz) *Ist die reelle Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ *konvergent und nicht absolut konvergent, so existiert zu jedem beliebigen* $x \in \mathbb{R}$ *eine Bijektion* $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *mit* $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha(k)} = x$.

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass wir o.B.d.A. annehmen dürfen, dass alle Folgenglieder $c_k \neq 0$ sind. Ist dies nicht der Fall, so betrachten wir nur die entsprechende Teilfolge.

Man kann jedes Glied c_k der Reihe in der Form $c_k = a_k + b_k$ schreiben, wobei $a_k := \max(c_k, 0)$ und $b_k := \min(c_k, 0)$ ist. Die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ enthält dann ausschließlich nichtnegative und die Folge $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nichtpositive Glieder. Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ zwar konvergiert, aber nicht absolut konvergiert, gilt $a_k \to 0$, $b_k \to 0$, $\sum_{k=1}^{n} a_k \to \infty$ und $\sum_{k=1}^{n} b_k \to -\infty$, denn aus der Konvergenz von

[1] Bernhard Riemann (1826–1866), Mathematiker in Göttingen

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ würde die von $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ folgen und damit die absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$.

Wir wählen jetzt die Folgenglieder $c_{\alpha(n)}$ rekursiv wie folgt. Seien $c_{\alpha(j)}$ für $j = 1, \ldots, n$ gewählt und

$$\{c_{\alpha(1)}, \ldots, c_{\alpha(n)}\} = \{a_j : j \leq k, a_j \neq 0\} \cup \{b_j : j \leq m, b_j \neq 0\}.$$

Sei $a_{k'}$ das erste von 0 verschiedene Folgenglied mit $k < k'$ und entsprechend $b_{m'}$ mit $m < m'$. Wir setzen nun $c_{\alpha(n+1)} := a_{k'}$ oder $c_{\alpha(n+1)} := b_{m'}$, je nachdem, ob $d_n := \sum_{k=1}^{n} c_{\alpha(k)} < x$ oder $\geq x$ ist. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $a_k \to 0$ und $b_k \to 0$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|c_{\alpha(n)}| \leq \varepsilon$ für alle $n > N$ gilt. Dann erhalten wir zwei Fälle:
(1) Sei $d_N < x$ und $d_{N+k} \geq x$, k minimal. Dann ist $|d_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq N + k$.
(2) Ist $d_N \geq x$, so argumentiert man analog.
Wir erhalten schließlich $d_n \to x$, d.h. $\sum_{k=1}^{\infty} c_{\alpha(k)} = x$. Schließlich überlegt man sich, dass die so erhaltene Abbildung $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijektiv ist. ■

Die Cauchy-Produktformel

Satz III.3.15. *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zwei absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$. Dann ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent, und es gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

Beweis. Sei $A_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$, $B_n := \sum_{k=0}^{n} b_k$, $C_n := \sum_{k=0}^{n} c_k$ sowie $A_n \to A$ und $B_n \to B$. Wir zeigen zuerst $\lim_{n\to\infty} C_n = AB$. Sei dazu $C_n^* := A_n B_n$. Dann gilt wegen den Grenzwertsätzen $C_n^* \to AB$, und es reicht daher aus, $\lim_{n\to\infty}(C_n - C_n^*) = 0$ zu zeigen, denn hieraus folgt dann $C_n = (C_n - C_n^*) + C_n^* \to AB$. Wir haben

$$C_n^* = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j = \sum_{0 \leq k,j \leq n} a_k b_j \quad \text{und} \quad C_n = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{i-j} b_j = \sum_{0 \leq k+j \leq n} a_k b_j.$$

(Man beachte die Summationsbereiche.) Wir suchen nun ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{\substack{0 \leq k,j \leq n \\ k+j > n}} |a_k| \cdot |b_j| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n > N_\varepsilon$$

gilt, denn dann ist nach der Dreiecksungleichung $|C_n - C_n^*| < \varepsilon$. Sei also

$$P_n := \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} |a_k| \cdot |b_j| = \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)\left(\sum_{j=0}^{n} |b_j|\right).$$

Da die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergieren, konvergiert die Folge P_n gegen eine Zahl $P \in \mathbb{R}$. Damit gibt es eine Zahl $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|P_m - P_n| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq N_\varepsilon$ (Cauchy-Kriterium). Für $n > 2N_\varepsilon$ ist dann

$$\sum_{\substack{0 \leq k,j \leq n \\ k+j > n}} |a_k| \cdot |b_j| \ \leq P_n - P_{N_\varepsilon} < \varepsilon,$$

da aus $k + j > n > 2N_\varepsilon$ schon $k > N_\varepsilon$ oder $j > N_\varepsilon$ folgt. Hieraus erhalten wir $C_n \to A \cdot B$, d.h. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Es bleibt nun noch die absolute Konvergenz zu zeigen. Wir haben zunächst

$$|c_n| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k\right| \leq c_n' := \sum_{k=0}^{n} |a_{n-k}| \cdot |b_k|.$$

Wegen dem ersten Teil ist $\sum_{n=0}^{\infty} c_n' = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$. Insbesondere ist diese Reihe konvergent; folglich konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|$ wegen Satz III.3.7, da diese Reihe beschränkt und positiv ist. ■

Bemerkung III.3.16. Die absolute Konvergenz der Reihen ist essentiell für die Gültigkeit der Cauchyschen Produktformel. Als Beispiel betrachten wir die durch

$$a_n = b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

gegebenen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, die nach dem Leibnizkriterium konvergieren. Andererseits ergibt sich

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Wir zeigen, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ divergent ist, indem wir nachweisen, dass $(-1)^n c_n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wegen

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}} \geq \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2}} \geq \frac{1}{n+1}$$

ist $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}} \geq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+1} = 1$, d.h., die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ist nicht konvergent. ■

III.4. Konvergenzkriterien für Reihen

In diesem Abschnitt werden wir einige Kriterien kennenlernen, mit denen man die Konvergenz vieler Reihen nachweisen kann. Hierbei tritt eine neue Situation auf. Wir werden Reihen sehen, deren Konvergenz sich zwar beweisen lässt, deren Grenzwert wir aber nicht angeben können. Dies führt uns insbesondere zu der *Eulerschen Zahl* e.

Definition III.4.1. Die positive Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *Majorante* der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, wenn $|c_n| \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. ■

Um die Konvergenz einer Reihe zu zeigen, zieht man oft Reihen heran, über die man schon Bescheid weiß. Wie dies funktioniert, zeigt der folgende Satz.

Satz III.4.2. (Majorantenkriterium) *Jede Reihe mit einer konvergenten Majorante konvergiert absolut.*

Beweis. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Majorante der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\sum_{n=1}^{k} |c_n| \leq \sum_{n=1}^{k} a_n \leq \sup \left\{ \sum_{n=1}^{k} a_n \colon k \in \mathbb{N} \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Damit ist $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ positiv und beschränkt und nach Satz III.3.7 somit konvergent. ■

Anwendungen des Majorantenkriteriums

Satz III.4.3. (Verdichtungskriterium von Cauchy) *Sei* $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine nichtnegative reelle monoton fallende Folge. Dann konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *genau dann, wenn die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n c_{2^n}$ *konvergiert.*

Anschaulich ist dies klar, wenn man die Glieder der Reihe wie angedeutet gruppiert:

$$c_1 + \underbrace{c_2 + c_3}_{\leq 2c_2} + \underbrace{c_4 + \ldots + c_7}_{\leq 4c_4} + \underbrace{c_8 + \ldots + c_{15}}_{\leq 8c_8} + \ldots$$

$$c_1 + c_2 + \underbrace{c_3 + c_4}_{\geq 2c_4} + \underbrace{c_5 + \ldots + c_8}_{\geq 4c_8} + \underbrace{c_9 + \ldots + c_{16}}_{\geq 8c_{16}} + \ldots .$$

Beweis. Wegen $c_n \geq c_{n+1} \geq 0$ gilt

$$\sum_{n=2^k}^{2^{k+1}-1} c_n \leq 2^k \cdot c_{2^k}, \quad \text{also} \quad \sum_{n=2}^{2^{k+1}-1} c_n \leq \sum_{n=1}^{k} 2^n \cdot c_{2^n}.$$

Ist $\sum_{n=1}^\infty 2^n c_{2^n}$ konvergent und daher beschränkt, so gilt dies auch für $\sum_{n=1}^\infty c_n$, und die Konvergenz folgt aus dem Satz über die monotone Konvergenz. Umgekehrt gilt

$$2 \cdot \sum_{n=2^{k-1}+1}^{2^k} c_n \geq 2 \cdot 2^{k-1} c_{2^k} = 2^k c_{2^k}, \quad \text{also} \quad 2\sum_{n=2}^{2^k} c_n \geq \sum_{n=1}^{k} 2^n c_{2^n}.$$

Konvergiert $\sum_{n=1}^\infty c_n$, so also auch $\sum_{n=1}^\infty 2^n c_{2^n}$. ∎

Folgerung III.4.4. *Für $\alpha \in \mathbb{Q}$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist.*

Beweis. Für $\alpha < 0$ ist $\frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha} \geq 1$ und die Folge $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen Null. Wegen Satz III.3.2 ist die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$ daher divergent.

Sei $\alpha \geq 0$. Dann gilt $n^\alpha \leq (n+1)^\alpha$ (Aufgabe II.2.4), also auch $\frac{1}{(n+1)^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Das Verdichtungskriterium ist also anwendbar. Wir rechnen:

$$\sum_{k=1}^\infty 2^k \cdot \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=1}^\infty 2^{k(1-\alpha)} = \sum_{k=1}^\infty (2^{1-\alpha})^k$$

Dies ist eine geometrische Reihe, also genau dann konvergent, wenn $2^{1-\alpha} < 1 = 2^0$, also wenn $1-\alpha < 0$ ist, d.h. $\alpha > 1$. ∎

Man kann mithilfe der Theorie der Fourierreihen zeigen, dass

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

gilt. Die Zahl π werden wir allerdings erst später durch die Cosinusfunktion definieren.

Folgerung III.4.5. *Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ divergiert, obwohl die Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, d.h. gegen Null konvergiert.* ∎

Quotienten- und Wurzelkriterium

Wir haben schon im Beweis von Folgerung III.4.4 gesehen, dass man die geometrische Reihe zum Vergleich heranziehen kann. Wir schauen uns weitere Anwendungen dieses Typs an.

$\boxed{\text{Quotientenkriterium}}$

Satz III.4.6. *Existiert* $0 \leq \alpha < 1$ *mit* $|c_{n+1}| \leq \alpha |c_n|$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$, *so konvergiert* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *absolut. Dies gilt insbesondere, wenn* $c_n \neq 0$ *für fast alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt und*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < 1.$$

Gilt umgekehrt

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} > 1,$$

so ist die Reihe divergent.

Beweis. Induktiv erhalten wir $|c_{N+k}| \leq \alpha^k |c_N|$ für ein ausreichend großes N und alle $k \in \mathbb{N}$. Also hat $\sum_{n=N}^{\infty} c_n$ die Majorante $\sum_{n=N}^{\infty} \alpha^{n-N} |c_N|$, die wegen $\alpha < 1$ konvergiert. Die erste Behauptung folgt daher aus dem Majorantenkriterium.

Gilt $c_n \neq 0$ für all n, $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < 1$ und ist $\alpha \in \mathbb{R}$ mit

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} < \alpha < 1,$$

so gilt $|c_{n+1}| \leq \alpha |c_n|$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist in diesem Fall die Voraussetzung erfüllt.

Ist andererseits $c_n \neq 0$ für all n und $\alpha := \underline{\lim} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} > 1$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ with $|c_{n+1}| \geq \alpha |c_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $|c_n| \geq \alpha^{n-N} |c_N|$. Aus $\alpha > 1$ folgt daher, dass die Folge (c_n) nicht beschränkt ist, also insbesondere nicht gegen 0 konvergiert. ∎

Beispiele III.4.7. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ konvergiert, denn es gilt für $c_n = \frac{n^2}{2^n}$:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}.$$

Das Quotientenkriterium liefert also die Behauptung. ∎

Bemerkung III.4.8. (a) Für die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gilt zwar $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n}{n+1} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber wegen $\frac{n}{n+1} \to 1$ existiert keine Zahl $\alpha < 1$ mit $\frac{n}{n+1} < \alpha$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Das Quotientenkriterium ist hier also *nicht* anwendbar.

(b) Für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hingegen gilt $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \to 1$, obwohl die Reihe konvergiert (vgl. Folgerung III.4.4). Das Quotientenkriterium ist **hinreichend** für die Konvergenz, aber **nicht notwendig**. ■

Das nun folgende Kriterium ist häufiger anwendbar:

WURZELKRITERIUM

Satz III.4.9. (a) *Ist*

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|} < 1,$$

so konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *absolut.*

(b) *Falls* $\sqrt[n]{|c_n|} \geq 1$ *für unendlich viele* $n \in \mathbb{N}$ *gilt, so divergiert die Reihe. Dies ist insbesondere für*

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|} > 1$$

der Fall.

Beweis. (a) Ist $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|} < 1$, so existiert ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|} < \alpha < 1$. Dann gilt $|c_n| \leq \alpha^n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$, d.h., für ein ausreichend großes $N \in \mathbb{N}$ ist die Reihe $\sum_{n=N}^{\infty} \alpha^n$ eine konvergente Majorante von $\sum_{n=N}^{\infty} c_n$. Die absolute Konvergenz der Reihe folgt also aus dem Majorantenkriterium.

(b) Ist $\sqrt[n]{|c_n|} \geq 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$, so ist $|c_n| \geq 1$ und daher gilt $c_n \not\to 0$. Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nicht (Satz III.3.2). ■

Lemma III.4.10. *Es gelten*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \textit{und} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1 \textit{ für alle } c > 0.$$

Beweis. Es gilt $\sqrt[n]{n} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir haben also zu zeigen, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$ für $n > N_\varepsilon$ gilt. Da $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$ zu $n < (1+\varepsilon)^n$ äquivalent ist, beachten wir zunächst

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k \geq \binom{n}{2} \varepsilon^2 = \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2.$$

Aus dem Satz von Archimedes folgt die Existenz eines N_ε mit $\frac{n-1}{2}\varepsilon^2 > 1$ für $n > N_\varepsilon$. Damit gilt aber auch $(1+\varepsilon)^n \geq n$ für $n > N_\varepsilon$. Damit ist $\sqrt[n]{n} \to 1$ gezeigt.

Wegen $\sqrt[n]{\frac{1}{c}} = \frac{1}{\sqrt[n]{c}}$ dürfen wir o.B.d.A. $c \geq 1$ annehmen. Dann ist $1 \leq c \leq n$ für fast alle n und somit auch $1 \leq \sqrt[n]{c} \leq \sqrt[n]{n}$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ folgt hieraus $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$. ■

Bemerkung III.4.11. (a) Für die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ergibt sich nach (a) für das Wurzelkriterium $\sqrt[n]{c_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$. Dieses Kriterium ist also nicht anwendbar, bzw. gibt uns keine Auskunft. Ebenso erhalten wir für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ mit dem Wurzelkriterium $\sqrt[n]{c_n} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \to 1$; es ist also auch hier nicht anwendbar. Das Wurzelkriterium ist **hinreichend** für die Konvergenz, aber **nicht notwendig**.

(b) Ist das Quotientenkriterium anwendbar, so auch das Wurzelkriterium. Dies sieht man wie folgt:
Sei $0 \leq \alpha < 1$. Aus $|c_{n+1}| \leq \alpha |c_n|$ für alle $n > N$ folgt $|c_n| \leq \alpha^{n-N}|c_N| = \alpha^n \frac{|c_N|}{\alpha^N}$ (Induktion!). Hieraus erhält man wegen Lemma III.4.10

$$\sqrt[n]{|c_n|} \leq \alpha \sqrt[n]{\frac{|c_N|}{\alpha^N}} \to \alpha < 1.$$

Insbesondere ist $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|} \leq \alpha < 1$.

(c) Man kann beachte den Unterschied in den Divergenzbedingungen im Quotientenkriterium: $\underline{\lim}\ \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} > 1$ und $\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|} > 1$ im Wurzelkriterium.

(d) Für $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, die durch

$$c_n := \begin{cases} x^n, & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2x^n, & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

gegeben ist. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = |x|$ (Lemma III.4.10) wegen $\lim \sqrt[n]{2} = 1$; das Wurzelkriterium liefert also Konvergenz für $|x| < 1$ und Divergenz $|x| > 1$. Hingegen erhält man mit dem Quotientenkriterium

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \begin{cases} 2x; & n \text{ gerade} \\ \frac{x}{2}; & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

und somit Konvergenz für $|x| < \frac{1}{2}$ sowie Divergenz für $|x| > 2$. Man sieht, dass das Quotientenkriterium mitunter weniger scharfe Schlüsse zulässt. ■

Beispiel III.4.12. Ist die komplexe Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ absolut, denn ist $|a_k| \leq A$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so hat $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ die konvergente Majorante $A \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k$ (geometrische Reihe). ■

Satz III.4.13. (Konvergenz von Potenzreihen) *Zu einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen betrachten wir die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.*

(1) *Die Zahl $R := \sup\{r \in \mathbb{R} \colon \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < \infty\}$ heißt Konvergenzradius der Potenzreihe. Ist $|z| < R$ so konvergiert die Potenzreihe, und für $|z| > R$ liegt Divergenz vor.*

(2) *Der Konvergenzradius lässt sich durch folgende Formel von Hadamard berechnen:*

$$R := \frac{1}{\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}} \in [0, \infty],$$

wobei wir $\frac{1}{0} = \infty$ *und* $\frac{1}{\infty} = 0$ *setzen.*

Beweis. Aus dem Wurzelkriterium folgt sofort, dass $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ konvergiert, falls

$$|z| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n z^n|} < 1$$

gilt und divergiert, falls

$$|z| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$$

ist. Ist $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, so liegt als nur für $z = 0$ Konvergenz vor und für $\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ konvergiert die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$. In allen anderen Fällen sehen wir, dass die Reihe konvergiert, wenn

$$|z| < \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

gilt und divergiert, wenn

$$|z| > \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

ist. Hieraus ergeben sich sofort (1) und (2). ■

Die Kreisscheibe $U_R(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ nennen wir *Konvergenzkreis der Potenzreihe*. Für $|z| = R$ erhalten wir aus dem Wurzelkriterium keine Information. Daher muss man diese Fälle jeweils gesondert betrachten, wie wir es bei der Diskussion der geometrischen Reihe (das ist der Fall $a_n = 1$) in Satz III.3.3 getan haben. Wir werden später auf Potenzreihen zurückkommen, da sie eine wichtige Rolle bei der Reihenentwicklung von Funktionen spielen (Taylorentwicklung).

Aufgabe III.4.2. (a) Für die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ gilt $R = 1$.

(b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist für die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^k z^n$ der Konvergenzradius $R = 1$.

(c) Ist $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Polynomfunktion, so ist der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) z^n$ durch $R = 1$ gegeben. ■

Darstellungen reeller Zahlen

Die Beobachtung in Beispiel III.4.12 hat eine wichtige Anwendung:

Satz III.4.14. *Sei* $b \geq 2$ *eine natürliche Zahl. Dann lässt sich jede reelle Zahl* $x \geq 0$ *in der Form*

$$x = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k \cdot b^{-k}, \quad a_k \in \{0, \ldots, b-1\}, m \in \mathbb{Z}$$

darstellen. Die Darstellung ist eindeutig, wenn man ausschließt, dass $a_k = b - 1$ *für fast alle* k *gilt.*

Man nennt obige Entwicklung für $b = 10$ *Dezimalentwicklung* und für $b = 2$ *Dualentwicklung*. Allgemein spricht man von der b-al-Entwicklung. Für $b = 10$ schreibt man auch kürzer

$$\sum_{k=-m}^{\infty} a_k \cdot 10^{-k} = a_{-m}a_{-m+1} \dots a_{-1}a_0, a_1a_2a_3 \dots,$$

z.B.

$$2006,1107 = 2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^0 + 1 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 7 \cdot 10^{-4}.$$

Beweis. Zunächst folgt aus obigem Beispiel III.4.12 und $\frac{1}{b} < 1$ die Konvergenz von Reihen der Gestalt $\sum_{k=-m}^{\infty} a_k \cdot b^{-k}$, wenn $a_k \in \{0, \dots b-1\}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Existenz der Darstellung: Wir dürfen o.B.d.A. $x > 0$ annehmen (warum?). Man bestimmt die Zahlen a_k rekursiv wie folgt: Ist $b^{-n} > x$ (beachte $b^{-n} \to \infty$ für $n \to -\infty$, vgl. Satz III.2.7), so setzen wir $a_n := 0$. Sei $m := \max\{k \in \mathbb{Z} \colon b^k \leq x\}$.

Sei jetzt $n \geq -m$. Wir nehmen an, dass wir a_k für $k < n$ schon so gewählt haben, dass

$$x - b^{-(n-1)} < \sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot b^{-k} \leq x$$

gilt. Dies ist insbesondere für $n = -m$ der Fall. Dann bestimmen wir a_n maximal mit $\sum_{k=-m}^{n} a_k \cdot b^{-k} \leq x$ und beachten, dass dies $a_n \leq b - 1$ zur Folge hat, denn

$$\sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot b^{-k} + bb^{-n} = \sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot b^{-k} + b^{-(n-1)} > x.$$

Weiter folgt aus der Maximalität von a_n:

$$x - b^{-n} < \sum_{k=-m}^{n} a_k \cdot b^{-k} \leq x.$$

Die n-te Partialsumme ist also die größte b-al Zahl mit n Stellen hinter dem Komma, die noch nicht größer als x ist. Induktiv erhalten wir

$$\left| \sum_{k=-m}^{n} a_k \cdot b^{-k} - x \right| < b^{-n}$$

und daher $\sum_{k=-m}^{\infty} a_k \cdot b^{-k} = x$ wegen $b^{-n} \to 0$.

Eindeutigkeit der Darstellung: Sei

$$x = \sum_{k=-m}^{\infty} a_k \cdot b^{-k} = \sum_{k=-m}^{\infty} c_k \cdot b^{-k},$$

wobei unendlich viele a_k bzw. c_k ungleich $b-1$ sind. Gibt es ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $a_n \neq c_n$, so existiert ein minimales n mit dieser Eigenschaft (Wohlordnungsprinzip). Sei o.B.d.A. $a_n > c_n$. Dann gilt

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \cdot b^{-k} < \sum_{k=n+1}^{\infty} (b-1)b^{-k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} b^{-(k-1)} - \sum_{k=n+1}^{\infty} b^{-k} = b^{-n}$$

und folglich

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=-m}^{\infty} c_k \cdot b^{-k} = \sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot b^{-k} + c_n b^{-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \cdot b^{-k} \\ &< \sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot b^{-k} + (a_n - 1)b^{-n} + b^{-n} \\ &= \sum_{k=-m}^{n-1} a_k \cdot b^{-k} + a_n b^{-n} = \sum_{k=-m}^{n} a_k \cdot b^{-k} \leq x. \end{aligned}$$

Das ist ein Widerspruch. ■

Bemerkung III.4.15. (a) Mit Satz III.4.13 haben wir unsere reellen Zahlen wieder als das erkannt, was man schon in der Schule kennenlernt: Alle Zahlen, die sich durch Dezimalentwicklungen darstellen lassen. Der große Nachteil des Zugangs zu den reellen Zahlen über ihre Dezimalentwicklung ist, dass man die zentralen Eigenschaften der reellen Zahlen, die wir direkt axiomatisch fixiert haben, nur sehr umständlich verifizieren kann.

(b) In Digitalrechnern sind Systeme zur Basis 2^n am einfachsten zu behandeln. Das gilt insbesondere für $n = 1$, da ein Schalter zwei Zustände hat, 1 (für „ein“) und 0 (für „aus“). ■

Überabzählbarkeit der reellen Zahlen

Wir haben in Folgerung II.2.20 gesehen, dass zwischen zwei reellen Zahlen immer eine rationale Zahl liegt. Man könnte daher annehmen, dass es genausoviele reelle wie rationale Zahlen gibt. dass dieser Schluss in die Irre führt, zeigt der folgende Satz:

Satz III.4.16. *Das Intervall* $]0,1[$ *ist nicht abzählbar. Insbesondere ist die Menge* $\mathbb{R}$ *der reellen Zahlen nicht abzählbar.*

Beweis. Wir verwenden das *Cantorsche Diagonalverfahren.* Angenommen, $]0,1[$ ist abzählbar, d.h. $]0,1[= \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Dann lässt sich jede Zahl x_n als Dezimalreihe

$$x_n = 0, a_1^{(n)} a_2^{(n)} a_3^{(n)} \ldots := \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(n)} 10^{-k}$$

darstellen (Satz III.4.14). Wir definieren $c \in \,]0,1[$ durch $c = \sum_{k=1}^{\infty} c_k 10^{-k}$ mit

$$c_k := \begin{cases} 5, & \text{falls } a_{k,k} \neq 5 \\ 4, & \text{falls } a_{k,k} = 5. \end{cases}$$

Dann ist $c_k \neq a_{k,k}$ für alle $k \geq 1$. Aus Satz III.4.13 folgt nun $c \neq x_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ wegen der Eindeutigkeit der Darstellung. Die reelle Zahl c ist also nicht in der Aufzählung enthalten; Widerspruch. ∎

Folgerung III.4.17. *Die Menge $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ der irrationalen Zahlen ist nicht abzählbar. In diesem Sinne gibt es also „mehr" irrationale Zahlen als rationale.* ∎

Die Exponentialfunktion

Satz III.4.18. *Die Exponentialreihe*

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$. Die Exponentialfunktion

$$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

hat folgende Eigenschaften:

(1) (*Funktionalgleichung*) $e^{x+y} = e^x e^y$ *für alle* $x, y \in \mathbb{C}$.

(2) *Für alle* $x \in \mathbb{C}$ *gilt* $e^{-x} = (e^x)^{-1}$.

(3) *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *ist* $e^x > 0$.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Konvergenz der Reihe. Für $c_n = \frac{z^n}{n!}$ gilt $|c_{n+1}| = |c_n| \cdot \frac{|z|}{n+1}$ und $\frac{|z|}{n+1} \to 0$. Die absolute Konvergenz der Reihe folgt daher für jedes $z \in \mathbb{C}$ aus dem Quotientenkriterium.

(1) Wegen der absoluten Konvergenz der Reihen für e^x und e^y gilt nach der Cauchy-Produktformel III.3.15

$$e^x \cdot e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} x^{n-k} \frac{1}{k!} y^k.$$

Nun folgt aus dem binomischen Lehrsatz

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!k!} x^{n-k} y^k = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k-n} y^k = \frac{1}{n!}(x+y)^k.$$

Also ist $e^x \cdot e^y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(x+y)^n = e^{x+y}$.

(2) Dies folgt einfach aus $e^{-x} e^x = e^{-x+x} = e^0 = 1$.

(3) erhalten wir aus (1) und (2) durch $e^x = e^{\frac{x}{2}} \cdot e^{\frac{x}{2}} = (e^{\frac{x}{2}})^2 > 0$. ∎

Die Zahl

$$e := e^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

heißt *Eulersche Zahl*. Wegen $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \ldots$ ist $e > 2{,}6$. Etwas genauer ist $e = 2{,}7182871826198\ldots$. Eine andere Darstellung der Zahl e erhalten wir aus dem folgenden Satz.

Satz III.4.19. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt*

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Beweis. Sei $x_n := \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$, $y_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ und $\varepsilon > 0$. Wir zeigen die Existenz von $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - y_n| < \varepsilon$ für alle $n > N_\varepsilon$. Hieraus folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = e^z.$$

Wegen der absoluten Konvergenz $y_n \to e^z$ existiert zunächst ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{|z|^k}{k!} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mit dem binomischen Lehrsatz erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} x_n = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\,n^k} \cdot z^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \underbrace{\prod_{l=0}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{n}\right)}_{\leq 1} \end{aligned}$$

und daher

$$y_n - x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} \underbrace{\left[1 - \prod_{l=0}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{n}\right)\right]}_{\in[0,1]}.$$

Also ist

$$|y_n - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=0}^{N} \frac{|z|^k}{k!} \left[1 - \prod_{l=0}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{n}\right)\right]$$

für alle $n > N$. Schließlich existiert ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{|z|^k}{k!} \left[1 - \prod_{l=0}^{k-1} \left(1 - \frac{l}{n}\right)\right] < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $n > N_\varepsilon$. Damit ergibt sich $|y_n - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. ■

Bemerkung III.4.20. Eine Möglichkeit, den Grenzwert aus Satz III.4.19 zu interpretieren, stellt die kontinuierliche Verzinsung dar. Wir stellen uns z als Zinssatz für ein Jahr vor und bezeichnen mit k_{alt} das Anfangskapital. Dann gilt bei

- jährlicher Berechnung der Zinsen: $k_{neu}^{(1)} = k_{alt} \cdot (1 + z)$
- halbjähriger Berechnung: $k_{neu}^{(2)} = k_{alt} \cdot (1 + \frac{z}{2})^2$
- $\frac{1}{n}$-jähriger Berechnung: $k_{neu}^{(n)} = k_{alt} \cdot (1 + \frac{z}{n})^n$.

Im Grenzwert (kontinuierliche Verzinsung) ergibt sich $k_{neu}^{\infty} = k_{alt} \cdot e^z$. ■

Aufgabe III.4.1. Zeigen Sie, dass für $z \geq 0$ die Folge $(1 + \frac{z}{n})^n$ monoton wachsend ist. Warum liegt dies wegen Bemerkung III.4.20 nahe? ■

IV. Stetigkeit

IV.1. Stetige Funktionen

Stetige Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind vielen sicher schon aus der Schule bekannt. Dort erwirbt man sich die „naive“ Vorstellung, dass eine stetige Funktion eine Funktion ist, deren Graphen man ohne Absetzen des Stiftes durchzeichnen kann. Bevor wir uns der Thematik detailliert zuwenden, wollen wir einige Beispiele von Funktionen betrachten.

(1) Die Funktion $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_1(x) = x^2$ ist eine stetige Funktion.

(2) Die Funktion $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_2(x) = [x] := \max\{k \in \mathbb{Z}\colon k \leq x\}$ ($[x]$ wird als *Gaußklammer* bezeichnet) ist stückweise konstant und an allen $x \in \mathbb{Z}$ unstetig.

(3) Die *Sägezahnfunktion* $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_3(x) = x - [x]$ ist ebenfalls an allen ganzen x unstetig.

(4) Die Funktion

$$f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } |x| \geq 1 \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } \frac{1}{n} \leq |x| < \frac{1}{n-1}, \ n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \\ 0 & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

ist in allen Zahlen der Form $\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}$, unstetig aber stetig in 0.

Die Idee hinter dem Begriff der Stetigkeit ist, dass sich der Funktionswert der Funktion nur wenig ändern darf, wenn sich das Argument nur wenig ändert. So ändert sich der Funktionswert von f_2 um 1, wenn man etwa vom Argument $x = 1$ nur ein Tausendstel abzieht; im Verhältnis zur Änderung des Arguments ändert sich der Funktionswert sehr stark. Diese Funktion soll an diesen Punkten also nicht als stetig gelten. Die formale Definition sieht folgendermaßen aus. Sie ist eine der wichtigsten Definitionen der Analysis überhaupt.

Definition IV.1.1. (a) Es seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume. Eine Funktion $f : X \to Y$ heißt

(1) *stetig in* $p \in X$, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X) \quad d_X(x, p) < \delta \ \Rightarrow \ d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon;$$

und

(2) *stetig,* wenn sie an jedem Punkt $p \in X$ stetig ist.

(b) Für eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ und eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ergeben sich die folgenden Definitionen:

(1) f ist *stetig in* $p \in X$, wenn

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) \quad |x - p| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(p)| < \varepsilon$$

gilt.

(2) f ist *stetig,* wenn f in jedem Punkt $p \in X$ stetig ist. ■

Beispiel IV.1.2. (a) Ist (X, d) ein metrischer Raum und $p \in X$ ein Punkt, so ist die Abstandsfunktion

$$f_p \colon X \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(x, p)$$

stetig.

Zunächst erhalten wir durch zweimaliges Anwenden der Dreiecksungleichung:

$$|f_p(x) - f_p(y)| = |d(x, p) - d(y, p)| \leq d(x, y)$$

für alle $x, y \in X$ (vgl. Aufgabe III.1.1). Sei nun $\varepsilon > 0$. Mit $\delta = \varepsilon$ erhalten wir damit für $d(x, y) < \delta$ die Beziehung

$$|f_p(x) - f_p(y)| < \varepsilon.$$

Also ist die Funktion f_p stetig.

(b) Aus (a) folgt insbesondere, dass die Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}, f(z) := |z|$ stetig ist, denn $|z| = d(z, 0)$. ■

Damit wir besser mit diesem neuen Begriff umgehen können, geben wir mehrere Formulierungen der Stetigkeitsbedingung an.

Satz IV.1.3. *Für eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen den metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) sind äquivalent:*

(1) *f ist stetig in $p \in X$.*

(2) $(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists \delta > 0)\, f(U_\delta(p)) \subseteq U_\varepsilon(f(p))$.

(3) (Folgenkriterium) *Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \to p$ gilt $f(x_n) \to f(p)$.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2): Da f in p stetig ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$d_X(x, p) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

Dies bedeutet $x \in U_\delta(p) \Longrightarrow f(x) \in U_\varepsilon(f(p))$ bzw. $f(U_\delta(p)) \subseteq U_\varepsilon(f(p))$.

(2) $\Rightarrow$ (3): Es gelte $x_n \to p$ in X. Wir zeigen $f(x_n) \to f(p)$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $f(U_\delta(p)) \subseteq U_\varepsilon(f(p))$. Sei nun $N_\delta \in \mathbb{N}$ mit $d_X(x_n, p) < \delta$ für alle $n \geq N_\delta$. Dann ist $x_n \in U_\delta(p)$, also $f(x_n) \in U_\varepsilon(f(p))$ für alle $n \geq N_\delta$. Daher gilt $f(x_n) \to f(p)$.

(3) $\Rightarrow$ (1): (indirekter Beweis) Wir nehmen an, f sei in $p \in X$ unstetig. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für kein $\delta > 0$ gilt:

$$d_X(x,p) < \delta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Es existiert also für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Punkt $x_n \in X$ mit $d_X(x_n, p) < \frac{1}{n}$ und $d_Y(f(x_n), f(p)) \geq \varepsilon$. Damit gilt $x_n \to p$ und $f(x_n) \not\to f(p)$. Hiermit ist die Behauptung bewiesen. ■

Wir erinnern uns daran, dass wir eine Teilmenge U eines metrischen Raumes offen nennen, wenn für jedes $p \in U$ ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(p) \subseteq U$ existiert. Mit diesem Begriff können wir eine sehr einfache abstrakte Charakterisierung der Stetigkeit angeben.

$\boxed{\text{Stetigkeit und offene Mengen}}$

Satz IV.1.4. *Eine Funktion $f : X \to Y$ zwischen den metrischen Räumen (X, d_X) und (Y, d_Y) ist genau dann stetig, wenn für jede offene Teilmenge $V \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(V) \subseteq X$ offen ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei f stetig und $V \subseteq Y$ offen. Wir zeigen, dass $f^{-1}(V)$ offen ist. Sei dazu $p \in f^{-1}(V)$. Dann ist $f(p) \in V$, und wegen der Offenheit von V existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon\big(f(p)\big) \subseteq V$. Nach dem vorigen Satz existiert ein $\delta > 0$ mit $f\big(U_\delta(p)\big) \subseteq U_\varepsilon\big(f(p)\big) \subseteq V$, also $U_\delta(p) \subseteq f^{-1}(V)$. Wir haben damit gezeigt, dass die Menge $f^{-1}(V)$ zu jedem Punkte p eine δ-Umgebung von p enthält, d.h., $f^{-1}(V)$ ist offen.

„$\Leftarrow$“: Seien nun Urbilder offener Teilmengen von Y wieder offen und $p \in X$. Wir zeigen die Stetigkeit von f in p. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann ist $U_\varepsilon(f(p))$ eine offene Menge, die $f(p)$ enthält (Lemma III.1.6). Daher ist $f^{-1}(U_\varepsilon(f(p))) \subseteq X$ offen. Da p in dieser Menge enthalten ist, finden wir ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(p) \subseteq f^{-1}(U_\varepsilon(f(p)))$, d.h. mit $f(U_\delta(p)) \subseteq U_\varepsilon(f(p))$. Also ist f nach dem vorigen Satz in p stetig. ■

Satz IV.1.5. *Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) und (Z, d_Z) metrische Räume. Sind die Funktionen $f : X \to Y$ bzw. $g : Y \to Z$ in p bzw. in $f(p)$ stetig, so ist die Funktion $g \circ f : X \to Z$ in p stetig.*

Beweis. Um dies zu zeigen, verwenden wir das Folgenkriterium aus Satz IV.1.3(3) Sei $x_n \to p$ in X. Da f in p stetig ist, gilt $f(x_n) \to f(p)$. Da g in $f(p)$ stetig ist, gilt

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \to g(f(p)).$$

Also ist $g \circ f$ in p stetig. ■

Folgerung IV.1.6. *Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Funktionen zwischen metrischen Räumen, so ist die Komposition $g \circ f : X \to Z$ stetig.* ■

Satz IV.1.7. *Die Funktionen $f, g : X \to \mathbb{C}$ seien in $p \in X$ stetig.*

(1) *Für alle Zahlen $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ sind die Funktionen $\lambda f + \mu g$ und $f \cdot g$ in p stetig.*

(2) *Ist $f(p) \neq 0$ für alle $p \in X$, so ist auch die Funktion $\frac{1}{f} : X \to \mathbb{C},\ x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ stetig in p.*

Beweis. Wegen dem Folgenkriterium für die Stetigkeit in p (Satz IV.1.3(3)) folgen alle Behauptungen aus den Grenzwertsätzen für Folgen; als Beispiel sei der Beweis für die Stetigkeit von fg angegeben: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \to p$. Dann gelten, da f und g in p stetig sind, $f(x_n) \to f(p)$ und $g(x_n) \to g(p)$. Nach dem Satz über den Grenzwert des Produkts zweier konvergenter Folgen gilt dann auch $f(x_n)g(x_n) \to f(p)g(p)$. ■

Wir vermeiden an dieser Stelle die Schreibweise f^{-1} für die Funktion $\frac{1}{f}$, um Verwechslungen mit einer Umkehrfunktion im Sinne von Satz I.3.6 vorzubeugen.

Bemerkung IV.1.8. Im Punkt (2) des vorigen Satzes haben wir $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X$ vorausgesetzt, da die Funktion $\frac{1}{f} : X \to \mathbb{C}$ sonst gar nicht definiert ist. Man kann die Aussage (2) folgendermaßen verschärfen: Ist $f(p) \neq 0$ und f stetig in p, so gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in X \cap U_\delta(p)$. Dann ist also $1/f$ auf $U_\delta(p)$ definiert und stetig in p.

Um diese Aussage zu beweisen, setzen wir $\varepsilon := |f(p)|$ und wählen ein δ, so dass

$$|x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Dann gilt für $x \in U_\delta(p)$:

$$|f(x)| = |f(x) - f(p) + f(p)| \geq |f(p)| - |f(x) - f(p)| = \varepsilon - |f(x) - f(p)| > 0. \ ■$$

Beispiel IV.1.9. (Beispiele stetiger Funktionen)

(1) Die *identische Abbildung* $\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto x$ ist stetig, denn für alle $\varepsilon > 0$ kann man $\delta = \varepsilon$ wählen. Aus $|x - p| < \delta$ folgt dann $|f(x) - f(p)| = |x - p| < \varepsilon$.

(2) Die *konstante Funktion:* Für jedes $c \in \mathbb{C}$ ist die Funktion $\mathbb{C} \to \mathbb{C}, x \mapsto c$ stetig (hier ist $\delta > 0$ beliebig).

(3) Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ der Gestalt $f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k$ mit $a_k \in \mathbb{C}$ heißt *Polynomfunktion* oder *Polynom*. Ist $a_k \neq 0$, so nennt man k den *Grad des Polynoms* f. Mit Satz IV.1.7 und (1) sowie (2) erhalten wir induktiv die Stetigkeit aller Polynomfunktionen.

(4) *Rationale Funktionen:* Seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Polynomfunktionen und $D := \{z \in \mathbb{C} : g(z) \neq 0\}$. Dann ist die Funktion

$$\frac{f}{g} : D \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{f(z)}{g(z)}$$

stetig. Beispielsweise ist die Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{1\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{z+1}{z-1}$ stetig. ■

Satz IV.1.10. *Ein Polynom vom Grad n besitzt höchstens n Nullstellen.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion nach dem Grad des Polynoms. Ist der Grad 1, so ist die Behauptung trivial. Sei $n > 1$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein Polynom vom Grad n sowie z_0 eine Nullstelle von g. Mit

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0 + z_0)^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z_0^{k-j} (z - z_0)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \Big(\sum_{k=j}^{n} a_k \binom{k}{j} z_0^{k-j} \Big) (z - z_0)^j \end{aligned}$$

erhalten wir eine Darstellung von g als

$$g(z) = \sum_{j=0}^{n} b_j (z - z_0)^j.$$

Nun ist

$$0 = g(z_0) = \sum_{j=0}^{n} b_j (z_0 - z_0)^j = b_0.$$

Also ist $g(z) = (z - z_0) \sum_{j=0}^{n-1} b_{j+1} (z - z_0)^j$. Da der zweite Faktor nach Induktionsvoraussetzung höchstens $n - 1$ Nullstellen besitzt, sehen wir, dass g höchstens n Nullstellen besitzt. ■

Um den Umgang mit der Stetigkeit von Funktionen zu erleichtern, ist der folgende Konvergenzbegriff für Funktionen sehr nützlich.

Definition IV.1.11. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $p \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ und es existiere mindestens eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Wir schreiben

$$\lim_{x \to p} f(x) = a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\},$$

falls für jede solche Folge $f(x_n) \to a$ gilt.

Wir schreiben

$$\lim_{x \nearrow p} f(x) = a \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to p-} f(x) = a,$$

falls $f(x_n) \to a$ für alle Folgen in $D \cap]-\infty, p[$ mit $x_n \to p$ gilt (*linksseitiger Grenzwert von f in p*). Analog schreibt man

$$\lim_{x \searrow p} f(x) = a \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to p+} f(x) = a,$$

wenn $f(x_n) \to a$ für alle Folgen in $D \cap]p, \infty[$ mit $x_n \to p$ gilt (*rechtsseitiger Grenzwert von f in p*). ■

Aus dem Folgenkriterium für die Stetigkeit (Satz IV.1.3(3)) folgt sofort, dass die Stetigkeit im Punkt $p \in D$ äquivalent ist zu

$$\lim_{x \to p} f(x) = f(p).$$

Andererseits behaupten wir, dass für den Fall, dass $p \in D$ ist, folgende Äquivalenz gilt:

$$\lim_{x \to p} f(x) = a \quad \Longleftrightarrow \quad f(p) = a \quad \wedge \quad \lim_{x \nearrow p} f(x) = a \quad \wedge \quad \lim_{x \searrow p} f(x) = a.$$

In der Tat ist "$\Rightarrow$" trivial. Für "$\Leftarrow$" müssen wir zeigen, dass unter Voraussetzung der drei Bedingungen auf der rechten Seite für jede Folge $x_n \to p$ die Beziehung $f(x_n) \to a$ gilt. Ist dies nicht der Fall, so existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass die Menge $M_\varepsilon = \{n \in \mathbb{N} \colon |f(x_n) - a| \geq \varepsilon\}$ unendlich ist. Dann ist eine der beiden Mengen

$$\{n \in M_\varepsilon \colon x_n < p\} \quad \text{oder} \quad \{n \in M_\varepsilon \colon x_n > p\}$$

unendlich, und dies führt direkt zu einem Widerspruch zu einer der Aussagen auf der rechten Seite.

Beispiel IV.1.12. (a) Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto [x]$ gilt $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ für alle $p \notin \mathbb{Z}$. Für $p \in \mathbb{Z}$ haben wir $\lim_{x \nearrow p} f(x) = p - 1 \neq f(p)$ und $\lim_{x \searrow p} f(x) = p$. Also ist diese Funktion genau dann in $p \in \mathbb{R}$ stetig, wenn $p \notin \mathbb{Z}$ ist.

(b) Sei $m \in \mathbb{N}$. Für $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^m}$, gilt $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$, denn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \to \infty$ gilt $\frac{1}{x_n} \to 0$ und daher auch $f(x_n) = \left(\frac{1}{x_n}\right)^m \to 0$. ■

Aufgabe IV.1.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \colon D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Ist f monoton wachsend und $p \neq \min D$, so existiert der linksseitige Grenzwert $\lim_{x \nearrow p} f(x)$. Ist $p \neq \max D$, so existiert der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x \searrow p} f(x)$ und es gilt

$$\lim_{x \nearrow p} f(x) \leq \lim_{x \searrow p} f(x).$$

Die Funktion ist in $p \in D$ mit $\min D \neq p \neq \max D$ genau dann stetig, wenn $\lim_{x \nearrow p} f(x) = \lim_{x \searrow p} f(x)$ gilt.

(b) Sei $p \in \mathbb{R}$ und es existiere mindestens eine Folge in D, die gegen p konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{x \to p} f(x) = a$$

genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$(\forall x \in D) \quad |x - p| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - a| < \varepsilon$$

gilt.

(c) Sei $p = \infty$ und D nicht nach oben beschränkt. Dann gilt

$$\lim_{x \to p} f(x) = a$$

genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $R \in \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$(\forall x \in D) \quad x > R \quad \Rightarrow \quad |f(x) - a| < \varepsilon.$$

■

Eigenschaften stetiger Funktionen

Wir lernen in diesem Abschnitt einige Sätze über stetige Funktionen kennen, die wir in der Analysis II in einer sehr allgemeinen Form wiedersehen werden. Sie sind insbesondere für viele Anwendungen wichtig, da sie oft Existenzaussagen für die Lösungen von Gleichungen liefern.

Satz vom Maximum

Satz IV.1.13. *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt, d.h., die Bildmenge $f([a, b])$ ist eine beschränkte Menge, und f nimmt ein Minimum und ein Maximum an.*

Beweis. Sei $M := \sup f([a, b]) \subseteq \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Aus der Definition des Supremums folgt nun die Existenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $[a, b]$ mit $f(x_n) \to M$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Aus $a \leq x_{n_k} \leq b$ folgt $a \leq x \leq b$, und aus der Stetigkeit von f folgt $f(x_{n_k}) \to f(x)$. Hieraus folgt $M = f(x) < \infty$ und daher $M = \max f([a, b])$.

Für $m := \inf f([a, b])$ argumentiert man analog. ■

Etwas griffiger formuliert besagt Satz IV.1.13, dass jede stetige Funktion auf einem **abgeschlossenen, beschränkten** Intervall ein Maximum und ein Minimum annimmt.

Beispiel IV.1.14. (a) Die Funktion $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht beschränkt. Für Intervalle der Gestalt $]a, b]$ gilt der Satz IV.1.13 also nicht.

(b) Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - x^5$ nimmt auf $[0, 1]$ ein Maximum an. ■

Zwischenwertsatz

Satz IV.1.15. *Eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.*

Beweis. Wir dürfen o.B.d.A. $f(a) < f(b)$ annehmen, denn für $f(a) = f(b)$ ist die Behauptung trivial, und für $f(a) > f(b)$ beweist man sie analog. Sei also $f(a) < c < f(b)$. Wir haben die Existenz eines $p \in [a, b]$ mit $f(p) = c$ nachzuweisen. Sei dazu $p := \sup\{x \in [a, b] \colon f(x) \leq c\}$. Wir behaupten, dass $f(p) = c$ gilt.

Aus der Definition von p folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Existenz eines Elements $x_n \in [a, p]$ mit $x_n > p - \frac{1}{n}$ und $f(x_n) \leq c$ (vgl. Lemma II.2.14). Wegen $x_n \in [p - \frac{1}{n}, p]$ gilt $x_n \to p$, und wegen der Stetigkeit von f ist $f(p) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq c$. Insbesondere ist $p < b$. Ist $f(p) < c$, so existiert wegen der Stetigkeit von f ein $\delta > 0$, so dass $f(x) < c$ für alle $x \in [a, b]$ mit $|x - p| < \delta$ gilt. Für jedes $p' \in]x, b[$ mit $|p' - p| < \delta$ ist dann $f(p') < c$, im Widerspruch zur Definition von p. Also gilt $f(p) = c$. ■

Beispiel IV.1.16. Die Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3 + x - 1$ hat eine Nullstelle. Denn da $f(0) = -1 < 0$ und $f(1) = 1 > 0$ ist, liefert der Zwischenwertsatz die Existenz einer Zahl $x \in [0,1]$ mit $f(x) = 0$, also $x^3 + x = 1$.

Hieraus folgt insbesondere, dass der Zwischenwertsatz nicht gilt, wenn man als Definitionsmenge Teilmengen der rationalen Zahlen betrachtet; die rationalen Zahlen haben „zuviele Löcher“. ■

Satz IV.1.17. *Jede Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungeraden Grades besitzt eine reelle Nullstelle.*

Beweis. Sei $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ mit ungeradem n und $a_n \neq 0$. Dann können wir nach Division von f durch a_n annehmen, dass $a_n = 1$ ist, d.h., wir haben

$$f(x) = x^n \cdot \Big(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n}\Big)$$

für alle $x \neq 0$. Nun ist $\lim_{x \to \pm\infty} 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_0}{x^n} = 1$ (vgl. Beispiel IV.1.12). Daher finden wir ein $x_1 < 0$ mit $1 + \frac{a_{n-1}}{x_1} + \ldots + \frac{a_0}{x_1^n} > 0$ und ein $x_2 > 0$ mit $1 + \frac{a_{n-1}}{x_2} + \ldots + \frac{a_0}{x_2^n} > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} f(x_1) &= x_1^n(1 + \tfrac{a_{n-1}}{x_1} + \ldots + \tfrac{a_0}{x_1^n}) < 0 \quad \text{und} \\ f(x_2) &= x_2^n(1 + \tfrac{a_{n-1}}{x_2} + \ldots + \tfrac{a_0}{x_2^n}) > 0. \end{aligned}$$

Folglich existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $x_3 \in]x_1, x_2[$ mit $f(x_3) = 0$. ■

Man beachte, dass es sehr wohl reelle Polynome geraden Grades gibt, die keine reelle Nullstelle haben; als Beispiel sei $f(x) = x^2 + 1$ genannt (vgl. Bemerkung II.2.5).

Satz IV.1.18. (Intervalleigenschaft stetiger Funktionen) *Das Bild eines Intervalls unter einer stetigen Abbildung ist wieder ein Intervall, d.h., ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(I)$ ein Intervall.*

Beweis. Seien $x, y \in f(I)$. Dann existieren $a, b \in I$ mit $f(a) = x$ und $f(b) = y$. Nach dem Zwischenwertsatz ist $[f(a), f(b)] \subseteq f([a,b]) \subseteq f(I)$, d.h., $f(I)$ ist ein Intervall. ■

Definition IV.1.19. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ ein Funktion. Dann heißt f

(1) *monoton wachsend*, wenn $x \leq y \Longrightarrow f(x) \leq f(y)$
(2) *streng monoton wachsend*, wenn $x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$
(3) *monoton fallend*, wenn $x \leq y \Longrightarrow f(x) \geq f(y)$
(4) *streng monoton fallend*, wenn $x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$

jeweils für alle $x, y \in D$ gilt.

Die Funktion f heißt *monoton*, falls f monoton wachsend oder fallend ist, und *streng monoton*, wenn f streng monoton wachsend oder fallend ist. ■

Beispiel IV.1.20. Die Funktion

$$f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ -1-x & \text{für } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

ist injektiv, aber nicht streng monoton. Das folgende Lemma zeigt, dass so etwas für stetige Funktionen auf Intervallen nicht vorkommt. ∎

Lemma IV.1.21. *Ist $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f genau dann injektiv, wenn f streng monoton ist.*

Beweis. „$\Rightarrow$“: Ist f streng monoton und $x \neq y$ in I, so ist $f(x) < f(y)$ oder $f(x) > f(y)$, in jedem Fall also $f(x) \neq f(y)$ und damit f injektiv.

„$\Leftarrow$“: Sei f injektiv. Wir führen einen indirekten Beweis und nehmen dazu an, dass f nicht streng monoton ist. Dann existieren Zahlen $x_1 < y_1$ in I mit $f(x_1) > f(y_1)$ und $x_2 < y_2$ in I mit $f(x_2) < f(y_2)$ (denn $f(x_1) \neq f(y_1)$ und $f(x_2) \neq f(y_2)$ folgt jeweils aus der Injektivität). Nun betrachten wir die Funktion

$$g : [0,1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f(tx_1 + (1-t)x_2) - f(ty_1 + (1-t)y_2),$$

die als Zusammensetzung stetiger Funktionen wieder stetig ist (Folgerung IV.1.6). Es ist $g(0) = f(x_2) - f(y_2) < 0$ und $g(1) = f(x_1) - f(y_1) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $t \in]0,1[$ mit $g(t) = 0$, d.h., für $x_3 := tx_1 + (1-t)x_2$ und $y_3 := ty_1 + (1-t)y_2$ gilt $f(x_3) = f(y_3)$. Nun ist $tx_1 < ty_1$ und $(1-t)x_2 < (1-t)y_2$, so dass auch $x_3 < y_3$ gilt. Dies ist ein Widerspruch zur Injektivität von f. ∎

Satz über die Umkehrfunktion

Satz IV.1.22. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv. Dann ist $D := f(I) \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, die Funktion f ist streng monoton und besitzt eine streng monotone* **stetige** *Umkehrfunktion $f^{-1} : D \to I \subseteq \mathbb{R}$.*

Beweis. Wegen Satz IV.1.18 und Lemma IV.1.21 ist D ein Intervall und f streng monoton. Wir nehmen an, dass f streng monoton wachsend ist. Den anderen Fall behandelt man analog. Sei $f^{-1} : D \to I$ die Umkehrfunktion.

f^{-1} ist streng monoton: Sei $x < y$ in D. Dann existieren $a, b \in I$ mit $f(a) = x$ und $f(b) = y$. Da f streng monoton wachsend ist, gilt $a < b$ (andernfalls erhalten wir einen Widerspruch). Daher ist

$$f^{-1}(x) = a < b = f^{-1}(y),$$

also auch f^{-1} streng monoton wachsend.

f^{-1} ist stetig: Sei $q \in D$ und $\varepsilon > 0$. Wir zeigen die Existenz eines $\delta > 0$ mit

$$(\forall y \in D, y < q)\ |y - q| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(q)| < \varepsilon.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: $q = \min D$. Dann existiert kein $y \in D$ mit $y < q$ und es ist daher nichts zu zeigen.

Fall 2: $q \neq \min D$. Dannn existiert ein $x \in I$ mit $x \in]f^{-1}(q) - \varepsilon, f^{-1}(q)[$. Dann ist $f(x) < q$ und wir setzen $\delta := q - f(x)$. Für $y < q$ und $|y - q| < \delta$ ist dann $y \in]f(x), q[$ und daher $f^{-1}(y) \in]x, f^{-1}(q)[\subseteq]f^{-1}(q) - \varepsilon, f^{-1}(q)[$. Insbesondere ist also $|f^{-1}(q) - f^{-1}(y)| < \varepsilon$.

Analog zeigt man die Existenz eines $\delta > 0$ mit

$$(\forall y \in D, y > q) \quad |y - q| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f^{-1}(y) - f^{-1}(q)| < \varepsilon$$

und erhält so die Stetigkeit von f^{-1} in q. ∎

Beispiel IV.1.23. (a) Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Potenzfunktion

$$f : [0, \infty[\to [0, \infty[, \; x \mapsto x^n,$$

stetig und streng monoton, denn für $x \geq 0$ und $h > 0$ folgt aus dem Binomischen Lehrsatz

$$f(x + h) = (x + h)^n \geq x^n + h^n > x^n = f(x).$$

Da f stetig ist, ist das Bild $f([0, \infty[) \subseteq [0, \infty[$ ein Intervall, das $0 = f(0)$ enthält. Andererseits ist $f(m) = m^n \geq m$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Also ist dieses Intervall unbeschränkt und stimmt daher mit $[0, \infty[$ überein. Wir haben mit dem Zwischenwertsatz also ein neues Argument für die Existenz n-ter Wurzeln aus positiven Zahlen erhalten.

Aus Satz IV.1.22 folgt nun die **Stetigkeit der Wurzelfunktion**

$$f^{-1} : [0, \infty[\to [0, \infty[, \; x \mapsto x^{1/n} = \sqrt[n]{x}.$$

(b) Für alle $q \in \mathbb{Q}_+$ ist die Funktion $[0, \infty[\to [0, \infty[, \; x \mapsto x^q$ stetig, denn schreibt man $q = \frac{n}{m}$, so gilt $x^q = (x^{1/m})^n$, was eine Komposition stetiger Funktionen ist.

(c) Für alle $q \in \mathbb{Q}$ ist $]0, \infty[\to]0, \infty[, \; x \mapsto x^q$ stetig.

(d) Ist n ungerade, so ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n$ streng monoton und bijektiv, denn für $y < 0$ ist $f(-\sqrt[n]{-y}) = -(-y) = y$. Hieraus folgt, dass die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist. In diesem Fall setzen wir auch für $x < 0$:

$$x^{\frac{1}{n}} := f^{-1}(x).$$ ∎

Gleichmäßige Stetigkeit

Wir erinnern noch einmal an die Definition der Stetigkeit von Funktionen. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt stetig, falls

$$(\forall p \in D)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists \delta > 0)\,(\forall x \in D) \quad |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Beachtenswert hierbei ist die Tatsache, dass δ von p abhängen darf. Im allgemeinen wird man für verschiedene Punkte p verschiedene Werte für δ nehmen müssen, um die Stetigkeit zu zeigen.

Beispiel IV.1.24. Als Beispiel betrachten wir die folgende stetige Funktion:

$$f\colon]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}.$$

Dann haben wir

$$|f(x) - f(p)| = |\tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{p}| = \tfrac{|x-p|}{xp}.$$

Ist $p \in]0, \infty[$, so gilt für $x = \frac{p}{2}$ die Beziehung $\frac{|x-p|}{xp} = \frac{p/2}{p^2/2} = \frac{1}{p}$. Da dieser Ausdruck beliebig groß wird, sehen wir, dass es zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ kein universelles $\delta > 0$ gibt. Man muß δ also in Abhängigkeit von p wählen. ■

Definition IV.1.25. Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, wenn zu jedem

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall p, x \in D) \quad |x - p| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Wir beachten, dass hier die Zahl δ nicht von p abhängt, was sich aus der **Reihenfolge der Quantoren** ergibt. ■

Satz IV.1.26. *Sind $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ und ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f gleichmäßig stetig.*

Beweis. Wir führen einen indirekten Beweis. Ist f nicht gleichmäßig stetig, so existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für kein $\delta > 0$ gilt:

$$\forall x, p \in [a, b] : |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon.$$

Insbesondere existieren zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Punkte $x_n, p_n \in [a, b]$ mit $|x_n - p_n| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(p_n)| \geq \varepsilon$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß existiert eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen ein $x \in [a, b]$ konvergiert. Wegen $|x_n - p_n| < \frac{1}{n}$ gilt dann auch $p_{n_k} \to x$. Damit folgt $|f(x_{n_k}) - f(p_{n_k})| \to |f(x) - f(x)| = 0$, was der Annahme $|f(x_{n_k}) - f(p_{n_k})| \geq \varepsilon$ widerspricht. ■

Aufgabe IV.1.2. Bestimme alle abgeschlossenen Teilintervalle $I \subseteq]0, \infty[$, auf denen die Funktion $f(x) := \frac{1}{x}$ gleichmäßig stetig ist. Zeige insbesondere, dass dies auf $]0, 1]$ nicht der Fall ist. ■

IV.2. Folgen und Reihen von Funktionen

Sei D eine Menge. Sind $f_n : D \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$, Funktionen, so heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine *Folge von Funktionen auf D*.

Definition IV.2.1. Die Funktionenfolge $f_n : D \to \mathbb{C}$ *konvergiert punktweise gegen* $f : D \to \mathbb{C}$, wenn für jedes $x \in D$ die Zahlenfolge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. ■

Beispiel IV.2.2.

(a) $D = \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{für } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2 - nx & \text{für } \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n} \\ 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x > \frac{2}{n}. \end{cases}$

Für $x \le 0$ ist damit $f_n(x) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Für $x > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2}{n_0} < x$. Für $n > n_0$ ist dann auch $f_n(x) = 0$. Also gilt $f_n(x) \to 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. $f_n \to 0$ punktweise.

(b) Punktweise Grenzwerte stetiger Funktionen sind im allgemeinen nicht stetig. Wir betrachten dazu die Funktionenfolge $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + |nx|} = \begin{cases} \frac{nx}{1+nx}, & \text{falls } x \ge 0 \\ \frac{nx}{1-nx}, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Die Funktionen f_n sind allesamt stetig, da $1 + |nx| > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Für $x > 0$ gilt $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx} = \frac{x}{\frac{1}{n}+x} \to \frac{x}{x} = 1$. Für $x = 0$ ist $f_n(x) = 0$, also $f_n(0) \to 0$. Für $x < 0$ schließlich ist $f_n(x) = \frac{nx}{1-nx} = \frac{x}{\frac{1}{n}-x} \to \frac{x}{-x} = -1$. Definiert man nun die *Signumfunktion*

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0 \\ 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

so gilt $f_n \to \operatorname{sgn}$ punktweise, aber die Signumfunktion ist offensichtlich nicht stetig.

(c) Sei $D = [0, 1]$ und $f_n(x) = x^n$. Dann ist

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 1 \\ 0, & \text{falls } x \in [0, 1[, \end{cases}$$

das heißt, die Grenzfunktion f ist in 1 unstetig. ■

Man kann an diesen Beispielen sehen, dass der punktweise Konvergenzbegriff tatsächlich den Nachteil hat, dass sich die Stetigkeit der Funktionen der Folge nicht auf die Grenzfunktion überträgt. Wir führen nun einen stärkeren Konvergenzbegriff ein, der diesen Defekt nicht aufweist.

Definition IV.2.3. (Gleichmäßige Konvergenz) Die Funktionenfolge $f_n : D \to \mathbb{C}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen $f : D \to \mathbb{C}$, wenn gilt:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon > 0)\,(\forall n > N_\varepsilon)\,(\forall x \in D)\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Man schreibt dann auch $f_n \Longrightarrow f$ auf D. ■

Zum Vergleich sei noch einmal die Definition der punktweisen Konvergenz angegeben:

$$(\forall x \in D)\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists N_\varepsilon > 0)\,(\forall n > N_\varepsilon)\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

(man beachte die Reihenfolge der Quantoren!). Hier kann N_ε noch von x abhängen; dies darf im Falle der gleichmäßigen Konvergenz nicht sein. Man kann sich den Begriff der gleichmäßigen Konvergenz so vorstellen, dass man um den Graphen der Funktion f einen „ ε-Schlauch“

$$S_\varepsilon(f) = \{(x,y) \in D \times \mathbb{C} \colon |y - f(x)| < \varepsilon\}$$

legt, und dass im Falle der gleichmäßigen Konvergenz dann ab einem gewissen N_ε alle Funktionen f_n der Folge *vollständig* innerhalb dieses Schlauchs liegen müssen. Bei der punktweisen Konvergenz kann man dies nicht immer erreichen (betrachte beispielsweise in Beispiel IV.2.2(c) den Wert $\varepsilon = \frac{1}{2}$). Um mit dem Begriff der gleichmäßigen Konvergenz besser umgehen zu können, definieren wir die *Supremumsnorm* von f auf D durch

$$\|f\|_D := \sup\{|f(x)| : x \in D\} \in [0, \infty].$$

Dann ist $\|f\|_D \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn f auf D beschränkt ist. In diesem Sinne schreiben wir

$$B(D) := \{f \colon D \to \mathbb{C} \colon \|f\|_D < \infty\}$$

für die Menge der *beschränkten Funktionen auf der Menge* D. Ist es klar, auf welchen Definitionsbereich wir uns beziehen, so schreiben wir auch kurz $\|f\|$ anstatt $\|f\|_D$. Die Supremumsnorm hat folgende Eigenschaften:

Satz IV.2.4. (Normeigenschaften der Supremumsnorm) *Für $f, g \in B(D)$ gilt:*
(N1) $\|0\| = 0$ *und* $\|f\| > 0$ *für* $f \neq 0$.
(N2) *Für alle* $\lambda \in \mathbb{C}$ *gilt* $\|\lambda \cdot f\| = |\lambda| \cdot \|f\|$ *(positive Homogenität).*
(N3) $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (*Subadditivität*).

Beweis. (N1) ist klar. Für (N2) rechnen wir

$$\begin{aligned} \|\lambda \cdot f\| &= \sup\{|\lambda \cdot f(x)| : x \in D\} = \sup\{|\lambda| \cdot |f(x)| : x \in D\} \\ &= |\lambda| \cdot \sup\{|f(x)| : x \in D\} = |\lambda| \cdot \|f\|. \end{aligned}$$

(N3) Für alle $x \in D$ ist $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|$, also auch $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. ■

Hinter diesen Eigenschaften steht ein allgemeines Konzept:

Definition IV.2.5. Sei V ein reeller oder komplexer Vektorraum. Eine Funktion

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto \|v\|$$

heißt *Norm*, wenn sie die Eigenschaften (N1), (N2) und (N3) hat. Das Paar $(V, \|\cdot\|)$ heißt dann ein *normierter Raum.* ■

Beispiel IV.2.6. Für eine Menge D ist $(B(D), \|\cdot\|)$ ein normierter Raum (Satz IV.2.4). ■

Lemma IV.2.7. *Ist $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, so ist*

$$d : V \times V \to \mathbb{R}, \ (x, y) \mapsto \|x - y\|$$

eine Metrik, d.h., (V, d) ist ein metrischer Raum.

Beweis. Wir weisen die Eigenschaften (M1), (M2) und (M3) einer Metrik nach (vgl. Definition III.1.2).

(M1) $d(x, y) = 0 \iff \|x - y\| = 0 \overset{(N1)}{\iff} x - y = 0 \iff x = y$.

(M2) (Symmetrie) $d(x, y) = \|x - y\| \overset{(N2)}{=} |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x)$.

(M3) (Dreiecksungleichung) $d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \overset{(N3)}{\leq} \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)$. ■

Es sei bemerkt, dass dies genau derselbe Beweis ist wie für den normierten Raum $(\mathbb{C}, |\cdot|)$.

Satz IV.2.8. *Sei D eine Menge.*

(a) *Sind die Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ beschränkt und gilt $f_n \Longrightarrow f$, so ist f beschränkt, d.h., die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen ist beschränkt.*

(b) *Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in dem metrischen Raum $(B(D), d)$ konvergiert genau dann, wenn die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf D gleichmäßig konvergiert.*

Beweis. (a) Sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt $\|f_n - f\|_D < 1$. Dann ist $\|f\|_D = \|f - f_N + f_N\|_D \leq \|f - f_N\|_D + \|f_N\|_D \leq 1 + \|f_N\|_D < \infty$, und folglich $f \in B(D)$.

(b) Wegen (a) folgt $f \in B(D)$ aus $f_n \Longrightarrow f, f_n \in B(D)$. Gleichmäßige Konvergenz bedeutet, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ so existiert, dass für $n > N_\varepsilon$ gilt:

$$(\forall x \in D) \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

d.h. $d(f, f_n) = \|f - f_n\|_D \leq \varepsilon$. Das bedeutet aber, dass $f_n \to f$ im metrischen Raum $(B(D), d)$ mit $d(f, g) = \|f - g\|_D$ gilt. ■

Wir übertragen nun einige Konvergenzkriterien von Zahlenfolgen auf Funktionenfolgen.

Definition IV.2.9. Ein normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt *Banachraum*, wenn V bezüglich der Metrik $d(x,y) = \|x-y\|$ vollständig ist, d.h. wenn jede Cauchy-Folge in V konvergiert. ■

Wir erinnern uns daran, dass wir in Satz III.2.32 und Folgerung III.2.33 gesehen haben, dass $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ Banachräume sind.

CAUCHYKRITERIUM FÜR FUNKTIONENFOLGEN

Satz IV.2.10. *Ist D eine Menge, so ist der metrische Raum $(B(D), d)$ vollständig, d.h. eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkter Funktionen konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine beschränkte Funktion $f \in B(D)$, wenn sie in $\big(B(D), d\big)$ eine Cauchy-Folge ist, d.h.*

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\, (\forall n, m \geq N_\varepsilon)\ \|f_n - f_m\|_D < \varepsilon.$$

Beweis. Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $B(D)$, d.h.

$$(\forall \varepsilon > 0)\, (\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N})\, (\forall n, m \geq N_\varepsilon)\ \|f_n - f_m\|_D < \varepsilon.$$

Insbesondere gilt dann für alle $x \in D$: $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$, d.h. $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $\mathbb{C}$, also konvergent (Folgerung III.2.23). Wir definieren $f : D \to \mathbb{C}$ durch $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Für $m > N_\varepsilon$ gilt dann

$$|f(x) - f_m(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon,$$

also $\|f - f_m\|_D \leq \varepsilon$, d.h. $f_m \implies f$. Nach Satz IV.2.8 ist f beschränkt, d.h. $f \in B(D)$, und es gilt $f_n \to f$ in $B(D)$. Also ist $B(D)$ ein vollständiger metrischer Raum. ■

Die Begriffe der Konvergenz von Funktionenfolgen übertragen sich natürlich auch auf Reihen von Funktionen: Damit ist klar, was die punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{R}$ bedeutet.

Satz IV.2.11. (Konvergenzsatz von Weierstraß) *Ist $\sum_{n=1}^\infty f_n$ eine Reihe beschränkter Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, für die $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\|_D$ konvergiert, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty f_n$ auf D gleichmäßig gegen eine Funktion $F : D \to \mathbb{C}$.*

Beweis. Sei $F_n := \sum_{k=1}^n f_k$. Für $n < m$ gilt dann

$$\|F_m - F_n\|_D = \Big\| \sum_{k=n+1}^m f_k \Big\|_D \leq \sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_D.$$

Da die reelle Reihe $\sum_{k=1}^\infty \|f_k\|_D$ konvergiert, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N_ε mit $\sum_{k=n+1}^m \|f_k\|_D < \varepsilon$ für alle $n, m > N_\varepsilon, n \leq m$. Also ist $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $B(D)$ und somit nach Satz IV.2.10 konvergent. ■

Soweit haben wir uns mit der gleichmäßigen Konvergenz abstrakter Funktionen auf einer beliebigen Menge D beschäftigt. Motiviert ist dieser Begriffsapparat unter anderem durch folgenden Satz:

Satz IV.2.12. *Sei (D,d) ein metrischer Raum und $f_n : D \to \mathbb{C}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmässig gegen $f\colon D \to \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f stetig, d.h., ein gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist stetig.*

Beweis. Sei $p \in D$. Wir zeigen, dass f in p stetig ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wegen $f_n \Longrightarrow f$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_N\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da f_N stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $|f_N(x) - f_N(p)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x \in D$ mit $d(x,p) < \delta$. Damit ist für $d(x,p) < \delta$:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(p)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(p) + f_N(p) - f(p)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(p)| + |f_N(p) - f(p)| \\ &\leq \|f - f_N\|_D + \frac{\varepsilon}{3} + \|f_N - f\|_D < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Also ist f in p stetig. Da p beliebig war, ist f stetig. ■

Satz IV.2.13. (Eigenschaften der Exponentialfunktion)

(1) *Die Exponentialfunktion* $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!}$ *ist stetig.*

(2) $\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ *ist stetig, bijektiv und streng monoton wachsend.*

(3) *Die Logarithmusfunktion*

$$\log := \exp^{-1}\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$$

ist stetig, bijektiv und streng monoton wachsend.

Beweis. (1) Sei dazu $D := U_R(0) \subseteq \mathbb{C}$ die offene Kreisscheibe vom Radius R um 0 und $f_n(z) := \frac{z^n}{n!}$. Für jedes $z \in U_R(0)$ ist dann $|f_n(z)| = \frac{|z|^n}{n!} \leq \frac{R^n}{n!}$ und daher $\|f_n\|_{U_R(0)} \leq \frac{R^n}{n!}$. Also ist $\sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_{U_R(0)} \leq \sum_{n=0}^\infty \frac{R^n}{n!} = e^R < \infty$. Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß IV.2.11 konvergiert damit die Funktionenfolge $F_n := \sum_{k=0}^n f_k$ gleichmäßig auf $U_R(0)$. Ferner ist jedes $F_n(z) = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$ eine Polynomfunktion und somit stetig (Beispiel IV.1.9). Aus Satz IV.2.12 folgt damit die Stetigkeit von $\exp|_{U_R(0)}$. Da R beliebig war, ist exp auf ganz $\mathbb{C}$ stetig (vgl. Aufgabe IV.3(b)).

(2) Da die Exponentialfunktion wegen (1) insbesondere auf $\mathbb{R}$ stetig ist, ist $\exp(\mathbb{R})$ ein Intervall (Satz IV.1.18). Für $x > 0$ ist $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots > 1$, also $e^{nx} = (e^x)^n \to \infty$ und somit $[1,\infty[\subseteq \exp(\mathbb{R})$. Für $x < 0$ ist $e^x = \frac{1}{e^{-x}} < 1$ und folglich $e^{nx} \to 0$. Damit folgt $\exp(\mathbb{R}) =]0,\infty[$ (vgl. Satz III.4.18).

Für $x < y$ ist $e^{y-x} > 1$ und daher $e^y = e^{x+(y-x)} = e^x e^{y-x} > e^x$. Also ist die Exponentialfunktion streng monoton wachsend.

(3) Dies folgt aus (2) und dem Satz IV.1.22 über die Umkehrfunktion. ■

Man findet auch die Bezeichnung $\log(x) = \ln(x)$ für die Logarithmusfunktion.

Beispiel IV.2.14. (Die *allgemeine Potenzfunktion:*) Für $\alpha \in \mathbb{C}$ und $x > 0$ definieren wir

$$x^\alpha := e^{\alpha \log x},$$

die sogenannte allgemeine Potenzfunktion. Ist $\alpha = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, so ist

$$x^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}\log x} = \left(e^{\frac{1}{n}\log x}\right)^m = \sqrt[n]{e^{\log x}}^{\,m} = \sqrt[n]{x}^{\,m}.$$

Die neue Definition ist also für $\alpha \in \mathbb{Q}$ mit der alten konsistent.

(a) Die Funktion $]0,\infty[\to \mathbb{C}, x \mapsto x^\alpha$ ist stetig, denn sie ist eine Komposition stetiger Funktionen; definiert man $m_\alpha : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, y \mapsto \alpha \cdot y$, so ist $x^\alpha = (\exp \circ m_\alpha \circ \log)(x)$.

(b) Für $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) ist die Potenzfunktion streng monoton wachsend (fallend); dies folgt aus der strengen Monotonie von $\exp$ und $\log$.

(c) Es gelten

$$x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta} \quad \text{und} \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\cdot\beta}.$$

Hierzu rechnet man $x^\alpha x^\beta = e^{\alpha\log x}e^{\beta\log x} = e^{(\alpha+\beta)\log x} = x^{\alpha+\beta}$ und $(x^\alpha)^\beta = e^{\beta\log x^\alpha} = e^{\beta(\alpha\log x)} = x^{\alpha\beta}$.

(d) Für eine relle Zahl $\alpha \neq 0$ ist die Umkehrfunktion von $x \mapsto x^\alpha,]0,\infty[\to]0,\infty[$ durch $x \mapsto x^{\frac{1}{\alpha}}$ gegeben.

(e) Für $\alpha \geq 0$ lässt sich die Potenzfunktion $]0,\infty[\to]0,\infty[, x \mapsto x^\alpha$ stetig auf $[0,\infty[$ fortsetzen. ■

Aufgabe IV.2. Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine Funktion. Zeigen Sie:

(a) Ist $Z \subseteq X$ eine Teilmenge, die wir als metrischen Raum auffassen, und f stetig, so ist $f|_Z\colon Z \to Y$ stetig.

(b) Ist $U \subseteq Y$ eine Teilmenge mit $f(X) \subseteq U$, so ist die Funktion $f^U\colon X \to U, x \mapsto f(x)$ ebenfalls stetig (die Koeinschränkung von f auf U), wenn wir $d_U(x,y) := d_Y(x,y)$ definieren, d.h., wenn wir U als metrischen Teilraum von Y auffassen. ■

Aufgabe IV.3. Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion zwischen metrischen Räumen. Dann gilt:

(a) Ist $X = \bigcup_{i\in I} U_i$ und sind alle U_i offen und f auf den U_i stetig, so ist f stetig.

(b) Besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x auf der f stetig ist, so ist f stetig. ■

Aufgabe IV.4. Sei $f\colon X \to Y$ eine Funktion zwischen metrischen Räumen. Dann gilt:

(a) f ist genau dann stetig, wenn die Urbilder aller abgeschlossenen Teilmenge $F \subseteq Y$ in X abgeschlossen sind.

(b) Ist $X = \bigcup_{i\in 1}^n F_i$ und sind alle F_i abgeschlossen und f auf den F_i stetig, so ist f stetig. Hinweis: (a) ■

Potenzreihen

Definition IV.2.15. Eine *Potenzreihe mit Entwicklungspunkt* p ist eine Reihe der Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-p)^k,$$

wobei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge komplexer Zahlen ist, die man die *Koeffizienten der Potenzreihe* nennt. ■

Bemerkung IV.2.16. (a) Ist $D := \{z \in \mathbb{C}\colon \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-p)^k \text{ konvergent}\}$, so wird durch die Zuordnung

$$f : D \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-p)^k$$

eine Funktion auf D definiert. Es gilt immer $p \in D$ und $f(p) = a_0$, aber D muß nicht mehr als einen Punkt enthalten. Ist

$$R = \sup\Big\{r \in [0,\infty[\colon \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n < \infty\Big\}$$

der Konvergenzradius der Potenzreihe (Satz III.4.13), so konvergiert die Potenzreihe für $|z-p| < R$, und für $|z-p| > R$ liegt Divergenz vor, d.h.

$$U_R(p) \subseteq D \subseteq \{z \in \mathbb{C}\colon |z-p| \leq R\}$$

gilt.

(b) Setzen wir $h := x-p$, so ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k h^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-p)^k$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0. Im wesentlichen reicht es also aus, Potenzreihen der Gestalt $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ zu betrachten. ■

Satz IV.2.17. *Ist R der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-p)^k$ und $r < R$, so konvergiert diese Potenzreihe auf $U_r(p)$ absolut und gleichmäßig. Die Funktion*

$$f\colon U_R(p) \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-p)^k$$

ist stetig.

Beweis. Sei $r_1 \in]r, R[$. Für $|z-p| \leq r$ haben wir dann

$$|a_n(z-p)|^n \leq |a_n| r^n = (|a_n| r_1^n)\Big(\frac{r}{r_1}\Big)^n \leq C\Big(\frac{r}{r_1}\Big)^n$$

für ein $C > 0$, denn aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k r_1^k$ folgt die Beschränktheit der Folge $(a_k r_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$. Für $f_n(z) := a_n(z-p)^n$ ist also $\|f_n\|_{U_r(p)} \leq C\big(\frac{r}{r_1}\big)^n$. Damit erhalten wir

$$\sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_{U_r(p)} \leq C \cdot \sum_{n=0}^\infty \left(\frac{r}{r_1}\right)^n = \frac{C}{1-\frac{r}{r_1}} < \infty.$$

Die erste Behauptung folgt nun aus dem Konvergenzsatz von Weierstraß IV.2.11.

Hieraus erhalten wir wegen Satz IV.2.12 die Stetigkeit von f auf allen Kreisscheiben der Gestalt $U_r(p)$, $r < R$. Die Stetigkeit von f folgt nun aus Aufgabe IV.3(b). ■

Beispiel IV.2.18. (a) Für die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^\infty z^k$ ist $R = 1$ und der Konvergenzbereich

$$D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}.$$

Auf diesem Bereich konvergiert die geometrische Reihe gegen die Funktion

$$f \colon D \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \frac{1}{1-z}.$$

Man beachte, dass sich die Funktion f natürlich auf den viel größeren Bereich $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ fortsetzen lässt, obwohl die geometrische Reihe z.B. für $z = 2$ nicht konvergiert.

(b) Für die Reihe

$$1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \frac{z^3}{4} + \cdots = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k+1}$$

ist $a_k = \frac{1}{k+1}$, und es gilt

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{1}{\sqrt[k]{k+1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} 1,$$

denn $\sqrt[k]{k} \to 1$ und

$$\sqrt[k]{k} \leq \sqrt[k]{k+1} \leq \sqrt[k]{2k} = \sqrt[k]{2}\sqrt[k]{k} \to 1 \cdot 1 = 1.$$

(Lemma III.4.10). Daher ist nach der Hadamardschen Formel $R = 1$ (Satz III.4.13(2)). Für $z = 1$ ergibt sich die harmonische Reihe, von der wir wissen, dass sie divergiert; für $z = -1$ ergibt sich die Reihe $\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k+1}$, die nach dem Leibnizkriterium konvergiert.

(c) Die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{z^n}{n^2}$ konvergiert für alle z mit $|z| \leq 1$; andererseits folgt $R = 1$ aus

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \big(\sqrt[n]{n^2}\big)^{-1} = 1$$

(Formel von Hadamard). Wir können also am Konvergenzradius nicht ablesen, ob am Rande des Konvergenzbereichs Konvergenz oder Divergenz vorliegt. Erst die detaillierte Betrachtung der Randpunkte ergibt in diesem Fall den Konvergenzbereich

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

(d) Die Reihe

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 \pm \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2}$$

divergiert für $|x| \geq 1$, obwohl die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist. Betrachtet man dagegen auch komplexe Zahlen, so stellt man fest, dass die Funktion $\frac{1}{1+z^2}$ im Komplexen sehr wohl eine Singularität bei $z = \pm i$ besitzt. Im Komplexen würde man also gar nicht erwarten, dass der Konvergenzkreis größeren Radius hat.

Der interessante Zusammenhang zwischen der Darstellung reeller Funktionen duch Potenzreihen und deren Verhalten im Komplexen gehört zu einem der faszinierendsten Bereiche der Analysis. Dieses Zusammenspiel werden wir in der Analysis IV (Funktionentheorie) genauer kennenlernen. Insbesondere wird dort gezeigt werden, dass die Größe des Konvergenzkreises einer Potenzreihe immer genau der Abstand zur nächstliegenden Singulartität der ins Komplexe fortgesetzen Funktion ist. ■

V. Differentialrechnung

Ausgehend von der Frage nach der Approximierbarkeit von Funktionen durch affine Funktionen, d.h., Funktionen, deren Graph eine Gerade ist, werden wir in diesem Kapitel zu dem Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ auf einem reellen Intervall D geführt. Wir werden sehen, dass das lokale Verhalten einer differenzierbaren Funktion sehr eng mit dem Verhalten ihrer Ableitung korrelliert ist (Abschnitt V.2). Hieraus ergeben sich insbesondere einfache Kriterien für lokale Extremwerte von Funktionen, die man zur Lösung vieler praktischer Probleme verwenden kann. Schließlich führen wir in Abschnitt V.3 die wichtigsten trigonometrischen Funktionen wie die Sinus- und Cosinusfunktion ein und definieren die Zahl π.

V.1. Die Ableitung

In diesem Abschnitt betrachten wir Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall ist, das mindestens zwei Punkte enthält.

Definition V.1.1. (a) Ist $a \in \mathbb{R}$, so heißt $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax$, *lineare Funktion mit Steigung a.*

(b) Sind $a, b \in \mathbb{R}$, so heißt die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ *affin.* ■

Für affine Funktionen f mit $f(x) = ax + b$ gilt

$$f(x+h) - f(x) = a(x+h) - ax = a \cdot h,$$

d.h., der „Zuwachs“ $f(x+h) - f(x)$ ist linear in h.

Definition V.1.2. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt bei $p \in D$ *differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(p) := \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}$$

existiert. Wir nennen f *differenzierbar*, wenn sie bei allen $p \in D$ differenzierbar ist. Eine andere Schreibweise für $f'(p)$ ist $\frac{df}{dx}(p)$. Diese Zahl heißt *Ableitung* oder *Differentialquotient* in p. Die Zahlen $\frac{f(p+h)-f(p)}{h}$ stellt man sich in diesem Sinne als Differenzenquotienten vor. Sie beschreiben die Steigung der Sekanten des Graphen von f, die durch die beiden Punkte $(p, f(p))$ und $(p+h, f(p+h))$ geht (Skizze!). ■

Lemma V.1.3. *Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ in $p \in D$ differenzierbar, so ist f in p stetig.*

Beweis. Aus $\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h} = f'(p)$ und den Grenzwertsätzen folgt

$$\lim_{h\to 0} f(p+h) - f(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} h = f'(p) \cdot \lim_{h\to 0} h = 0.$$

Also ist f in p stetig. ■

Beispiel V.1.4. (a) Für $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto ax + b$ gilt $f(p+h) - f(p) = ah$, also ist $f'(p) = a$ für alle $p \in \mathbb{R}$ und f ist überall differenzierbar.

(b) Die Betragsfunktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist stetig, aber in 0 nicht differenzierbar: Da die Grenzwerte

$$\lim_{h\searrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\searrow 0} \frac{h}{h} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{h\nearrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\nearrow 0} \frac{-h}{h} = -1$$

nicht übereinstimmen, existiert $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ nicht. ■

Wir kommen nun zu einer Charakterisierung der Differenzierbarkeit, die beweistechnisch sehr angenehm ist.

Lemma V.1.5. *Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $p \in D$ differenzierbar, wenn eine in 0 stetige Funktion Φ auf $D - p := \{h \in \mathbb{R} : p + h \in D\}$ mit*

$$f(p+h) - f(p) = \Phi(h) \cdot h \quad \textit{für alle } h \in D - p \tag{1.1}$$

existiert. In diesem Fall ist $f'(p) = \Phi(0)$.

Beweis. Ist f in p differenzierbar, so setzen wir

$$\Phi(h) := \begin{cases} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}, & h \neq 0, h \in D - p \\ f'(p), & h = 0. \end{cases}$$

Dann ist Φ im Nullpunkt stetig. Die Umkehrung ist klar, denn aus (1.1) folgt sofort

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{h \to 0} \Phi(h) = \Phi(0),$$

wegen der Stetigkeit von Φ in 0. ∎

Bemerkung V.1.6. Ist f in p differenzierbar, so haben wir

$$f(p+h) = f(p) + \Phi(h) \cdot h = \underbrace{f(p) + f'(p) \cdot h}_{\text{affine Funktion}} + \underbrace{(\Phi(h) - f'(p))\, h}_{\text{Restglied.}}$$

Für das Restglied $r(h) := (\Phi(h) - f'(p))h$ gilt

$$\lim_{h \to 0} \tfrac{r(h)}{h} = 0$$

(es verschwindet von höherer Ordnung). ∎

Satz V.1.7. (Rationale Operationen) *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in p differenzierbar und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $\lambda f + \mu g$, $f \cdot g$ und, falls $f(p) \neq 0$ ist, $\frac{1}{f}$ in p differenzierbar. Die Ableitungen berechnet man wie folgt:*

(1) Linearität: $(\lambda f + \mu g)'(p) = \lambda f'(p) + \mu g'(p)$

(2) Produktregel: $(fg)'(p) = f'(p)g(p) + f(p)g'(p)$

(3) Quotientenregel: $\left(\frac{1}{f}\right)'(p) = -\frac{f'(p)}{f(p)^2}$.

Beweis. Wegen Lemma V.1.5 existieren auf $D - p$ Funktionen Φ und Ψ mit folgenden Eigenschaften. Wir haben $f(p+h) - f(p) = \Phi(h) \cdot h$, Φ stetig in 0, $\Phi(0) = f'(p)$, und genauso $g(p+h) - g(p) = \Psi(h) \cdot h$, Ψ stetig in 0 sowie $\Psi(0) = g'(p)$.

(1) Wir erhalten daher

$$(\lambda f + \mu g)(p+h) - (\lambda f + \mu g)(p) = \lambda\Phi(h)h + \mu\Psi(h)h = (\lambda\Phi(h) + \mu\Psi(h))h,$$

und die Funktion $\lambda\Phi + \mu\Psi$ ist im Nullpunkt stetig und nimmt dort den Wert $\lambda f'(p) + \mu g'(p)$ an (Lemma V.1.5).

(2) Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned}(f\cdot g)(p+h) &= \big(f(p)+\Phi(h)h\big)\big(g(p)+\Psi(h)h\big)\\ &= f(p)g(p)+\Big(\Phi(h)g(p)+f(p)\Psi(h)+\Phi(h)\Psi(h)\cdot h\Big)h.\end{aligned}$$

Die Funktion $\widetilde{\Phi}(p) := \Phi(h)g(p)+f(p)\Psi(h)+\Phi(h)\Psi(h)\cdot h$ ist im Nullpunkt stetig und nimmt dort den Wert

$$f'(p)g(p)+f(p)g'(p)+f'(p)g'(p)\cdot 0 = f'(p)g(p)+f(p)g'(p)$$

an.

(3) Ist h ausreichend klein, so ist $f(p+h)\neq 0$, denn f ist in p stetig (Lemma V.1.3). In diesem Fall haben wir

$$\frac{1}{f(p+h)}-\frac{1}{f(p)} = \frac{f(p)-f(p+h)}{f(p+h)f(p)} = \left(\frac{-\Phi(h)}{f(p+h)f(p)}\right)h.$$

Da f in p stetig ist, geht der Term in der Klammer für $h\to 0$ gegen $-\frac{f'(p)}{f(p)^2}$. ■

Bemerkung V.1.8. (a) Für die Potenzfunktionen $f_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f_n(x)=x^n$ folgt durch Induktion:

$$f_n'(x) = nx^{n-1}.$$

Induktionsanfang: Für $n=0$ ist $f_0\equiv 1$ und $f_0'\equiv 0$. Für $n=1$ wissen wir auch schon, dass $f_1'\equiv 1$ ist, da $f_1(x)=x$ eine lineare Funktion ist.

Induktionsschluss: Mit der Produktregel erhalten wir für $n\geq 1$ aus $f_{n+1} = f_n\cdot f_1$ und der Induktionsvoraussetzung die Formel

$$f_{n+1}'(x) = f_n'(x)\cdot x + f_1'(x)\cdot f_n(x) = nx^{n-1}\cdot x + 1\cdot x^n = (n+1)x^n.$$

(b) Mit der Linearität der Differentiation (Satz V.1.7(i)) erhält man die Differenzierbarkeit jeder Polynomfunktion $f(x)=\sum_{k=0}^n a_kx^k$, wobei die Ableitung gegeben ist durch

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n a_kkx^{k-1}.$$

(c) Aus Produkt- und Quotientenregel erhält man die *allgemeine Quotientenregel:* Ist $f(p)\neq 0$ und sind f und g in p differenzierbar, so gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)g(p)-f(p)g'(p)}{g(p)^2}.$$

Aus $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{1}{g(x)}$ für $x\in D$ folgt wegen der Produktregel

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(p) &= f'(p)\frac{1}{g(p)} + f(p)\left(\frac{1}{g}\right)'(p) = \frac{f'(p)}{g(p)} - \frac{f(p)g'(p)}{g(p)^2}\\ &= \frac{f'(p)g(p)-f(p)g'(p)}{g(p)^2}.\end{aligned}$$

■

Kettenregel

Satz V.1.9. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ in p differenzierbar und $g : B \to \mathbb{R}$ in $f(p) \in B$ differenzierbar, wobei $B \subseteq f(D)$ ein reelles Intervall mit mehr als einem Punkt ist. Dann ist die Funktion $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in p differenzierbar, und es gilt*

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p).$$

Beweis. Wie im Beweis von Satz V.1.7 haben wir

$$f(p+h) = f(p) + \Phi(h) \cdot h \quad \text{und} \quad g\big(f(p)+h\big) = g(f(p)) + \Psi(h) \cdot h,$$

wobei

$$\lim_{h\to 0} \Phi(h) = \Phi(0) = f'(p) \quad \text{und} \quad \lim_{h\to 0} \Psi(h) = \Psi(0) = g'\big(f(p)\big)$$

ist. Dann ist

$$g(f(p+h)) = g\big(f(p) + \Phi(h)h\big) = g(f(p)) + \Big(\Psi\big(\Phi(h)h\big) \cdot \Phi(h)\Big)h.$$

Nun ist $\lim_{h\to 0} \Phi(h)h = 0$, also

$$\lim_{h\to 0} \Psi(\Phi(h)h) = \Psi(0) = g'(f(p))$$

und daher

$$\lim_{h\to 0} \Psi(\Phi(h)h)\Phi(h) = g'(f(p))f'(p).$$

Damit ist $g \circ f$ in p differenzierbar mit $(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p)$. ∎

Beispiel V.1.10. Man kann auf diese Weise die Ableitung der Funktion $f(x) = (x^3+1)^2$ ausrechnen, ohne auszumultiplizieren: Man setzt $g(x) = x^2$ und $h(x) = x^3 + 1$. Dann ist $f = g \circ h$, und wir dürfen die Kettenregel anwenden:

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 2h(x) \cdot 3x^2 = 2(x^3+1) \cdot 3x^2.$$ ∎

Wir erinnern uns daran, dass eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall genau dann injektiv ist, wenn sie streng monoton ist (Lemma IV.1.21). Darüber hinaus ist $f(D)$ dann ein Intervall (Satz IV.1.18).

Satz über die Umkehrfunktion; differenzierbare Version

Satz V.1.11. *Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv und in $p \in D$ differenzierbar mit $f'(p) \neq 0$. Dann ist $f^{-1} : f(D) \to D$ in $f(p)$ differenzierbar, und es gilt*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(p)) = \frac{1}{f'(p)}.$$

Beweis. Nach dem Satz über die Umkehrfunktion (Satz IV.1.22) ist $f(D)$ ein Intervall und $f^{-1} : f(D) \to D$ stetig. Da f injektiv ist, enthält $f(D)$ mehr als einen Punkt, denn D enthält mehr als einen Punkt.

Mit Lemma V.1.5 folgt aus der Differenzierbarkeit von f in p die Existenz einer in 0 stetigen Funktion Φ mit $\Phi(0) = f'(p)$ und $f(p+h) = f(p) + \Phi(h)h$ für alle $h \in D - p$. Gemäß der Voraussetzung ist $\Phi(0) \neq 0$ und andererseits ist für $h \neq 0$ zunächst $f(p+h) \neq f(p)$ wegen der Injektivität von f und daher $\Phi(h) = \frac{f(p+h)-f(p)}{h} \neq 0$. Also ist $\Phi(h) \neq 0$ für $0 \neq h \in D - p$.

Sei nun $q := f(p)$ und $h \in f(D) - q$. Dann haben wir zunächst

$$\begin{aligned} q + h &= f\big(f^{-1}(q+h)\big) = f(p) + \Phi\big(f^{-1}(q+h) - p\big)\big(f^{-1}(q+h) - p\big) \\ &= q + \Phi\big(f^{-1}(q+h) - p\big)\big(f^{-1}(q+h) - f^{-1}(q)\big). \end{aligned}$$

Umstellen dieser Gleichung, was wegen $\Phi(f^{-1}(q+h) - p) \neq 0$ möglich ist, führt zu

$$f^{-1}(q+h) - f^{-1}(q) = \frac{1}{\Phi\big(f^{-1}(q+h) - p\big)} \cdot h.$$

Da die Funktion $h \mapsto \frac{1}{\Phi\left(f^{-1}(q+h)-p\right)}$ als Komposition stetiger Funktionen in 0 stetig ist (Satz IV.1.5), folgt aus Lemma V.1.5 zunächst die Differenzierbarkeit von f^{-1} in q, und weiter erhalten wir

$$(f^{-1})'(q) = \frac{1}{\Phi\big(f^{-1}(q) - p\big)} = \frac{1}{\Phi(p-p)} = \frac{1}{f'(p)}.$$ ■

Die wesentliche Erkenntnis von Satz V.1.11 ist, dass die Umkehrfunktion f^{-1} in $f(p)$ differenzierbar ist. Angenommen, wir wüßten das schon. Dann könnten wir ihre Ableitung direkt aus der Kettenregel gewinnen, denn aus $f^{-1}(f(x)) = x$ folgt durch Ableiten in p:

$$(f^{-1})'(f(p))f'(p) = 1.$$

Wir werden später sehen, dass die Voraussetzung der strengen Monotonie insbesondere dann erfüllt ist, wenn $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in D$ gilt.

Beispiel V.1.12. Wir betrachten die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$ und ihre Umkehrfunktion $\log :]0,\infty[\to \mathbb{R}$.

(a) Für $p \in \mathbb{R}$ ist $e^{p+h} = e^p e^h$, also $\frac{e^{p+h}-e^p}{h} = e^p \frac{e^h-1}{h}$. Weiter ist

$$\left|\frac{e^h-1}{h} - 1\right| = \left|\frac{e^h - 1 - h}{h}\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} h^{k-1}\right| \leq |h| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |h|^k = \frac{|h|}{1-|h|} \leq 2|h|,$$

wenn $|h| \leq \frac{1}{2}$ ist. Daher gilt $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$ und folglich

$$\exp'(p) = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(p+h) - \exp(p)}{h} = \exp(p) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(p).$$

Wir sehen, dass die Exponentialfunktion überall differenzierbar ist und der *Differentialgleichung*

$$\exp' = \exp$$

genügt.

(b) Mit dem Satz über die Umkehrfunktion V.1.11 folgt jetzt, dass auch der Logarithmus $\log\colon]0,\infty[\to \mathbb{R}$ überall differenzierbar ist mit

$$\log'(\exp(p)) = \frac{1}{\exp'(p)} = \frac{1}{\exp(p)}$$

für alle $p \in \mathbb{R}$. Wir haben also für alle $x \in]\,0,\infty\,[$ die Beziehung

$$\log'(x) = \frac{1}{x}.$$

Eine Anwendung des Obigen stellt die Berechnung folgenden Grenzwerts dar: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$. Die Definition der allgemeinen Potenz liefert die Identität $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp(n\log(1+\frac{x}{n}))$. Wir formen den Exponenten um:

$$n\log(1+\frac{x}{n}) = \frac{\log(1+\frac{x}{n})}{\frac{1}{n}} = x \cdot \frac{\log(1+\frac{x}{n}) - \log(1)}{\frac{x}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\log'(1) = x.$$

Durch exponentieren erhalten wir die Formel für die Exponentialfunktion aus Satz III.4.19:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

(c) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Für die Potenzfunktion $p_\alpha :]\,0,\infty\,[\,\to\,]\,0,\infty\,[,\ x \mapsto x^\alpha$ gilt $p_\alpha(x) = e^{\alpha\cdot\log x}$. Um die Kettenregel anwenden zu können, schreiben wir $p_\alpha = \exp\circ g$ mit $g(x) = \alpha\log(x)$. Da die Funktionen exp und g beide differenzierbar sind, gilt dies nach der Kettenregel auch für deren Komposition p_α. Um die Ableitung von p_α zu berechnen, erinnern wir uns zunächst an $g'(x) = \alpha\frac{1}{x}$. Hiermit erhalten wir schließlich

$$p'_\alpha(x) = \exp'(g(x))g'(x) = \exp(g(x))\alpha\frac{1}{x} = \alpha e^{(\alpha-1)\log x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

für alle $x > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) Sind $g\colon D \to]0,\infty[$ und $h\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so bilden wir die Funktion

$$f := g^h\colon D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x)^{h(x)}.$$

Wir behaupten, dass f differenzierbar ist mit

$$f' = g^{h-1}\cdot(h'g\log g + hg').$$

In der Tat haben wir $f(x) = e^{h(x)\log g(x)}$. Hieraus folgt sofort die Differenzierbarkeit von f. Für die Ableitung ergibt sich mit der Kettenregel zunächst für die innere Ableitung

$$(h\log g)' = h'\log g + h\frac{g'}{g}$$

und daher

$$f'(x) = f(x)\Big(h'(x)\log g(x) + h(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\Big)$$
$$= g(x)^{h(x)-1}\big(h'(x)g(x)\log g(x) + h(x)g'(x)\big).$$

Für $g(x) = x$ und $h(x) = \alpha$ ergibt sich insbesondere die Formel aus (d). Ein anderer interessanter Spezialfall ist $g(x) = h(x) = x$, d.h. $f(x) = x^x$. Für diese Funktion ergibt sich

$$f'(x) = x^{x-1}(x\log x + x) = f(x)(\log x + 1).$$ ■

Bemerkung V.1.13. Ist $f : D \to \mathbb{R}$ überall differenzierbar, so können wir jedem $p \in D$ eine lineare Abbildung

$$df(p) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h \mapsto f'(p) \cdot h$$

zuordnen. Diese Abbildung heißt das *Differential von f in p*. Für $f(x) = x$ beispielsweise ist $df(p)(h) = f'(p) \cdot h = 1 \cdot h = h$. Man kann dies sehr salopp auch folgendermaßen schreiben: „ $dx = \mathrm{id}$ “. Damit kann man nun schreiben: $df(p)(h) = f'(p) \cdot h = f'(p)\ dx(p)(h)$, also $df = f' \cdot dx$ oder $\frac{df}{dx} = f'$. Eine Systematisierung dieses Kalküls führt auf den Begriff der Differentialform, den wir später genauer kennenlernen werden. ■

Definition V.1.14. (a) Ist $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig, so heißt f *stetig differenzierbar*. Die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen auf D wird mit $C^1(D)$ bezeichnet.

(b) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *n-mal differenzierbar*, falls f differenzierbar ist und $f' : D \to \mathbb{R}$ mindestens $(n-1)$-mal differenzierbar ist. Wir schreiben $f'' := (f')'$ oder $f^{[2]} := (f')'$ und induktiv $f^{[n]} := (f^{[n-1]})'$. Ist f eine n-mal differenzierbare Funktion, so sind alle Ableitungen $f^{[k]}$, $k < n$, mindestens einmal differenzierbar, insbesondere stetig. Wir nennen f daher *n-mal stetig differenzierbar*, wenn f eine n-mal differenzierbare Funktion ist und $f^{[n]}$ stetig ist. Die Menge der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen auf D wird mit $C^n(D)$ bezeichnet. Wir schreiben $C^\infty(D) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C^n(D)$ für die Menge der auf D beliebig oft differenzierbaren Funktionen (Die Forderung nach der Stetigkeit der Ableitung ist hier redundant. Warum?). ■

Bemerkung V.1.15. Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion ist nicht immer differenzierbar. Zum Beispiel ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \cdot |x|$ differenzierbar mit $f'(x) = 2|x|$, aber f' ist im Nullpunkt nicht differenzierbar (Beispiel V.1.4). Insbesondere ist $f \in C^1(\mathbb{R}) \setminus C^2(\mathbb{R})$. ■

V.2. Das lokale Verhalten von Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir sehen, wie das Verhalten einer differenzierbaren Funktion durch das Verhalten ihrer Ableitung bestimmt wird. So ist etwa eine Funktion mit einer Ableitung, die überall gleich Null ist, konstant. Ist die Ableitung stets nichtnegativ, so ist die Funktion monoton wachsend. Der Schlüssel hierzu ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Wir beginnen mit einem Spezialfall.

Satz von Rolle

Satz V.2.1. *Seien $a < c$ reelle Zahlen und $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ eine stetige und auf $]\,a,c\,[$ differenzierbare Funktion. Ist $f(a) = f(c) = 0$, so existiert ein $b \in\,]\,a,c\,[$ mit $f'(b) = 0$.*

Beweis. Ist f konstant, so ist $f'(b) = 0$ für alle $b \in\,]\,a,c\,[$. Ist dies nicht der Fall, so existiert ein $x \in [a,c]$ mit $f(x) \neq 0$. Wie nehmen $f(x) < 0$ an. Den Fall $f(x) > 0$ behandelt man analog. Nach Satz IV.1.13 nimmt die Funktion f ihr Minimum in einem Punkt $b \in [a,c]$ an. Aus $f(b) \leq f(x) < 0$ folgt dann $b \in]a,c[$, so dass f in b differenzierbar ist. Für $b+h \in [a,c]$ gilt dann $f(b+h) \geq f(b)$, also

$$f'(b) = \lim_{h \searrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \geq 0$$

und andererseits

$$f'(b) = \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h} \leq 0.$$

Hieraus folgt $f'(b) = 0$. ■

Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz V.2.2. *Sei $a < c$ und $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ eine stetige und auf $]a,c[$ differenzierbare Funktion. Dann existiert ein $b \in\,]\,a,c\,[$ mit*

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = f'(b).$$

Beweis. Wir betrachten die Funktion $g\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := f(x) - \left(f(a) + (x-a)\frac{f(c) - f(a)}{c - a}\right).$$

Wir ziehen also die affine Funktion ab, deren Graph die beiden Endpunkte $(a, f(a))$ und $(c, f(c))$ des Graphen von f verbindet. Damit ist g stetig auf $[a,c]$ und auf $]a,c[$ differenzierbar. Zusätzlich gelten $g(a) = 0$ und

$$g(c) = f(c) - \left(f(a) + (c-a)\frac{f(c) - f(a)}{c - a}\right) = 0.$$

Nach dem Satz von Rolle existiert daher ein $b \in \,]\,a, c\,[$ mit

$$0 = g'(b) = f'(b) - \frac{f(c) - f(a)}{c - a},$$

d.h. $f'(b) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}$. ■

Folgerung V.2.3. *Ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so gelten:*

(1) *f ist genau dann monoton wachsend (fallend), wenn $f' \geq 0$ ($f' \leq 0$) gilt.*

(2) *f ist genau dann konstant, wenn $f' \equiv 0$ gilt.*

(3) *Ist $f'(x) > 0$ (< 0) für alle $x \in D$, so ist f streng monoton wachsend (fallend). Hiervon gilt die Umkehrung nicht.*

Beweis. (1) Wir zeigen nur die Äquivalenz von $f' \geq 0$ zum monotonen Wachstum von f. Ist f monoton wachsend und $p \in D$, so ist

$$f'(p) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(p+h) - f(p)) \geq 0,$$

denn für $h > 0$ ist $f(p+h) \geq f(p)$ und für $h < 0$ ist $f(p+h) \leq f(p)$.

Gilt andererseits $f' \geq 0$ auf D und sind $x, y \in D$ mit $x < y$, so finden wir nach dem Mittelwertsatz V.2.2 ein $z \in \,]x, y[$ mit

$$f(y) - f(x) = f'(z) \cdot (y - x) \geq 0,$$

d.h., f ist monoton wachsend.

(2) Die Funktion f ist genau dann konstant, wenn f sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend ist. Dies ist nach (1) genau dann der Fall, wenn sowohl $f' \geq 0$ als auch $f' \leq 0$ ist. Dies ist äquivalent zu $f' = 0$.

(3) Gilt $f'(z) > 0$ für alle $z \in D$, so zeigt der Beweis von (1), dass f sogar streng monoton wachsend ist. Ein Beispiel dafür, dass die Umkehrung nicht gilt, ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^3$, die zwar streng monoton wachsend ist, deren Ableitung im Nullpunkt aber trotzdem gleich Null ist. ■

Folgerung V.2.4. (Eindeutigkeit der Lösung einer Differentialgleichung) *Ist D ein Intervall, $x_0 \in D$ und $c \in \mathbb{R}$, so existiert genau eine differenzierbare Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, die der Differentialgleichung $f' = f$ genügt und in x_0 den Wert c annimmt. Die eindeutige Lösung ist durch $f(x) = ce^{x-x_0}$ gegeben.*

Beweis. Es ist klar, dass die Funktion $f(x) = ce^{x-x_0} = ce^{-x_0}e^x$ eine Lösung der Gleichung $f' = f$ mit $f(x_0) = c$ ist. Damit ist die Existenz bewiesen.

Um die Eindeutigkeit einzusehen, nehmen wir an, dass $g\colon D \to D$ ebenfalls eine Lösung der Differentialgleichung $g' = g$ mit $g(x_0) = c$ ist. Dann ist die Funktion

$$h\colon D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto g(x)e^{-x}$$

differenzierbar mit

$$h'(x) = g'(x)e^{-x} - g(x)e^{-x} = 0.$$

Folglich ist h konstant (Folgerung V.2.3), d.h. $h(x) = h(x_0) = ce^{-x_0}$. Hieraus ergibt sich $g(x) = e^x h(x) = ce^{x-x_0}$. Damit ist die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen. ■

Aufgabe V.2.1. Beweisen Sie: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mehr als einem Punkt, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und $p \in D$. Ist $f|_{D\setminus\{p\}}$ differenzierbar und gilt

$$\lim_{\substack{x\to p\\ x\neq p}} f'(x) = a,$$

so ist f differenzierbar auf D, und es gilt $f'(p) = a$. Hinweis: Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist $\frac{1}{h}\big(f(p+h)-f(p)\big) = f'(p+\vartheta_h \cdot h)$ für ein geeignetes ϑ_h mit $0 < \vartheta_h < 1$. Hieraus schließe man die Differenzierbarkeit in p mit $f'(p) = a$. ■

Extremwerte

Definition V.2.5. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Ein Punkt $p \in D$ heißt *lokales Maximum von f*, wenn ein $\delta > 0$ existiert, so dass $f(p) \geq f(x)$ für alle $x \in U_\delta(p) \cap D$ gilt. Ist zusätzlich $f(p) > f(x)$ für alle $x \in (U_\delta(p) \cap D) \setminus \{p\}$, so heißt das Maximum *isoliert.*

(b) Ein Punkt $p \in D$ heißt ein *(isoliertes) lokales Minimum von f*, wenn p ein (isoliertes) lokales Maximum der Funktion $-f$ ist.

(c) Ein Punkt $p \in D$ heißt ein *lokales Extremum*, wenn p ein lokales Maximum oder ein Minimum ist.

(d) Ein Punkt $p \in D$ heißt ein *globales Maximum* bzw. *Minimum*, wenn $f(p) = \max f(D)$ bzw. $f(p) = \min f(D)$ gilt.

(e) f heißt *lokal um p streng monoton wachsend (fallend)*, wenn $f|_{U_\delta(p)\cap D}$ für ein $\delta > 0$ streng monoton wachsend (fallend) ist. ■

Bedingungen für Extremwerte

Lemma V.2.6. *Sei $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Dann gelten:*

(1) *Ist a ein lokales Maximum von f, so ist $f'(a) \leq 0$. Gilt $f'(a) < 0$, so ist a ein isoliertes lokales Maximum.*

(2) *Ist b ein lokales Maximum von f, so ist $f'(b) \geq 0$. Gilt $f'(b) > 0$, so ist b ein isoliertes lokales Maximum.*

(3) *Ist a ein lokales Minimum von f, so ist $f'(a) \geq 0$. Gilt $f'(a) > 0$, so ist a ein isoliertes lokales Minimum.*

(4) *Ist b ein lokales Minimum von f, so ist $f'(b) \leq 0$. Gilt $f'(b) < 0$, so ist a ein isoliertes lokales Minimum.*

(5) *Ist $p \in]a,b[$ ein lokales Extremum von f, so ist $f'(p) = 0$.*

Beweis. (1)(a) Wir nehmen zuerst an, dass a ein lokales Maximum von f ist. Ist $h > 0$ ausreichend klein, so gilt $f(a+h) \leq f(a)$. Hieraus folgt sofort

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0.$$

(b) Gilt andererseits $0 > f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, so existiert ein $\delta > 0$, so dass $f(a+h) < f(a)$ für $0 < h < \delta$ gilt (Aufgabe IV.1.1(b)). Also ist a ein isoliertes lokales Maximum.

(2)-(4) zeigt man analog zu (1).

(5) Wir nehmen zuerst an, dass p ein Maximum von f ist. Dann ist p auch ein lokales Maximum der Einschränkung $f\,|_{[a,p]}$ und daher folgt $f'(p) \geq 0$ aus (2). Ebenso ist p ein lokales Maximum der Einschränkung $f\,|_{[p,b]}$ und wir erhalten $f'(p) \leq 0$ aus (1). Daher ist $f'(p) = 0$.

Ist p ein Minimum, so schließt man analog, indem man (3) und (4) statt (1) und (2) verwendet. ∎

Ab jetzt sei $D \subseteq \mathbb{R}$ in diesem Unterabschnitt immer ein nichtleeres *offenes* Intervall, also von der Gestalt $D =]a, b[$, $]a, \infty[$, $]-\infty, a[$ oder $\mathbb{R}$.

Nachdem wir wissen, dass in jedem Extremum die Ableitung verschwindet, schauen wir uns diese Punkte etwas genauer an.

Lemma V.2.7. *Ist f differenzierbar auf dem offenen Intervall D und $f'(p) = 0$, so gilt:*

(1) *Existiert ein $\delta > 0$ mit $f'(p+h) \cdot h > 0$ für alle $h \neq 0$ mit $|h| < \delta$, so ist p ein isoliertes lokales Minimum von f. Dies gilt insbesondere, wenn f' lokal um p streng monoton wächst.*

(2) *Ist p ein isoliertes lokales Minimum von f', so wächst f lokal um p streng monoton.*

Beweis. (1) Ist f' lokal um p streng monoton wachsend, so existiert ein $\delta > 0$, so dass $f'|_{U_\delta(p)}$ streng monoton wachsend ist. Für $0 < h < \delta$ gilt also $f'(p+h) > f'(p) = 0$ und für $-\delta < h < 0$ erhalten wir $f'(p+h) < f'(p) = 0$. Es folgt also $f'(p+h) \cdot h > 0$ für alle h mit $|h| < \delta$.

Sei diese Bedingung erfüllt. Dann ist $f'(p+h) > 0$ für $0 < h < \delta$, also $f\,|_{[p,p+\delta]}$ streng monoton wachsend (Folgerung V.2.3(3)). Ebenso ist $f'(p+h) < 0$ für $-\delta < h < 0$, also $f\,|_{[p-\delta,p]}$ streng monoton fallend. Für $x, y \in U_\delta(p)$ mit $x < p < y$ gilt daher $f(x) > f(p) < f(y)$, d.h., p ist ein isoliertes lokales Minimum von f.

(2) Ist p ein isoliertes lokales Minimum von f', so gilt wegen $f'(p) = 0$ die Beziehung $f'(p+h) > 0$ für alle $h \neq 0$ in einer ausreichend kleinen Nullumgebung $U_\delta(0)$. Also sind $f|_{[p,p+\delta]}$ und $f|_{[p-\delta,p]}$ streng monoton wachsend, und somit ist f auf ganz $U_\delta(p)$ streng monoton wachsend (Nachweis!). ∎

Bemerkung V.2.8. Der erste Fall in V.2.7 liegt insbesondere dann vor, wenn $f''(p)$ existiert und > 0 ist. Dann folgt aus

$$0 < f''(p) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(p+h) - f'(p)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(p+h)}{h}$$

die Existenz eines $\delta > 0$ mit $\frac{f'(p+h)}{h} > 0$ für $0 < |h| < \delta$. Insbesondere ist dann auch $f'(p+h)h = \frac{f'(p+h)}{h} h^2 > 0$. ∎

$\boxed{\text{Über das lokale Verhalten}}$

Satz V.2.9. *Sei D offen, $n \geq 2$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine $(n-1)$-mal differenzierbare Funktion. Für einen Punkt $p \in D$ existiere auch $f^{[n]}(p)$, und es sei $f^{[n]}(p) \neq 0$ sowie $f^{[k]}(p) = 0$ für alle $0 \leq k < n$. Dann tritt einer der folgenden vier Fälle auf:*

- *n gerade, $f^{[n]}(p) > 0$: Dann ist p ein isoliertes lokales Minimum.*
- *n gerade, $f^{[n]}(p) < 0$: Dann ist p ein isoliertes lokales Maximum.*
- *n ungerade, $f^{[n]}(p) > 0$: Dann wächst f lokal um p streng monoton.*
- *n ungerade, $f^{[n]}(p) < 0$: Dann fällt f lokal um p streng monoton.*

Beweis. Die Fälle mit $f^{[n]}(p) < 0$ führt man durch Multiplikation mit -1 auf die anderen zurück. Wir nehmen daher $f^{[n]}(p) > 0$ an. Nach Voraussetzung ist $\left(f^{[n-2]}\right)''(p) = f^{[n]}(p) > 0$. Wegen Bemerkung V.2.8 und Lemma V.2.7(1) hat $f^{[n-2]}$ in p ein isoliertes lokales Minimum. Ist $n \geq 3$, so folgt aus Lemma V.2.7(2), dass $f^{[n-3]}$ um p lokal streng monoton wächst. Da nach Voraussetzung $f^{[n-3]}(p) = 0$ ist, hat $f^{[n-4]}$ in p ein isoliertes lokales Minimum, falls $n \geq 4$ ist.

Induktiv folgt für $2k \leq n$ bzw. $2k \leq n+1$: $f^{[n-2k]}$ hat in p ein isoliertes lokales Minimum und $f^{[n-2k+1]}$ wächst um p lokal streng monoton. Daraus folgt die Behauptung für $f = f^{[0]}$, wenn $k = \frac{1}{2}n$ bzw. $k = \frac{1}{2}(n+1)$ ist. ■

Bemerkung V.2.10. (a) Der Satz besagt, dass die Funktion f sich lokal um p genauso verhält wie die Funktion $x \mapsto f^{[n]}(p) \cdot (x-p)^n$.

(b) Gilt $f^{[n]}(p) = 0$ für alle n, so lässt sich nichts über das Verhalten von f bei p sagen. Ein Beispiel für eine nichttriviale Funktion mit dieser Eigenschaft ist die folgende:

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0. \end{cases}$$

Man kann zeigen, dass $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ist mit $f^{[n]}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (Aufgabe V.2.3). ■

Wir fassen die wichtigsten Ergebnisse über Extremalstellen noch einmal zusammen.

Bestimmung von Extremwerten (Zusammenfassung):

Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. (1) Nach Satz IV.1.13 existieren Maxima und Minima von f in $[a,b]$, da f nach Lemma V.1.3 stetig ist. Nach Lemma V.2.6 liegen alle lokalen Extrema in der Menge

$$\{a,b\} \cup \{x \in]a,b[\colon f'(x) = 0\}.$$

(2) Ist $p \in \,]a,b[$ ein lokales Extremum, so gilt $f'(p) = 0$. Dies ist notwendig, aber nicht hinreichend. Ist $f''(p) \neq 0$, so liegt ein isoliertes lokales Extremum vor (Satz V.2.9); es handelt sich um ein Minimum, wenn $f''(p) > 0$ ist und um ein Maximum, wenn $f''(p) < 0$ ist.
(3) Ist a ein lokales Maximum, so ist $f'(a) \leq 0$. Dies ist notwendig, aber nicht hinreichend. Ist $f'(a) < 0$, so ist a ein isoliertes lokales Maximum.

Analoges gilt für b bzw. lokale Minima am Rand (Lemma V.2.6).

Beispiel V.2.11. (a) $f : [1,2] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ liefert $f'(x) = 2x > 0$ für alle $x \in]1,2[$. Daher ist f streng monoton wachsend, folglich lieft bei $p = 1$ ein globales Minimum vor und bei $p = 2$ ein globales Maximum.

(b) Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^3 - x$ auf dem Intervall $[0,2]$. Zuerst such wir nach den Nullstellen der Ableitung. Wegen $f'(x) = 3x^2 - 1$ ergibt sich in dem Intervall $[0,2]$ nur die eine Nullstelle $x_0 := \frac{1}{\sqrt{3}}$. An dieser Stelle ist

$$f''(x_0) = 6x_0 > 0.$$

Also liegt ein isoliertes lokales Minimum vor. An den Intervallrändern haben wir $f'(0) = -1 < 0$ sowie $f'(2) = 3 \cdot 8 - 2 > 0$. Die Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$ sind also isolierte lokale Maxima. Für die Funktionswerte erhalten wir

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 8 - 2 = 6 \quad \text{und} \quad f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{3} - 1\Big) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} < 0.$$

Also ist x_0 ein globales Minimum und x_2 ein globales Maximum. ■

Aufgabe V.2.2. Ist $f\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und $f'\colon]a,b[\to \mathbb{R}$ ihre Ableitung, so besitzt f' die Zwischenwerteigenschaft, d.h. ist $f'(x) \leq c \leq f'(y)$ für $x \leq y$, so existiert ein $z \in [x,y]$ mit $f'(z) = c$. Hinweis: Ersetzen wir f durch $f(x) - cx$, so dürfen wir o.B.d.A. $c = 0$ annehmen. Weiter dürfen wir $f'(x) < 0$ und $f'(y) > 0$ annehmen. Ist nun z eine Minimalstelle von f auf dem Intervall $[x,y]$ (Nachweis der Existenz!), so zeige man $f'(z) = 0$ (warum liegt kein Minimum am Rand?). ■

Aufgabe V.2.3. Zeige, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

glatt ist mit $f^{[n]}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. ■

V.3. Die Regeln von de l'Hospital

In diesem Abschnitt werden wir eine sehr effiziente Methode kennenlernen, um Grenzwerte von Quotienten zweier differenzierbarer Funktionen zu berechnen, die man nicht direkt auswerten kann, da sie vom Typ $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ sind.

Allgemeiner Mittelwertsatz der Differentialrechnung

Satz V.3.1. *Seien $a < b$ reelle Zahlen und die Funktionen $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und auf $]\,a,b\,[$ differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in\ ]\,a,b\,[$ mit*

$$f'(\xi) \cdot \big(g(b) - g(a)\big) = g'(\xi) \cdot \big(f(b) - f(a)\big).$$

Hat g' keine Nullstelle in $]\,a,b\,[$, so ist $g(b) \neq g(a)$ und

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} .$$

Beweis. Wir wenden den Satz von Rolle (Satz V.2.1) auf die Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$F(x) := \big(f(x)-f(a)\big)\big(g(b)-g(a)\big) - \big(g(x)-g(a)\big)\big(f(b)-f(a)\big)$$

an. Es gilt $F(a) = F(b) = 0$. Also existiert ein $\xi \in\,]\,a,b\,[$ mit

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi)\cdot\big(g(b)-g(a)\big) - g'(\xi)\big(f(b)-f(a)\big).$$

Ist zusätzlich $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in\,]\,a,b\,[$, so folgt $g(b) \neq g(a)$ aus dem Mittelwertsatz. ■

Den allgemeinen Mittelwertsatz wenden wir im Beweis der folgenden Sätze an.

Satz V.3.2. (1. Regel von de l'Hospital) *Seien f und g auf dem Intervall $[a,b]$ stetige und auf $]\,a,b\,[$ differenzierbare Funktionen mit*

$$f(a) = g(a) = 0 \quad \textit{und} \quad g'(x) \neq 0 \quad \textit{für alle } x \in\,]\,a,b\,[.$$

Existiert dann

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}, \qquad \textit{so existiert auch} \qquad \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\},$$

und beide Grenzwerte stimmen überein.

Beweis. Der allgemeine Mittelwertsatz liefert zu jedem x ein $\xi_x \in\,]\,a,x\,[$ mit

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Hieraus folgt die Behauptung, denn für jede Folge x_n mit $x_n \to a$ gilt auch $\xi_{x_n} \to a$ und daher

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\xi_{x_n})}{g'(\xi_{x_n})} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$ ■

Beispiel V.3.3. (a) Den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+tx)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{t}{1+tx}}{1} = t$$

dürfen wir den de l'Hospitalschen Regeln berechnen, da die Nennerfunktion $g(x) = x$ der Bedingung $g'(x) = 1$ genügt und $\log(1 + t0) = \log 1 = 0$ ist. Wir erinnern uns daran, dass diese Regel auch die Existenz des Grenzwertes impliziert. Insbesondere erhalten wir hiermit einen neuen Beweis von

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n = \lim_{x\to 0}(1+xt)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\log(1+tx)}{x}} = e^t.$$

(b) Eine weitere Anwendung der Regel von de l'Hospital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1+x}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{(1+x)^2}}{6x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{(1+x)^3}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Wieder beachten wir, dass wir die Voraussetzungen von V.3.2 bei jeder Anwendung der de l'Hospitalschen Regeln verifizieren müssen. Die Existenz der Grenzwerte folgt dann sukzessive aus der Existenz des allerletzen Grenzwerts.

(c) Und noch eine:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{1} = 0.$$

Den letzten Grenzwert erhalten wir direkt aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion. Das erste Gleichheitszeichen und die Existenz des ersten Grenzwertes folgen aus V.3.2.

(d) Und noch eine:

$$\lim_{x\searrow 0}\frac{e^x-1}{x^2} = \lim_{x\searrow 0}\frac{e^x}{2x} = \lim_{x\searrow 0}\frac{1}{2x} = \infty. \qquad \blacksquare$$

Satz V.3.4. (1. Regel von de l'Hospital für $x \to \infty$) *Seien f und g auf dem Intervall $[a, \infty[$ differenzierbare Funktionen und*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0 \quad \textit{sowie} \quad g'(x) \neq 0 \quad \textit{für alle } x \in]a, \infty[.$$

Dann ist

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert existiert.

Beweis. Sei o.B.d.A. $a > 0$ (falls nicht, ersetze a durch 1). Wir setzen

$$\widetilde{f} : [0, \tfrac{1}{a}] \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} f(\frac{1}{x}), & \text{falls } x \in]0, \frac{1}{a}] \\ 0, & \text{falls } x = 0. \end{cases} \quad \text{und} \quad \widetilde{g} : [0, \tfrac{1}{a}] \to \mathbb{R} \text{ analog.}$$

Nach Voraussetzung sind $\widetilde{f}$ und $\widetilde{g}$ stetig und nach Konstruktion auf $]0, \frac{1}{a}[$ differenzierbar (Kettenregel). Aus Satz V.3.2 folgt also wegen $\widetilde{f}'(t) = -\frac{1}{t^2}f'(\frac{1}{t})$ für $t > 0$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{t\searrow 0}\frac{f'(\frac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2})}{g'(\frac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2})} = \lim_{t\searrow 0}\frac{\widetilde{f}'(t)}{\widetilde{g}'(t)} = \lim_{t\searrow 0}\frac{\widetilde{f}(t)}{\widetilde{g}(t)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)},$$

falls $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert. $\blacksquare$

Satz V.3.5. (2. Regel von de l'Hospital) *Sei* $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. *Die Funktionen* $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ *seien differenzierbar mit*

$$\lim_{x \to b} g(x) = \infty \quad \textit{und} \quad g'(x) \neq 0 \quad \textit{für alle} \ \ x \in]a, b[.$$

Dann ist

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

falls der rechte Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *existiert.*

Beweis. **1. Fall** $b < \infty$: Wegen $\lim_{x \to b} g(x) = \infty$ existiert ein $\delta > 0$ mit $g(x) > 0$ für alle $x \in]b - \delta, b[$. Insbesondere ist g nicht monoton fallend, und daher gilt $g' < 0$ nicht überall. Da die Ableitung g' die Zwischenwerteigenschaft hat (siehe Aufgabe V.2.2), folgt $g'(x) > 0$ auf $]a, b[$ aus der Voraussetzung, dass g' keine Nullstelle besitzt. Wir dürfen also $g > 0$ und $g' > 0$ annehmen. Wir nehmen zuerst an, dass der Grenzwert $q := \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R}$ existiert, also weder ∞ noch $-\infty$ ist. Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $\delta > 0$, so dass aus $b - \delta < x < b$ die Beziehung $q - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < q + \varepsilon$ folgt. Ist insbesondere $b - \delta < p < x < b$, so erhalten wir nach dem allgemeinen Mittelwertsatz der Differentialrechnung (Satz V.3.1)

$$q - \varepsilon < \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)} < q + \varepsilon,$$

also $(q - \varepsilon)g(x) + c < f(x) < (q + \varepsilon)g(x) + d$ mit Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$ (Beachte $g(x) > g(p)$ wegen $g' > 0$). Also ist

$$q - \varepsilon + \frac{c}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < q + \varepsilon + \frac{d}{g(x)}.$$

Wegen $g(x) \to \infty$ gilt $\frac{c}{g(x)}, \frac{d}{g(x)} \to 0$ für $x \to b$. Es existiert also ein $\delta' < \delta$ mit $q - 2\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < q + 2\varepsilon$ für $x \in [b - \delta', b[$. Also ist $\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = q$, da $\varepsilon > 0$ beliebig war.

Ist $q = \infty$, so erhalten wir zu jedem $R > 0$ in analoger Weise ein $x_R \in \mathbb{R}$, so dass für $x_R < p < x$ gilt:

$$R < \frac{f(x) - f(p)}{g(x) - g(p)}.$$

Hieraus erhalten wir weiter $Rg(x) + c < f(x)$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ und somit $R + \frac{c}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)}$, woraus $\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{R}{2}$ für ausreichend große x folgt. Also ist $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = q = \infty$.

Für $q = -\infty$ argumentiert man analog.

2. Fall $b = \infty$: Diesen Fall führt man mit der gleichen Methode aus dem Beweis von Satz V.3.4 auf den Fall $b < \infty$ zurück. ∎

Beispiel V.3.6. (a) Seien $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$ Polynome vom Grad n mit $b_n > 0$. Dann ist $\lim_{x\to\infty} g^{[k]}(x) = \infty$ für $k = 0, \ldots, n-1$, also

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f^{[n]}(x)}{g^{[n]}(x)} = \frac{a_n}{b_n}.$$

(b) $\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$.

(c) $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$. ■

V.4. Trigonometrische Funktionen

In diesem Abschnitt führen wir die trigonometrischen Funktionen mittels der Eulerschen Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}$$

ein. Hieraus leiten wir ihre wichtigsten Eigenschaften wie Periodizität, Reihenentwicklungen und die Additionstheoreme ab.

Wir erinnern uns zunächst an die komplexe Exponentialfunktion

$$\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Definition V.4.1. Wegen $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ für $z \in \mathbb{C}$ (Nachweis!) erhalten wir für $x \in \mathbb{R}$ die Beziehung $\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$. Daher werden durch

$$\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \operatorname{Re}(e^{ix}) \quad \text{(Cosinusfunktion)}$$

und

$$\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \operatorname{Im}(e^{ix}) \quad \text{(Sinusfunktion)}$$

reelle Funktionen auf $\mathbb{R}$ definiert. Definitionsgemäß gilt also die *Eulersche Formel*

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Da die Exponentialfunktion gemäß Satz IV.2.13 auf $\mathbb{C}$ stetig ist, sind auch die Funktionen sin und cos stetig.

Da für $x \in \mathbb{R}$ die Eulersche Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ die Zerlegung der komplexen Zahl e^{ix} in Real- und Imaginärteil beschreibt und $|e^{-ix}|^2 = e^{ix}e^{-ix} = e^0 = 1$ ist, können wir in der Gaußschen Zahlenebene die Zahl $\cos x$ als die Projektion des Punktes e^{ix} auf die reelle Achse und $\sin x$ als die Projektion des Punktes e^{ix} auf die imaginäre Achse deuten. ■

Lemma V.4.2. *Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

(1) $\cos(-x) = \cos x$ *(*$\cos$ *ist eine ungerade Funktion) und* $\sin(-x) = -\sin x$ *(*$\sin$ *ist ungerade).*

(2) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

(3) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ *(Additionstheorem des Cosinus).*

(4) $\sin(x+y) = \cos x \sin y + \sin x \cos y$ *(Additionstheorem des Sinus).*

Beweis. (1) folgt sofort aus der Definition.

(2) folgt aus

$$1 = |e^{ix}|^2 = \mathrm{Re}(e^{ix})^2 + \mathrm{Im}(e^{ix})^2 = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

(3), (4) Aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erhalten wir

$$\begin{aligned}\cos(x+y) + i\sin(x+y) = e^{i(x+y)} &= e^{ix}e^{iy} = (\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y)\\ &= (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + i(\sin x\cos y + \sin y\cos x).\end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun durch Vergleich von Real- und Imaginärteil. ∎

Um nachzuweisen, dass Sinus- und Cosinusfunktion differenzierbar sind und ihre Ableitungen zu berechnen, benötigen wir das folgende Lemma.

Lemma V.4.3. *Es gelten*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \textit{und} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in\mathbb{C}}} \frac{e^z - 1}{z} = 1. \tag{4.1}$$

Wie in Beispiel V.1.12 erhalten wir für $z \in \mathbb{C}$:

$$\left|\frac{e^z-1}{z} - 1\right| = \left|\frac{e^z - 1 - z}{z}\right| = \left|\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k-1}\right| \le |z| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k = \frac{|z|}{1-|z|} \le 2|z|,$$

wenn $|z| \le \frac{1}{2}$ ist. Damit ist (4.1) gezeigt. Für $z = ix$, $x \in \mathbb{R}$, erhalten wir insbesondere

$$1 = \lim_{x\to 0} \frac{e^{ix}-1}{ix} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} - i\frac{\cos x - 1}{x}$$

und hieraus folgt die Behauptung. ∎

Satz V.4.4. *Die Funktionen* $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sind beliebig oft differenzierbar und es gilt*

$$\sin' = \cos \quad \textit{und} \quad \cos' = -\sin .$$

Beweis. Mit dem Additionstheorem für die Cosinusfunktion sowie Lemma V.4.3 erhalten wir für $x \in \mathbb{R}$ die Ableitungen

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = -\sin x.\end{aligned}$$

Also ist $\cos$ differenzierbar mit $\cos' = -\sin$.

Analog ergibt sich die Differenzierbarkeit der Sinusfunktion und die Formel $\sin' = \cos$. Hieraus folgt unmittelbar, dass sin und cos beliebig oft differenzierbar sind. ■

Satz V.4.5. (Schwingungsgleichung) *Sei* $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *eine zweimal differenzierbare Funktion, die die Schwingungsgleichung*

$$u'' + u = 0$$

löst. Dann ist für alle $t \in \mathbb{R}$

$$u(t) = \alpha \cdot \cos t + \beta \cdot \sin t \quad \textit{für} \quad \alpha = u(0), \beta = u'(0).$$

Beweis. Die Funktion $\widetilde{u} := \alpha \cdot \cos + \beta \cdot \sin$ ist ebenfalls eine Lösung der Schwingungsgleichung mit $\widetilde{u}(0) = u(0)$ und $\widetilde{u}'(0) = u'(0)$. Wir betrachten nun die Differenzfunktionen $U := u - \widetilde{u}$. Dann ist $U(0) = 0$, $U'(0) = 0$, und für die Funktion $E := U^2 + (U')^2$ erhalten wir $E(0) = 0$ sowie

$$E' = 2U \cdot U' + 2U' \cdot U'' = 2UU' - 2U'U = 0.$$

Also ist E konstant. Aus $E(0) = 0$ folgt daher $E = 0$ und folglich $U = 0$. Damit ist $u = \widetilde{u} = \alpha \cdot \cos + \beta \cdot \sin$. ■

Wir haben gerade gesehen, dass die zweimal differenzierbaren Funktionen $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Schwingungsgleichung lösen, einen zweidimensionalen Vektorraum mit der Basis $\{\cos, \sin\}$ bilden. Er ist der Kern der linearen Abbildung

$$C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}), \quad u \mapsto u'' + u.$$

Folgerung V.4.6. *Ist* $0 \neq \omega \in \mathbb{R}$ *und* u *eine Lösung der allgemeinen Schwingungsgleichung*

$$u'' + \omega^2 \cdot u = 0,$$

so ist

$$u(t) = \alpha \cdot \cos(\omega t) + \beta \cdot \sin(\omega t) \quad \textit{für} \quad \alpha = u(0), \beta = \frac{u'(0)}{\omega}.$$

Die Zahl ω heißt *Winkelgeschwindigkeit* der Schwingung.

Beweis. Wir betrachten die Funktion $\widetilde{u}(t) := u(\frac{t}{\omega})$ und sehen, dass $\widetilde{u}$ eine Lösung der Schwingungsgleichung

$$\widetilde{u}''(t) + \widetilde{u}(t) = \tfrac{1}{\omega^2} u''(\tfrac{t}{\omega}) + u(\tfrac{t}{\omega}) = 0$$

ist. Dann ist nach Satz V.4.5 $\widetilde{u}(t) = \alpha \cdot \cos(t) + \beta \cdot \sin(t)$ mit $\alpha = \widetilde{u}(0) = u(0)$ und $\beta = \widetilde{u}'(0) = \frac{u'(0)}{\omega}$. ■

Die Zahl π

Satz V.4.7. *Für alle $x \in \mathbb{R}$ haben wir folgende Reihendarstellungen von Cosinus- und Sinusfunktion:*

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad \textit{und} \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Beweis. Aus $i^2 = -1$ erhalten wir $i^3 = -i$ und $i^4 = 1$. Also ist

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n + (-ix)^n}{2n!} = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{1 + (-1)^n}{2} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.\end{aligned}$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{1 - (-1)^n}{2i} \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} i^{2k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.\end{aligned}$$

■

Folgerung V.4.8. $\cos 2 < 0$.

Beweis. Für $0 < |x| < 3$ und $k \geq 1$ ist

$$\frac{\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!}}{\frac{x^{2k}}{(2k)!}} = \frac{x^2}{(2k+2)(2k+1)} \leq \frac{x^2}{4 \cdot 3} \leq \frac{9}{12} < 1.$$

Hieraus folgt, dass die Folge $(\frac{x^{2n}}{(2n)!})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Folglich ist

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\frac{x^{4m+2}}{(4m+2)!} - \frac{x^{4m+4}}{(4m+4)!}}_{\geq 0} \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}.$$

Für $x = 2$ ergibt sich insbesondere $\cos 2 \leq 1 - 2 + \frac{16}{24} = -\frac{1}{3} < 0$. ∎

Definition V.4.9. Wir definieren

$$\pi := 2 \inf\{x \geq 0 \colon \cos x = 0\}.$$

Das ist sinnvoll, denn wegen $\cos 0 = 1$ und $\cos 2 < 0$ zeigt uns der Zwischenwertsatz, dass die Cosinusfunktion im Intervall $]0, 2[$ eine Nullstelle hat. Es ist klar, dass $\pi < 4$ ist. ∎

Satz V.4.10. *$e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, d.h. $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.*

Beweis. Aus der Definition von π folgt zunächst die Existenz einer Folge $x_n \in \mathbb{R}$ mit $\cos x_n = 0$ und $x_n \to \frac{\pi}{2}$. Aus der Stetigkeit der Cosinusfunktion folgt daher

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Aus $\cos x > 0$ für $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ folgt aus dem Zwischenwertsatz (Satz IV.1.15) weiter

$$\cos'\frac{\pi}{2} = -\sin\frac{\pi}{2} \leq 0.$$

Wegen $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ gilt andererseits $\sin^2\frac{\pi}{2} = 1$ und daher $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. ∎

Wir haben gerade die Identität

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

bewiesen, in der die 5 wichtigsten Zahlen der Analysis $0, 1, \pi, e$ und i vorkommen.

Folgerung V.4.11. (Periodizitätseigenschaften) *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:*

(1) $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ *(2π-Periodizität).*

(2) $\cos(x + \pi) = -\cos x$, $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

(3) $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$, $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$.

Beweis. (1) Wegen Satz V.4.10 erhalten wir aus den Additionstheoremen (Lemma V.4.2)

$$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x \quad \text{und} \quad \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x \tag{4.2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Ersetzen wir x durch $x + \frac{\pi}{2}$, erhalten wir weiter

$$\cos(x + \pi) = -\sin(x + \frac{\pi}{2}) = -\cos x$$

und analog $\sin(x + \pi) = -\sin x$. Damit ist (2) gezeigt. Die Formeln (1) und (3) folgen nun unmittelbar aus (2) und (4.2). ∎

Folgerung V.4.12. (Nullstellen)

$$\{x \in \mathbb{R} \colon \sin x = 0\} = \mathbb{Z}\pi \quad \textit{und} \quad \{x \in \mathbb{R} \colon \cos x = 0\} = \frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi.$$

Beweis. Aus der Definition von π und $\cos x = \cos(-x)$ folgt $\cos x > 0$ für $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ und mit Folgerung V.4.11(2) $\cos x < 0$ für $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$ sowie $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$. Im Intervall $]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ sind $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ also die einzigen Nullstellen der Cosinusfunktion. Die Beschreibung der Nullstellenmenge der Cosinusfunktion folgt daher aus der 2π-Periodizität.

Die Nullstellenmenge der Sinusfunktion erhalten wir nun mit Folgerung V.4.11(3). ■

Folgerung V.4.13. $\{z \in \mathbb{C} \colon e^z = 1\} = 2\pi i\mathbb{Z}$.

Beweis. Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = 1$. Wegen $|e^z|^2 = e^z e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = e^{2\operatorname{Re} z} = 1$ ist $\operatorname{Re} z = 0$, d.h. $z = ix$ für ein $x \in \mathbb{R}$. Wegen

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i} = e^{-i\frac{x}{2}}\frac{e^{ix} - 1}{2}$$

ist $e^{ix} = 1$ äquivalent zu $\sin\frac{x}{2} = 0$, d.h. $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ (Folgerung V.4.12). ■

Gemäß der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion ist $\exp \colon (\mathbb{C}, +) \to (\mathbb{C}^\times, \cdot)$ ein Gruppenhomomorphismus der additiven Gruppe $\mathbb{C}$ in die multiplikative Gruppe $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. In Folgerung V.4.13 haben wir den Kern von diesem Gruppenhomomorphismus bestimmt.

Satz V.4.14. (Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen) *Zu jeder komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}^\times$ existiert genau ein $t \in [0, 2\pi[$ mit $z = |z|e^{it}$.*

Beweis. Schreiben wir $\frac{z}{|z|} = a + ib$, so ist $a^2 + b^2 = 1$ und wir suchen ein $t \in [0, 2\pi[$ mit $(\cos t, \sin t) = (a, b)$.

Existenz: Wegen

$$\cos(-t) = \cos t \quad \text{und} \quad \sin(-t) = -\sin(t)$$

sowie

$$\cos(\pi + t) = -\cos(t) \quad \text{und} \quad \sin(\pi + t) = -\sin(t)$$

dürfen wir $a, b \geq 0$ annehmen (Fallunterscheidung nach dem Quadranten in der Ebene, in dem (a, b) liegt). Nun ist $\cos(0) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ und $0 \leq a \leq 1$, da $a = \sqrt{1 - b^2} \leq 1$ ist. Wegen dem Zwischenwertsatz existiert ein $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ mit $\cos(t) = a$. Dann ist $b = \sqrt{1 - a^2} = \sqrt{1 - \cos^2 t} = \sin t$, da $\sin t \geq 0$ für $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ gilt.

Eindeutigkeit: Ist $z = |z|e^{it} = |z|e^{it'}$, so ist $e^{i(t-t')} = e^{it}e^{-it'} = 1$ und daher $t - t' \in 2\pi\mathbb{Z}$ (Folgerung V.4.13). Aus $t, t' \in [0, 2\pi[$ folgt $t = t'$. ■

Die Polarkoordinatendarstellung komplexer Zahlen hat den großen Vorteil, dass man mit ihr sehr gut Produkte berechnen kann: Ist $z = |z|e^{i\varphi}$ und $w = |w|e^{i\psi}$, so haben wir

$$zw = |z| \cdot |w|e^{i(\varphi+\psi)} = |zw|e^{i(\varphi+\psi)}.$$

Sind $\varphi, \psi \in [0, 2\pi[$, so kann es natürlich passieren, dass $\varphi + \psi \geq 2\pi$ ist. In diesem Fall ist $e^{i(\varphi+\psi)} = e^{i(\varphi+\psi-2\pi)}$. Man muß also „modulo 2π“ rechnen.

Folgerung V.4.15. (n-te Einheitswurzeln) *Die Gleichung* $z^n = 1$ *hat in* $\mathbb{C}$ *genau* n *Lösungen. Sie sind gegeben durch*

$$\{e^{\frac{k}{n}2\pi i} : k = 0, \ldots, n-1\}.$$

Beweis. Es ist klar, dass $(e^{\frac{k}{n}2\pi i})^n = e^{k2\pi i} = 1$ ist. Ist nun $z \in \mathbb{C}$ mit $z^n = 1$, so ist $|z|^n = |z^n| = 1$. Es existiert also ein $\varphi \in [0, 2\pi[$ mit $z = e^{i\varphi}$ (Satz V.4.14). Aus $1 = z^n = e^{in\varphi}$ erhalten wir $n\varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$ (Folgerung V.4.13). Also existiert ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $n\varphi = 2\pi k$. Aus $\varphi \in [0, 2\pi[$ folgt nun $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$. ∎

Mehr über trigonometrische Funktionen

Bemerkung V.4.16. (Tangens und Arcustangens) Auf $D := \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right)$ definieren wir die *Tangensfunktion*

$$\tan\colon D \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Eigenschaften (für alle $x \in D$):

(1) $\tan(x + \pi) = \tan x$ (Folgerung V.4.11(2)).

(2) $\tan(x)' = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$: Nach der Quotientenregel ist

$$\tan' = \frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}.$$

Wegen $1 + \tan^2(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2(x)}$ genügt die Tangensfunktion also der Differentialgleichung

$$f'(x) = 1 + f(x)^2, \quad x \in D.$$

(3) $\tan x \tan(\frac{\pi}{2} - x) = 1$ (Folgerung V.4.11).

(4) $\tan_0\colon] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ ist bijektiv: Wegen (2) ist die Funktion streng monoton wachsend, also injektiv. Da tan stetig ist, ist das Bild ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Mit (3) erhalten wir

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan_0 x = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan_0(\frac{\pi}{2} - x)} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x} = \infty$$

und somit $[0, \infty[\subseteq I$. Aus $\tan_0(-x) = \tan_0 x$ für alle x erhalten wir schließlich $I = \mathbb{R}$.

(5) Mit (4) und dem Satz über die Umkehrfunktion (Satz V.1.11) erhalten wir eine differenzierbare Funktion

$$\arctan := \tan_0^{-1}\colon \mathbb{R} \to] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Dann ist $\arctan(0) = 0$ und

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan_0'(\arctan x)} = \frac{1}{1 + \tan_0^2(\arctan x)} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Diese Eigenschaft wird später in der Integralrechnung noch eine wichtige Rolle spielen. ∎

Bemerkung V.4.17. (a) Da die Cosinusfunktion $\cos_0 := \cos|_{[0,\pi]}$ auf $]0,\pi[$ die negative Ableitung $-\sin$ besitzt, ist $\cos_0$ streng monoton fallend, also injektiv mit dem Bild $[\cos(\pi), \cos(0)] = [-1,1]$. Die Umkehrfunktion

$$\arccos := \cos_0^{-1} \colon [-1,1] \to [0,\pi]$$

heißt *Arcuscosinusfunktion.* Sie ist ebenfalls streng monoton fallend und in $]-1,1[$ differenzierbar mit der Ableitung

$$\begin{aligned}\arccos'(x) &= \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = -\frac{1}{\sin(\arccos x)}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

(b) Da die Sinusfunktion $\sin_0 := \sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$ auf $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ die positive Ableitung $\cos$ besitzt, ist $\sin_0$ streng monoton wachsend, also injektiv mit dem Bild $[-1,1]$. Die Umkehrfunktion

$$\arcsin := \sin_0^{-1} \colon [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

heißt *Arcussinusfunktion.* Wegen Folgerung V.4.11 ist $\sin_0(x) = \cos_0(\frac{\pi}{2} - x)$ und daher

$$\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} - \arccos(x).$$

Insbesondere ist

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

■

Beispiel V.4.18. (a) Zunächst beachten wir, dass

$$\lim_{x\to\infty} \cos x$$

nicht exitiert, da die Folge $\cos(n\pi) = (-1)^n$ nicht konvergiert. Hieraus erhalten wir sofort, dass

$$\lim_{x\to 0} \cos\frac{1}{x}$$

ebenfalls nicht existiert.

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Diese Funktion ist in allen Punkten $x \neq 0$ differenzierbar, da Kompositionen differenzierbarer Funktionen differenzierbar sind. Im Nullpunkt ergibt sich aus $|f(x)| \leq |x|$ sofort

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Also ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig. Allerdings ist f in 0 nicht differenzierbar, denn

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\cos\frac{1}{h}$$

existiert nicht (siehe (a)).

(c) (Eine differenzierbare Funktion deren Ableitung unstetig ist) Wir betrachten die Funktion

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & \text{sonst.}\end{cases}$$

Für $x\neq 0$ ist

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\frac{x^2}{x^2}\cos\frac{1}{x}=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}.$$

Für $x=0$ ist

$$\frac{1}{h}(f(x+h)-f(x))=\frac{f(h)}{h}=\frac{1}{h}h^2\sin\frac{1}{h}=h\cdot\sin\frac{1}{h}.$$

Wegen $\left|\sin\frac{1}{h}\right|\leq 1$ ist also $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$, d.h. $f'(0)=0$ existiert. Damit ist f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar, und es gilt

$$f'(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$$

Für $x_n:=\frac{1}{2\pi n}$ ist

$$f'(x_n)=f'(\frac{1}{2\pi n})=\frac{2}{2\pi n}\sin(2\pi n)-\cos(2\pi n)=-1\neq 0=f'(0).$$

Damit ist f' im Nullpunkt unstetig. Die Funktion f ist also ein Beispiel für eine differenzierbare Funktion deren Ableitung unstetig ist. ■

Bemerkung V.4.19. Die Folge $f_n(x)=\frac{1}{n}\sin(n^2x)$ konvergiert auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion, denn es gilt

$$\|f_n\|_{\mathbb{R}}=\sup\{|f_n(x)|:x\in\mathbb{R}\}=\frac{1}{n}\to 0.$$

Andererseits divergiert die Folge ${f_n}'(x)=n\cdot\cos(n^2x)$. Selbst gleichmäßige Konvergenz zieht also offensichtlich nicht notwendigerweise die Konvergenz der Folge der Ableitungen nach sich. ■

VI. Integralrechnung

Nachdem wir im letzten Kapitel die Differentialrechnung kennengelernt haben, mit deren Hilfe es möglich ist, die Änderungsrate einer Funktion durch deren Ableitung mathematisch präzise zu beschreiben, wenden wir uns in diesem Abschnitt der Frage zu, wie man die Fläche berechnet, die ein Funktionsgraph mit der x-Achse einschließt. Die Beobachtung, dass die Änderungsrate dieser Fläche bei fortschreitender rechter Grenze des Definitionsbereichs durch die Funktion gegeben ist, ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung – eines der zentralen Resultate der Analysis der Funktionen von einer Veränderlichen. Insbesondere werden wir sehen, wie sich dieser Satz dazu verwenden lässt, viele konkrete Integrale explizit zu berechnen.

VI.1. Treppenfunktionen

Definition VI.1.1. (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine *Zerlegung* des Intervalls $[a, b]$ ist ein $(n+1)$-Tupel

$$Z = (z_0, z_1, \ldots, z_n) \quad \text{mit} \quad a = z_0 \leq z_1 \leq z_2 \leq \ldots \leq z_n = b.$$

Die Zerlegung $Z = (z_0, \ldots, z_n)$ heißt *feiner* als die Zerlegung $W = (w_0, \ldots, w_m)$, wenn $\{w_0, \ldots, w_m\} \subseteq \{z_0, \ldots, z_n\}$ gilt, d.h. wenn jeder Unterteilungspunkt von W auch ein Unterteilungspunkt von Z ist. Sind Z_1 und Z_2 zwei Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$, so sei $Z_1 \cup Z_2$ diejenige Zerlegung, die durch Vereinigung der Mengen der Unterteilungspunkte entsteht.

(b) Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung $Z = (z_0, \ldots, z_n)$ von $[a, b]$ und Zahlen $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$f(t) = c_k \quad \text{für } z_{k-1} < t < z_k.$$

Von den Funktionswerten an den Unterteilungspunkten wird nichts verlangt. Wir schreiben T_a^b für die Menge der Treppenfunktionen $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$. ■

Lemma VI.1.2. *Die Menge T_a^b ist ein reeller Vektorraum, d.h., für $f, g \in T_a^b$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ sind $f + g$ und λf wieder Elemente von T_a^b.*

Beweis. Wegen $T_a^b \subseteq B([a,b])$ (beschränkte Funktionen) haben wir nur zu zeigen, dass T_a^b ein Untervektorraum ist. Für $f \in T_a^b$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda f \in T_a^b$. Sind f und g Elemente von T_a^b zu den Zerlegungen Z_1 und Z_2, so sind sie auch Treppenfunktionen zu der Zerlegung $Z_1 \cup Z_2$. Also ist $f + g$ Treppenfunktion zu der Zerlegung $Z_1 \cup Z_2$. Daher ist $T_a^b \subseteq B([a,b])$ unter Skalarmultiplikation und Addition abgeschlossen und somit ein Untervektorraum. ■

Satz VI.1.3. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\varphi \in T_a^b$ mit*

$$\|f - \varphi\|_{[a,b]} = \sup\{|f(x) - \varphi(x)| : x \in [a,b]\} \leq \varepsilon.$$

Jede stetige Funktion lässt sich also gleichmäßig durch Treppenfunktionen approximieren.

Beweis. Nach Satz IV.1.24 ist f gleichmäßig stetig. Es existiert also ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ für alle x, y mit $|x - y| < \delta$. Wir wählen nun eine Zerlegung $Z := (z_0, \ldots, z_m)$ von $[a,b]$ mit $|z_{k+1} - z_k| < \delta$ für alle $k = 0, \ldots, m-1$ und definieren die Funktion φ durch

$$\varphi(t) := \begin{cases} f(z_k), & \text{für } z_k \leq t < z_{k+1}, k = 0, \ldots, m-1 \\ f(b), & \text{für } t = b. \end{cases}$$

Für $t \in [z_k, z_{k+1}[$ ist dann

$$|\varphi(t) - f(t)| \leq |\varphi(t) - f(z_k)| + |f(z_k) - f(t)| \leq 0 + \varepsilon = \varepsilon,$$

d.h. $\|f - \varphi\|_{[a,b]} \leq \varepsilon$. ■

Folgerung VI.1.4. *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\varepsilon > 0$, so existieren Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\psi - \varphi = \varepsilon$.*

Beweis. Mit Satz VI.1.3 finden wir eine Treppenfunktion $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\|f - h\|_{[a,b]} < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann setzen wir $\varphi := h - \frac{\varepsilon}{2}$ und $\psi := h + \frac{\varepsilon}{2}$. Nun ist $\psi - \varphi = \frac{\varepsilon}{2} - (-\frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$ und $\varphi = h - \frac{\varepsilon}{2} \leq f \leq h + \frac{\varepsilon}{2} = \psi$. ■

Das Riemann-Integral

Gesucht ist der Inhalt der Fläche, die der Graph einer Funktion $f : [a,b] \to [0, \infty[$ mit der x-Achse einschließt, d.h. der Menge

$$F = \{(x,y) : x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Wir werden sehen, dass sich diese Aufgabe für stetige Funktionen immer lösen lässt. Auch für Funktionen mit endlich vielen Unstetigkeitspunkten lassen sich diese Flächen berechnen. Als problematisch erweisen sich Funktionen, die „sehr oft“ springen, wie zum Beispiel die *Dirichletfunktion*

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{falls } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Wir beginnen die Berechnung des gesuchten Flächeninhalts bei den Treppenfunktionen.

Lemma VI.1.5. *Ist* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *eine Treppenfunktion zur Zerlegung* $Z = (z_0, \ldots, z_n)$ *mit* $f(x) = c_k$ *für alle* $z_{k-1} < x < z_k$, *so hängt die Zahl*

$$S_Z(f) := \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (z_k - z_{k-1})$$

nicht von der Zerlegung Z *ab, d.h., für jede andere Zerlegung* Z', *für die* f *auf dem Inneren der Zerlegungsintervalle konstant ist, gilt* $S_{Z'}(f) = S_Z(f)$.

Beweis. Ist Z' eine andere Zerlegung, so dass f auf dem Innern der Zerlegungsintervalle konstant ist, so existiert eine gemeinsame Verfeinerung von Z und Z'. Es reicht also zu sehen, dass $S_Z(f) = S_{Z'}(f)$ gilt, wenn Z' durch Hinzunahme eines Punktes zu Z entsteht. Sei dazu $z \in [z_{k-1}, z_k]$ und $Z' = (z_0, \ldots, z_{k-1}, z, z_k, \ldots, z_n)$. In diesem Fall ist

$$c_k \cdot (z_k - z_{k-1}) = c_k(z_k - z) + c_k(z - z_{k-1}),$$

und daher $S_Z(f) = S_{Z'}(f)$. Die Behauptung folgt nun durch Induktion nach der Zahl der hinzugenommenen Punkte. ■

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und $Z = (z_0, \ldots, z_n)$ eine Zerlegung mit $f(x) = c_k$ für alle $x \in]z_{k-1}, z_k[$. Wir definieren das *Integral von* f durch

$$\int_a^b f := \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot (z_k - z_{k-1}).$$

Das ist dadurch gerechtfertig, dass wir uns gerade davon überzeugt haben, dass die rechte Seite $S_Z(f)$ nicht von der Zerlegung Z abhängt.

Für $a = b$ setzen wir $\int_a^a f = 0$; ferner $\int_b^a f = -\int_a^b f$. Die Zahl a heißt die *untere Grenze* des Integrals, die Zahl b die *obere Grenze.* Eine weitere Schreibweise für das Integral ist

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Satz VI.1.6. *Das Integral von Treppenfunktionen hat folgende Eigenschaften:*

(I1) *Intervalladditivität: Für* $a \leq b \leq c$ *und* $f \in T_a^c$ *gilt*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

(I2) *Monotonie: Sind* $f, g \in T_a^b$ *mit* $f \leq g$, *so ist* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

(I3) *Linearität: Für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *und alle Treppenfunktionen* $f, g \in T_a^b$ *gilt*

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

(I4) *Normierung: Ist* f *auf* $[a,b]$ *konstant gleich* c*, so ist* $\int_a^b f = c\cdot(b-a)$.

Beweis. (I1) Ist Z eine Zerlegung des Intervalls $[a,c]$, die den Punkt b enthält, so folgt (I1) direkt aus der Definition des Integrals.

(I2), (I3) Zuerst wählen wir eine gemeinsame Zerlegung Z für f und g. Es gelte $f(x)=c_k$ und $g(x)=d_k$ für $x\in\,]z_{k-1},z_k[$.

Ist $f\leq g$, so ist $c_k\leq d_k$ für alle k und daher $\int_a^b f\leq\int_a^b g$. Andererseits haben wir $(\lambda f+\mu g)(x)=\lambda c_k+\mu d_k$ für alle $x\in\,]z_{k-1},z_k[$. Hieraus folgt (I3).

(I4) ist klar. ■

Definition VI.1.7. (a) Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so definieren wir das *Oberintegral*

$$\int_a^{*b} f := \inf\Big\{\int_a^b \psi : f\leq\psi,\ \psi\in T_a^b\Big\}$$

und das *Unterintegral*

$$\int_{*a}^{b} f := \sup\Big\{\int_a^b \varphi : \varphi\leq f,\ \varphi\in T_a^b\Big\}.$$

Um die Endlichkeit dieser Werte einzusehen, beachten wir, dass aus der Beschränktheit von f die Existenz von $m,M\in\mathbb{R}$ mit $m\leq f\leq M$ folgt. Insbesondere existieren $\varphi,\psi\in T_a^b$ mit $\varphi\leq f\leq\psi$. Für solche Paare gilt $\int_a^b\varphi\leq\int_a^b\psi$ wegen (I2). Insbesondere sind $\int_a^{*b} f$ und $\int_{*a}^{b} f$ reelle Zahlen mit

$$\int_{*a}^{b} f\leq\int_a^{*b} f.$$

(b) Eine beschränkte Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ heißt *Riemann-integrabel (Riemann-integrierbar)*, wenn

$$\int_{*a}^{b} f=\int_a^{*b} f$$

gilt, d.h., wenn zu jedem $\varepsilon>0$ Treppenfunktionen $\varphi,\psi\in T_a^b$ mit $\varphi\leq f\leq\psi$ und $\int_a^b\varphi-\int_a^b\psi\leq\varepsilon$ existieren. In diesem Fall definieren wir das *Riemann-Integral von* f durch

$$\int_a^b f := \int_a^{*b} f=\int_{*a}^{b} f$$

Die Menge der Riemann-integrablen Funktionen auf $[a,b]$ bezeichnen wir mit R_a^b. Wir bemerken, dass $T_a^b\subseteq R_a^b$ trivialerweise gilt. Für $f\in R_a^b$ definieren wir $\int_b^a f := -\int_a^b f$. ■

Beispiel: Ein wichtiges Beispiel, das die Subtilität des Integrierbarkeitsbegriff zeigt, ist die *Dirichlet-Funktion*:

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{für } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Da jedes offene Intervall reeller Zahlen eine rationale Zahl enthält, gelten für jedes Paar von Treppenfunktionen φ, ψ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ die Beziehungen $\varphi \leq 0$ und $1 \leq \psi$ bis auf höchstens endlich viele Punkte. Mit $0 \leq f \leq 1$ ergibt sich damit

$$\int_{*0}^{1} f = 0 < 1 = \int_0^{*1} f.$$

Insbesondere ist f nicht Riemann-integrabel. ■

Satz VI.1.8. *Das Riemann-Integral hat folgende Eigenschaften:*

(I1) *Intervalladditivität: Für $a \leq b \leq c$ ist $f \in R_a^c$ genau dann, wenn $f|_{[a,b]} \in R_a^b$ und $f|_{[b,c]} \in R_b^c$ gelten. In diesem Fall ist*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

(I2) *Monotonie: Sind $f, g \in R_a^b$ mit $f \leq g$, so ist $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

(I3) *Linearität: Für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $f, g \in R_a^b$ ist $\lambda f + \mu g \in R_a^b$ mit*

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

(I4) *Normierung: Ist f auf $[a,b]$ konstant gleich c, so ist $\int_a^b f = c \cdot (b-a)$.*

Beweis. (I1) Wir zeigen, dass $f \in R_a^c$ äquivalent ist zu $f|_{[a,b]} \in R_a^b$ und $f|_{[b,c]} \in R_b^c$. In diesem Fall ist $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.

Zwischenbehauptung: Das Oberintegral ist intervalladditiv, d.h., für jede beschränkte Funktion $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_a^{*c} f = \int_a^{*b} f + \int_b^{*c} f.$$

Für $\psi \in T_a^c$ mit $f \leq \psi$ gilt $\int_a^c \psi = \int_a^b \psi + \int_b^c \psi \geq \int_a^{*b} f + \int_b^{*c} f$, also auch

$$\int_a^{*c} f \geq \int_a^{*b} f + \int_b^{*c} f.$$

Seien nun $\psi_1 \in T_a^b$ und $\psi_2 \in T_b^c$ zwei Treppenfunktionen mit $\psi_1 \geq f|_{[a,b]}$ und $\psi_2 \geq f|_{[b,c]}$. Aus diesen beiden erhält man eine neue Treppenfunktion durch

$$\psi(x) := \begin{cases} \psi_1(x), & \text{falls } x \in [a,b[\\ \psi_2(x), & \text{falls } x \in [b,c]. \end{cases}$$

Diese neue Treppenfunktion ist Element von T_a^c, und es gilt $\psi \geq f$. Nun ist $\int_a^b \psi_1 + \int_b^c \psi_2 = \int_a^c \psi \geq \int_a^{*c} f$, also auch

$$\int_a^{*b} f + \int_b^{*c} f \geq \int_a^{*c} f,$$

denn für zwei nach unten beschränkte Mengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$ ist $\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$. Damit ist die Intervalladditivität des Oberintegrals gezeigt. Die analoge Aussage für Unterintegrale erhält man genauso und durch Zusammensetzen

$$\int_a^{*c} f = \int_a^{*b} f + \int_b^{*c} f \geq \int_{*a}^{b} f + \int_{*b}^{c} f = \int_{*a}^{c} f.$$

Ist $f \in R_a^c$, so ist $\int_a^{*c} f = \int_{*a}^{c} f$ und wir erhalten wegen $\int_a^{*b} f \geq \int_{*a}^{b} f$ und $\int_b^{*c} f \geq \int_{*b}^{c} f$ zwischen den inneren Summanden die Gleichheit $\int_a^{*b} f = \int_{*a}^{b} f$ und $\int_b^{*c} f = \int_{*b}^{c} f$. Dies bedeutet $f|_{[a,b]} \in R_a^b$ und $f|_{[b,c]} \in R_b^c$. Ferner gilt dann die Intervalladditivität.

Sind andererseits $f|_{[a,b]} \in R_a^b$ und $f|_{[b,c]} \in R_b^c$, so gilt

$$\int_a^{*c} f = \int_a^{*b} f + \int_b^{*c} f = \int_{*a}^{b} f + \int_{*b}^{c} f = \int_{*a}^{c} f$$

und folglich $f \in R_a^c$. Auch in diesem Fall erhalten wir die gewünschte Gleichheit. Damit ist (I1) bewiesen.

(I2) Monotonie: Seien $f, g \in R_a^b$ und $f \leq g$ auf $[a,b]$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f = \int_a^{*b} f &= \inf\Big\{ \int_a^b \psi : f \leq \psi,\ \psi \in T_a^b \Big\} \\ &\leq \inf\Big\{ \int_a^b \psi : g \leq \psi,\ \psi \in T_a^b \Big\} = \int_a^{*b} g = \int_a^b g \end{aligned}$$

wegen

$$\Big\{ \int_a^b \psi : f \leq \psi,\ \psi \in T_a^b \Big\} \supseteq \Big\{ \int_a^b \psi : g \leq \psi,\ \psi \in T_a^b \Big\}.$$

(I3) Linearität: Seien $f, g \in R_a^b$ und φ und ψ zwei Treppenfunktionen mit $f \leq \varphi$ und $g \leq \psi$. Dann ist $f + g \leq \varphi + \psi$, also

$$\int_a^{*b} f + g \leq \int_a^b \varphi + \psi = \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi.$$

Daher gilt nach Übergang zum Infimum auf der rechten Seite auch

$$\int_a^{*b} f+g \leq \int_a^{*b} f + \int_a^{*b} g = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Hierbei verwenden wir die Ungleichung

$$\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B)$$

für nichtleere Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Ferner erhält man analog

$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_{*a}^{b} f + \int_{*a}^{b} g \leq \int_{*a}^{b} f+g \leq \int_a^{*b} f+g.$$

Diese zwei Ungleichungsketten zeigen, dass überall Gleichheit gilt; insbesondere folgt $\int_a^{*b} f+g = \int_{*a}^{b} f+g$, d.h. $f+g \in R_a^b$ und die Additivität des Integrals.

Wir zeigen noch $\lambda f \in R_a^b$ und $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$. Für $\lambda = 0$ ist die Behauptung trivial. Sei zunächst $\lambda > 0$. Dann gilt für jede Funktion $f \in R_a^b$:

$$\int_a^{*b} \lambda f = \lambda \int_a^{*b} f = \lambda \int_{*a}^{b} f = \int_{*a}^{b} \lambda f;$$

folglich ist $\lambda f \in R_a^b$ und $\lambda \int_a^b f = \int_a^b \lambda f$. Ist $\lambda < 0$, also $\lambda = -|\lambda|$, und $f \leq \psi$, so ist $\lambda f \geq \lambda\psi$. Es folgt

$$\int_{*a}^{b} \lambda f = \lambda \int_a^{*b} f = \lambda \int_{*a}^{b} f = \lambda \int_a^b f$$

und analog $\int_a^{*b} \lambda f = \lambda \int_{*a}^{b} f = \lambda \int_a^b f$, also $\lambda f \in R_a^b$ und $\lambda \int_a^b f = \int_a^b \lambda f$.

(I4) ist klar (vgl. Satz VI.1.6). ■

Bemerkung VI.1.9. Es gilt $\int_a^a f = 0$ für alle Funktionen

$$f : [a,a] = \{a\} \to \mathbb{R},$$

denn für alle Treppenfunktionen $\psi \in T_a^a$ ist $\int_a^a \psi = 0$. ■

Satz VI.1.10. *Stetige Funktionen und monotone Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ sind Riemann-integrabel.*

Beweis. (a) Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f nach Satz IV.1.12 beschränkt. Nach Folgerung VI.1.4 existieren zu jedem $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T_a^b$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\psi - \varphi = \frac{\varepsilon}{b-a}$. Dann ist aber $\int_a^b \psi - \varphi = \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon(b-a)}{b-a} = \varepsilon$, und somit $f \in R_a^b$.

(b) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monoton wachsend. Wegen $f(x) \in [f(a), f(b)]$ für $x \in [a,b]$ ist f beschränkt. Sei o.B.d.A. $f(a) \neq f(b)$ (sonst ist f konstant und die Behauptung trivial). Wir wählen eine Zerlegung $Z = (z_0, z_1, \ldots, z_n)$ von $[a,b]$ mit $z_k - z_{k-1} < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ für $k = 1, 2, \ldots, n$. Nun definieren wir zwei Treppenfunktionen φ und $\psi \in T_a^b$ durch $\varphi(x) := f(z_k)$ bzw. $\psi(x) := f(z_{k+1})$ für $x \in [z_k, z_{k+1}[$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ und $\varphi(b) = \psi(b) = f(b)$. Dann ist offensichtlich $\varphi \leq f \leq \psi$, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_a^b \psi - \varphi \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (f(z_{k+1}) - f(z_k))\,(z_{k+1} - z_k) \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} (f(z_{k+1}) - f(z_k))\,\frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \\
&= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}\,(f(z_n) - f(z_{n-1}) + f(z_{n-1}) - f(z_{n-2}) + \ldots + f(z_1) - f(z_0)) \\
&= \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}\,(f(b) - f(a)) \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

und damit ist f Riemann-integrabel. Für monoton fallendes f geht man zu $-f$ über und beachtet, dass R_a^b ein Vektorraum ist. ∎

Aufgabe VI.1. Für $x \in \mathbb{R}$ definiren wir $x_+ := \max(x, 0)$ und $x_- := x_+ - x \geq 0$. Dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ die Beziehung

$$x_+ \leq y_+ \quad \text{und} \quad y_- \leq x_-.$$ ∎

Lemma VI.1.11. *Für $f, g \in R_a^b$ sind die Funktionen*

$$f_+ := \max(f, 0), \quad f_- := \max(-f, 0), \quad \max(f,g), \quad \min(f,g) \quad \textit{und} \quad |f|$$

integrabel.

Beweis. Es ist $f_- = f_+ - f$, $|f| = f_+ + f_-$, $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|$ sowie $\min(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|$. Wegen Satz VI.1.8 reicht es aus, die Integrabilität von f_+ zu zeigen.

Dazu seien zwei Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T_a^b$ gegeben, für die $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\int_a^b \psi - \varphi < \varepsilon$ gilt. Dann gelten auch $\varphi_+ \leq f_+ \leq \psi_+$ und

$$\int_a^b \psi_+ - \varphi_+ \leq \int_a^b \psi - \varphi < \varepsilon,$$

da $\psi_+ - \varphi_+ \leq \psi - \varphi$ aus $\psi_+ - \psi = \psi_- \leq \varphi_- = \varphi_+ - \varphi$ folgt (Aufgabe VI.1). ∎

Satz VI.1.12. (Dreiecksungleichung) *Für* $a \leq b$ *und* $f \in R_a^b$ *gilt*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|.$$

Beweis. Aus Lemma VI.1.11 erhalten wir $|f| \in R_a^b$. Weiter ist $-|f| \leq f \leq |f|$, also wegen der Monotonie des Integrals $-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. Hieraus folgt $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$. ∎

Lemma VI.1.13. *Für* $f, g \in R_a^b$ *ist auch* $f \cdot g \in R_a^b$.

Beweis. Wegen $f \cdot g = \frac{1}{2}(f+g)^2 - \frac{1}{2}f^2 - \frac{1}{2}g^2$ haben wir wegen (I3) nur $f^2 \in R_a^b$ zu zeigen. Wegen $|f| \in R_a^b$ (Lemma VI.1.11) und $f^2 = |f|^2$ dürfen wir sogar $f \geq 0$ annehmen.

Sei $\varepsilon > 0$ und $M := \sup f([a,b])$. Dann existieren $\varphi, \psi \in T_a^b$ mit $0 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq M$ und $\int_a^b (\psi - \varphi) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$. In der Tat finden wir zunächst $\varphi_0, \psi_0 \in T_a^b$ mit $\varphi_0 \leq f \leq \psi_0$ und $\int_a^b (\psi_0 - \varphi_0) \leq \frac{\varepsilon}{2M}$. Dann setzen wir $\varphi := \max(0, \varphi_0)$ und $\psi := \min(f, \psi_0)$ und erhalten $\varphi_0 \leq \varphi \leq f \leq \psi \leq \psi_0$.

Damit sind $\varphi^2, \psi^2 \in T_a^b$, $\varphi^2 \leq f^2 \leq \psi^2$ und

$$\int_a^b \psi^2 - \varphi^2 = \int_a^b \underbrace{(\psi + \varphi)}_{\leq 2M}(\psi - \varphi) \leq \int_a^b 2M(\psi - \varphi) \leq 2M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Also ist $f^2 \in R_a^b$. ∎

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Satz VI.1.14. (Mittelwertsatz der Integralrechnung) *Sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig und* $g \in R_a^b$ *sowie* $g \geq 0$. *Dann existiert ein* $\xi \in [a,b]$ *mit*

$$\int_a^b f \cdot g = f(\xi) \cdot \int_a^b g.$$

Für $g = 1$ *folgt insbesondere*

$$\int_a^b f = f(\xi) \cdot (b - a)$$

für ein $\xi \in [a,b]$.

Beweis. Sei $m = \min f([a,b])$ und $M = \max f([a,b])$. Wegen $g \geq 0$ ist dann $mg \leq fg \leq Mg$, also $m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g$. Beachte hierbei, dass $\int_a^b fg$ wegen Lemma VI.1.13 existiert. Wenden wir jetzt den Zwischenwertsatz auf die stetige Funktion $F(x) := f(x)\int_a^b g$ an. Da F die beiden Werte $m\int_a^b g$ und $M\int_a^b g$ annimmt, existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit $f(\xi)\int_a^b g = \int_a^b fg$. ∎

VI.2. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Dieser Satz wird zeigen, dass Ableiten und Integrieren zueinander inverse Operationen sind. In diesem Abschnitt sei D ein Intervall, das mehr als einen Punkt enthält.

Definition VI.2.1. Eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ heißt eine *Stammfunktion* von $f : D \to \mathbb{R}$, wenn F differenzierbar ist und $F' = f$ gilt. ■

Beachte: Sind F_1 und F_2 Stammfunktionen von f, so ist $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$, also ist $F_1 - F_2$ konstant (vgl. Folgerung V.2.3).

$\boxed{\text{Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung}}$

Satz VI.2.2. *Ist $a \in D$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so ist die Funktion*

$$F\colon x \mapsto \int_a^x f$$

eine Stammfunktion von f auf D. Ist umgekehrt F eine Stammfunktion von f auf D, so gilt für alle $x \in D$:

$$\int_a^x f = F(x) - F(a) =: [F]_a^x.$$

Beweis. Für $x, x+h \in D$ ist nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz VI.1.14)

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f = f(x + \theta_h h)$$

für ein $\theta_h \in [0,1]$. Folglich ist

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Daher ist F eine Stammfunktion zu f. Ist $\widetilde{F}$ eine weitere Stammfunktion zu f, so ist $\widetilde{F} - F$ konstant, also

$$\widetilde{F}(x) - \widetilde{F}(a) = F(x) - F(a) = \int_a^x f. \qquad ■$$

Bemerkung: Alternativ kann man den Hauptsatz auch direkt, also ohne den Mittelwertsatz beweisen. Sei dazu $x \in D$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert zunächst ein $\delta > 0$, so dass $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ für $|x - y| \leq \delta$ gilt. Für $|h| \leq \delta$ ergibt sich damit

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f - \int_a^x f\right) + f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\, dt,$$

und daher

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \frac{1}{|h|}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt \leq \frac{1}{|h|}\varepsilon|h| = \varepsilon.$$

Damit haben wir

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

gezeigt. ■

Der wesentliche Vorteil des Hauptsatzes ist, dass er uns ein Mittel in die Hand gibt, um Integrale wirklich auszurechnen, indem wir eine Stammfunktion bestimmen. In der Regel ist das technisch einfacher als direkt zu integrieren.

Bemerkung VI.2.3. (Unbestimmte Integrale) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit mindestens zwei Punkten. Auf der Menge $C(D)$ der stetigen Funktionen $D \to \mathbb{R}$ definieren wir eine Äquivalenzrelation durch

$$F \sim G :\Longleftrightarrow F - G \quad \text{ist konstant.}$$

Wir schreiben $[F] := \{G : G \sim F\}$ für die Äquivalenzklasse der Funktion F, d.h. für die Menge der Funktionen der Gestalt $F + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ist F differenzierbar, so sind alle zu F äquivalenten Funktionen G differenzierbar mit $F' = G'$.

Ist umgekehrt $f : D \to \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f, so definieren wir das *unbestimmte Integral*

$$\int f(x)\ dx := [F] = \{F + c : c \in \mathbb{R}\}.$$

Ein unbestimmtes Integral ist also eine Menge von Funktionen und **keine Funktion**. Die Bezeichnung wird dadurch gerechtfertigt, dass

$$F(b) - F(a) = [F]_a^b = \int_a^b f(x)\ dx$$

für alle $a, b \in D$ gilt (Satz VI.2.2) und nicht von der Wahl des speziellen Repräsentanten F in der Äquivalenzklasse $[F]$ abhängt. ■

Beispiel VI.2.4. (a) Für eine Polynomfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot x^k$ ist

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$$

eine Stammfunktion.

(b) Für $f = \exp$ ist $F = \exp$ eine Stammfunktion.

(c) Sei $-1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Für $f :]0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto x^\alpha$ ist $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ eine Stammfunktion. Ist $\alpha = -1$ und $f :]0,\infty[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{1}{x}$, so ist $F(x) = \log x$ eine Stammfunktion. Speziell ist für alle $x \geq 1$:

$$\int_1^x \frac{1}{t}\, dt = \log x - \log 1 = \log x. \qquad \blacksquare$$

Jede Regel der Differentialrechnung zieht eine Regel der Integralrechnung nach sich. Aus der Kettenregel wird so die Transformationsformel:

TRANSFORMATIONSFORMEL/SUBSTITUTIONSREGEL

Satz VI.2.5. *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $\varphi : [a,b] \to D$ stetig differenzierbar, so ist $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ Riemann-integrabel und es gilt*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du.$$

Beweis. Zuerst bemerken wir, dass die stetige Funktion $(f \circ \varphi)\varphi'$ nach Lemma VI.1.13 auf $[a,b]$ integrabel ist. Wir betrachten die Funktionen

$$F : D \to \mathbb{R},\ F(x) = \int_{\varphi(a)}^{x} f(u)\ du \quad \text{und} \quad G : [a,b] \to \mathbb{R},\ G(t) = F(\varphi(t)).$$

Nach dem Hauptsatz ist F differenzierbar mit $F' = f$ und nach der Kettenregel ist G differenzierbar mit $G'(t) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, d.h., G ist eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi)\varphi'$. Folglich ist

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = G(b) - G(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)du. \qquad \blacksquare$$

Beispiel VI.2.6. Gesucht ist für $y > 0$ das Integral $\int_0^y x\sqrt{1+x}\ dx$. Zuerst stellen wir fest, dass der Integrand stetig ist und das Integral daher definiert ist. Wir setzen $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$, d.h. $x = \varphi(x)^2 - 1$. Nach der Kettenregel gilt $\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\varphi(x)}$. Somit können wir rechnen:

$$\begin{aligned}
&\int_0^y x\sqrt{1+x}\ dx \\
&= \int_0^y \big(\varphi(x)^2 - 1\big)\,\varphi(x)\ dx = \int_0^y \big(\varphi(x)^2 - 1\big)\,\varphi(x) \cdot \underbrace{2\varphi(x)\varphi'(x)}_{=1}\ dx \\
&= \int_{\varphi(0)}^{\varphi(y)} (u^2-1)2u^2\ du = 2\int_1^{\sqrt{1+y}} u^4 - u^2\ du = 2\Big[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3}\Big|_1^{\sqrt{1+y}} \\
&= \frac{2}{5}(1+y)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Indem man den Kalkül der unbestimmten Integrale verwendet, lassen sich Stammfunktionen oft direkt bestimmen. Für das obige Beispiel geht man hier wie folgt vor.

Gesucht ist das unbestimmte Integral $\int x\sqrt{1+x}\ dx$ auf $D =]0,\infty[$. Mit

$$u = \sqrt{1+x}, \qquad x = u^2 - 1$$

erhalten wir

$$\frac{dx}{du} = 2u$$

und daher haben wir im Sinne unbestimmter Integrale

$$\int x\sqrt{1+x}\ dx = \int (u^2-1)u\frac{dx}{du}\ du$$
$$= \int (u^2-1)2u^2\ du = \left[\tfrac{2}{5}u^5 - \tfrac{2}{3}u^3\right] = \left[\tfrac{2}{5}(\sqrt{1+x})^5 - \tfrac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3\right].$$

Wir erkennen nun, dass durch

$$F(x) := \tfrac{2}{5}(\sqrt{1+x})^5 - \tfrac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3$$

auf $]0,\infty[$ eine Stammfunktion von $f(x) = x\sqrt{1+x}$ gegeben ist und können jedes Integral leicht durch Einsetzen der Grenzen berechnen:

$$\int_0^y x\sqrt{1+x}\ dx = F(y) - F(0) = \tfrac{2}{5}(1+y)^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{3}(1+y)^{\frac{3}{2}} - \left(\tfrac{2}{5} - \tfrac{2}{3}\right).$$

Man beachte, dass die Rechnungen in beiden Fällen sinngemäß die gleichen waren, aber dass man auf der Ebene der unbestimmten Integrale mit den formalen Regeln

$$dx = \frac{dx}{du}du \quad \text{bzw.} \quad du = \frac{du}{dx}dx,$$

die der Substitutionsregel entsprechen, leichter rechnen kann. ■

Anwendungen der Transformationsformel: Es gelten

- $\int_a^b f(t+c)\,dt = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\ dx$ (setze $\varphi(t) = t+c$)
- $c\int_a^b f(ct)\,dt = \int_{ca}^{cb} f(x)\ dx$ (setze $\varphi(t) = ct$)
- $\int_a^b t^{n-1}f(t^n)\,dt = \dfrac{1}{n}\int_{a^n}^{b^n} f(x)\ dx$ (setze $\varphi(t) = t^n$). ■

Lemma VI.2.7. *Ist $f : [a, b] \to f([a, b])$ streng monoton und differenzierbar, so existiert auf $f([a, b])$ die inverse Funktion $f^{-1} : f([a, b]) \to [a, b]$, und es gilt:*

$$\int_a^b f + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1} = b \cdot f(b) - a \cdot f(a).$$

Beachte, dass f und f^{-1} beide stetig und monoton sind, also auf $[a, b]$ bzw. auf $f([a, b])$ integrierbar.

Beweis. Wir setzen

$$g(x) := \int_a^x f + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1} \quad - x \cdot f(x) + a \cdot f(a).$$

Dann ist nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} g'(x) &= f(x) + f^{-1}(f(x)) \cdot f'(x) - 1 \cdot f(x) - x \cdot f'(x) \\ &= f(x) + xf'(x) - f(x) - xf'(x) = 0. \end{aligned}$$

Daher ist g konstant, also $g(b) = g(a) = 0$. ∎

$\boxed{\text{Partielle Integration}}$

Satz VI.2.8. *Sind $f, g \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so gilt*

$$\int_a^b f(t)g'(t)\, dt = \big[f \cdot g\big]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\, dt.$$

Beweis. Die Funktion $h := f \cdot g$ ist Stammfunktion von $f \cdot g' + f' \cdot g$. Also gilt

$$\int_a^b (f \cdot g' + f' \cdot g) = h(b) - h(a) = \big[f \cdot g\big]_a^b. \qquad ∎$$

Beispiel VI.2.9. (a) Für $g(x) = x$ erhält man $\int_a^b f = \big[f \cdot x\big]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot x\, dx$. Speziell ergibt sich für $f = \log$ auf $D =]0, \infty[$:

$$\begin{aligned} \int_a^b \log x\ dx &= \big[x \cdot \log x\big]_a^b - \int_a^b \log'(x) \cdot x\ dx \\ &= \big[x \cdot \log x\big]_a^b - \int_a^b \tfrac{x}{x}\ dx = \big[x \cdot \log x\big]_a^b - (b - a) \\ &= \big[x \cdot \log x - x\big]_a^b, \end{aligned}$$

d.h. $x \mapsto x \log x - x$ ist eine Stammfunktion des Logarithmus.

Mit unbestimmten Integralen berechnet man dies wie folgt:

$$\int \log x\ dx = [x \log x] - \int \log'(x) x\ dx = [x \log x] - \int 1 dx = [x \log x - x].$$

Man beachte, dass man hierbei mit Klassen von Funktionen rechnet.

(b) Sei

$$A_m(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} A_m(x) &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^m}\right]_0^x + \int_0^x \frac{t \cdot 2t \cdot m}{(1+t^2)^{m+1}}\, dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2m \int_0^x \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{m+1}}\, dt \\ &= \frac{x}{(1+x^2)^m} + 2mA_m(x) - 2mA_{m+1}(x). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich eine Rekursionsformel zur Berechnung dieser Integrale:

$$A_{m+1}(x) = \frac{2m-1}{2m} A_m(x) + \frac{x}{2m(1+x^2)},$$

wobei

$$A_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)} = \arctan(x) - \arctan(0) = \arctan(x)$$

ist (vgl. Bemerkung V.4.16(5)). ■

VI.3. Integrale und Funktionenfolgen

Beispiel VI.3.1. Wir betrachten wieder die Funktionenfolge

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x, & \frac{1}{n} < x \le \frac{2}{n} \\ 0, & x > \frac{2}{n}. \end{cases}$$

Wir wollen diese Funktionen integrieren.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n &= \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 x\, dx + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} n^2 (\tfrac{2}{n} - x)\, dx = n^2 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{n}} + n^2 \left[-\tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{n} - x)^2\right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} \\ &= n^2 \frac{1}{2n^2} + n^2 \frac{1}{2n^2} = 1 \ \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Andererseits ist $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ (vgl. Beispiel IV.2.2). Im allgemeinen gilt also

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n \neq \lim_{n\to\infty} \int f_n.$$ ■

Vertauschen von Grenzübergang und Integral

Satz VI.3.2. *Konvergiert die Funktionenfolge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *gleichmäßig gegen* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *und sind alle Folgenglieder* f_n *integrabel, so ist auch* f *integrabel und*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ und

$$\|f_n - f\|_{[a,b]} = \sup_{a\leq x\leq b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für $n > N_\varepsilon$ (gleichmäßige Konvergenz). Da f_n integrabel ist, existieren $\psi_n, \varphi_n \in T_a^b$ mit $\varphi_n \leq f_n \leq \psi_n$ und $\int_a^b \psi_n - \varphi_n < \varepsilon$. Dann ist auch

$$\varphi_n - \varepsilon \leq f_n - \varepsilon \leq f \leq f_n + \varepsilon \leq \psi_n + \varepsilon.$$

Weiter gilt

$$\int_a^b (\psi_n + \varepsilon) - (\varphi_n - \varepsilon) = 2\varepsilon(b-a) + \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) \leq 2\varepsilon(b-a) + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist daher $f \in R_a^b$. Aus $\|f_n - f\|_{[a,b]} \leq \varepsilon$ folgt weiter mit Satz VI.1.12:

$$\left| \int_a^b f - \int_a^b f_n \right| \leq \int_a^b |f - f_n| \leq \varepsilon(b-a).$$

Hieraus schließen wir $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f$. ■

Vertauschen von Grenzübergang und Ableitung

Satz VI.3.3. *Sei* $D \subseteq \mathbb{R}$ *ein Intervall und* $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen.*

(1) *Für einen Punkt* $p \in D$ *sei die Folge* $\big(f_n(p)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent und*

(2) *die Folge* $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ *sei gleichmäßig konvergent.*

Dann konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *punktweise gegen eine stetig differenzierbare Funktion* $f\colon D \to \mathbb{R}$, *und es gilt*

$$f' = \big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

Beweis. Für $x \in D$ gilt erhalten wir aus dem Hauptsatz $f_n(x) = f_n(p) + \int_p^x f_n'(t)\,dt$. Also existiert

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(p) + \lim_{n\to\infty} \int_p^x f_n'(t)\,dt = f(p) + \int_p^x \big(\lim_{n\to\infty} f_n'\big)(t)\,dt$$

nach Satz VI.3.2. Daher existiert $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ punktweise. Da $\lim_{n\to\infty} f_n'$ nach Satz IV.2.12 stetig ist, ist f nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung differenzierbar mit Ableitung $f' = \lim_{n\to\infty} f_n'$. ■

Bemerkung VI.3.4. (a) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus dem vorigen Satz konvergiert auf jedem Intervall der Gestalt $[a,b] \subseteq D$ gleichmäßig, denn für jedes $x \in [a,b]$ gilt

$$\begin{aligned}
&|f(x) - f_n(x)| \\
\leq\ & |f(p) - f_n(p)| + \Big|\int_p^x f' - f_n'\Big| \leq |f(p) - f_n(p)| + |x-p| \cdot \|f' - f_n'\|_D \\
\leq\ & |f(p) - f_n(p)| + \max(|b-p|, |a-p|) \cdot \|f' - f_n'\|_D.
\end{aligned}$$

(b) Die Voraussetzung des Satzes sind nicht überflüssig, denn die Folge $f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx)$ konvergiert auf $D = \mathbb{R}$ gleichmäßig gegen 0, aber die Folge $f_n'(x) = \cos(nx)$ der Ableitungen nicht. Es ist also

$$\big(\lim_{n\to\infty} f_n\big)' = 0 \neq \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

■

Ableitung und Integration von Potenzreihen

Ist $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-p)^n$ eine reelle Potenzreihe, so heißt die Reihe

$$\sum_{n=0}^\infty n \cdot a_n(x-p)^{n-1} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{n=0}^\infty \frac{a_n(x-p)^{n+1}}{n+1}$$

ihre *formale Ableitung* bzw. ihr *formales Integral*.

Satz VI.3.5. (a) *Die formale Ableitung und das formale Integral einer Potenzreihe haben den gleichen Konvergenzradius R wie sie selbst.*

(b) *Ist*

$$f(x) := \sum_{k=0}^\infty a_k(x-p)^k \quad \text{für} \quad |x-p| < R,$$

so ist $f :]p-R, p+R[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \sum_{k=0}^\infty k \cdot a_k(x-p)^{k-1};$$

ferner ist

$$F(x) := \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k(x-p)^{k+1}}{k+1}$$

auf $]p-R, p+R[$ eine Stammfunktion von f.

Beweis. Nach der Formel von Hadamard ist

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Für $x \neq p$ haben wir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n = (x-p)\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^{n-1} = (x-p)\sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1}(x-p)^n.$$

Also haben die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-p)^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(x-p)^n$ den gleichen Konvergenzradius und die Hadamardsche Formel liefert

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|}} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+2}|}} = \cdots = \frac{1}{\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_{n+k}|}}$$

für all $k \in \mathbb{N}$. Da wir aus Lemma III.4.10 die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}$$

kennen, erhalten wir

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\cdot|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\cdot \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}.$$

Aus obigen Vorüberlegungen schließen wir nun, dass die formale Ableitung und das formales Integral beide den Konvergenzradius R besitzen.

Ist $r < R$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-p)^k$ gleichmäßig für $|x-p| \leq r$ (Satz IV.2.17). Nach Satz VI.3.2 gilt also für $|x-p| < R$:

$$\begin{aligned}\int_p^x f(t)\,dt &= \int_p^x \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t-p)^k\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\int_p^x a_k(t-p)^k\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k(x-p)^{k+1}}{k+1} = F(x).\end{aligned}$$

Damit ist das formale Integral F eine Stammfunktion von f auf $]\,p-R, p+R\,[$. Ist $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot a_n(x-p)^{n-1}$ die Funktion auf $]\,p-R, p+R\,[$, die wir durch die Konvergenz der formalen Ableitung der Potenzreihe von f erhalten, so folgt wie oben, dass f eine Stammfunktion von g ist, d.h. $f' = g$. ∎

Folgerung: Wird die Funktion f auf dem Intervall $]p-R, p+R[$ durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt, so ist sie dort beliebig oft differenzierbar. ∎

Bemerkung VI.3.6. (1) Für $|x| < 1$ gilt

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}.$$

Nach Satz VI.3.5 erhalten wir für $|x| < 1$ die Reihenentwicklung der Arcustangensfunktion

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}.$$

Nach dem Leibnizkriterium ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ konvergent. Mit dem Abelschen Grenzwertsatz kann man sogar zeigen, dass

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \lim_{x \to 1} \arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \cdots .$$

(2) Für $|x| < 1$ ist

$$\log'(1+x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n.$$

Analog zu (1) folgt für $|x| < 1$:

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n.$$

Insbesondere erhalten wir mit dem Leibnizkriterium und dem Abelschen Grenzwertsatz die Beziehung

$$\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \cdots . \qquad \blacksquare$$

VII. Taylorreihen

In diesem Kapitel werden wir eine Methode kennenlernen, die es erlaubt, differenzierbare Funktionen lokal durch Polynome zu approximieren. Im gleichen Sinne wie die Differenzierbarkeit einer Funktion es erlaubt, sie lokal durch eine affine Funktion anzunähern, werden wir sehen, dass die n-malige Differenzierbarkeit die lokale Approximierbarkeit durch Polynome n-ten Grades liefert. Die Methoden dieses Abschnitts sind eine zentrale Grundlage für viele Anwendungen der Analysis, insbesondere in der Physik, da sie es erlauben, mit Näherungen zu rechnen, wenn die exakten Formeln zu kompliziert werden.

In diesem Abschnitt steht D immer für ein Intervall in $\mathbb{R}$, das mindestens zwei Punkte enthält.

VII.1. Taylorentwicklung

Um die Grundidee der Taylorentwicklung zu verstehen, betrachten wir zunächst eine Polynomfunktion $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-p)^k$ auf $\mathbb{R}$. Durch m-faches Ableiten erhalten wir

$$\begin{aligned} f^{[m]}(x) &= \sum_{k=0}^n a_k \cdot k(k-1)(k-2)\cdots(k-m+1)\cdot(x-p)^{k-m} \\ &= \sum_{k=m}^n a_k \binom{k}{m} m! \cdot (x-p)^{k-m}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist $f^{[m]}(p) = a_m \cdot m!$. Daher ist

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{[k]}(p)}{k!}(x-p)^k. \tag{1.1}$$

Diese Formel zeigt insbesondere, dass jedes Polynom vom Grade $\leq n$ eindeutig durch seine Ableitungen bis zur Ordnung n im Punkte p bestimmt ist.

Beachte: Dass wir das Polynom f direkt in der Gestalt $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-p)^k$ geschrieben haben, stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar. Denn ist zunächst $f(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n b_k\big((x-p)+p\big)^k = \sum_{k=0}^n b_k \sum_{j=0}^k \binom{k}{j}(x-p)^j \cdot p^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^n \left(\sum_{k=0}^n b_k \binom{k}{j} p^{k-j}\right)(x-p)^j. \end{aligned}$$

Jedes Polynom in x lässt sich also auch als Polynom in $x-p$ schreiben. ∎

In diesem Abschnitt werden wir uns mit dem Problem beschäftigen, zu einer n-mal differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ein Polynom vom Grade n zu finden, das sich in einem Punkt $p \in D$ möglichst gut an f anschmiegt. Die Formel (1.1) zeigt uns, wie wir das zu tun haben.

Definition VII.1.1. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine n-mal differenzierbare Funktion und $p \in D$. Dann heißt

$$T_p^n(f)(t) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{[k]}(p)}{k!} t^k$$

das *n-te Taylorpolynom von f bei p*. Ist f in einer Umgebung von p beliebig oft differenzierbar, so heißt die Potenzreihe

$$T_p^\infty(f)(t) := \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{[k]}(p)}{k!} t^k$$

die *Taylorreihe von f bei p*. ∎

Bemerkung VII.1.2. Das n-te Taylorpolynom $T_p^n(f)$ ist das eindeutig bestimmte Polynom vom Grad $\leq n$ mit

$$T_p^n(f)^{[k]}(0) = f^{[k]}(p) \quad \text{für } k = 0, \ldots, n.$$

Dies bedeutet, dass die Ableitungen bis zur Ordnung n des Restgliedes

$$r_n \colon x \mapsto f(x) - T_p^n(f)(x-p)$$

in p verschwinden. Für $n = 1$ ist

$$T_p^1(f)(x) = f(p) + (x-p) \cdot f'(p)$$

insbesondere diejenige affine Funktion, die sich in p am besten an f in dem Sinne anschmiegt, dass sie in p den gleichen Wert und die gleichen Ableitungen bis zur Ordnung n besitzt. ∎

Definition VII.1.3. $r_n(x) := f(x) - T_p^n(f)(x-p)$ heißt das *n-te Restglied von f bei p*. Beachte, dass für $k = 0, \ldots, n$ die Beziehung $r_n^{[k]}(p) = 0$ gilt. ■

Satz von Taylor—Taylorformel

Satz VII.1.4. *Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und f eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ sowie $p, x \in D$. Dann gilt*

$$f(x) = T_p^n(f)(x-p) + r_n(x) \quad \textit{mit} \quad r_n(x) = \frac{1}{n!} \int_p^x (x-t)^n \cdot f^{[n+1]}(t)\,dt.$$

Beweis. Es ist nur die Integraldarstellung des Restglieds $r_n(x)$ zu beweisen. Zunächst ist $r_n^{[k]}(p) = 0$ für $k = 0, \ldots, n$, und wegen $\big(T_p^n\big)^{[n+1]} \equiv 0$ ist $r_n^{[n+1]} = f^{[n+1]}$. Wir berechnen das Integral durch partielle Integration:

$$\begin{aligned} \int_p^x (x-t)^n f^{[n+1]}(t)\,dt &= \int_p^x (x-t)^n r_n^{[n+1]}(t)\,dt \\ &= \Big[(x-t)^n \cdot r_n^{[n]}(t)\Big]_p^x + \int_p^x n(x-t)^{n-1} r_n^{[n]}(t)\,dt. \end{aligned}$$

Ist $n > 0$, so ist $(x-x)^n = 0$ und $r_n^{[n]}(p) = 0$, also

$$\int_p^x (x-t)^n r_n^{[n+1]}(t)\,dt = n \int_p^x (x-t)^{n-1} r_n^{[n]}(t)\,dt.$$

Induktiv erhalten wir:

$$\int_p^x (x-t)^n \cdot r_n^{[n+1]}(t)\,dt = n! \int_p^x r_n'(t)\,dt = n!\big(r_n(x) - r_n(p)\big) = n! r_n(x).$$ ■

Bemerkung VII.1.5. Für $n = 0$ liefert der Taylorsche Satz VII.1.4

$$f(x) = f(p) + \int_p^x f'(t)\,dt,$$

was wir schon aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kennen. ■

Die einfachste Darstellung des Restglieds ist die folgende. Sie ist für viele Abschätzungen sehr wichtig.

Restgliederdarstellung nach Lagrange

Satz VII.1.6. *Mit den Bezeichnungen und Voraussetzungen aus* VII.1.4 *existiert ein ξ zwischen x und p mit*

$$r_n(x) = \frac{(x-p)^{n+1}}{(n+1)!} f^{[n+1]}(\xi).$$

Beweis. Sei zunächst $p \leq x$. Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung VI.1.14 existiert ein $\xi \in [p, x]$ mit

$$\begin{aligned} r_n(x) &= \frac{1}{n!} \int_p^x \underbrace{(x-t)^n}_{\geq 0} f^{[n+1]}(t)\, dt = f^{[n+1]}(\xi) \cdot \frac{1}{n!} \int_p^x (x-t)^n\, dt \\ &= f^{[n+1]}(\xi) \cdot \frac{(x-p)^{n+1}}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

Für $x < p$ ist $(t-x)^n \geq 0$ und somit der Mittelwertsatz der Integralrechnung auch anwendbar. ■

Beachte: Das Lagrange-Restglied hat dieselbe Gestalt wie alle anderen Glieder des Taylorpolynoms, nur dass $f^{[n+1]}$ nicht an p sondern in ξ ausgewertet wird.

Bemerkung VII.1.7. Unter den Voraussetzungen von Satz VII.1.4 folgt direkt aus Satz VII.1.6 wegen der Stetigkeit von $f^{[n+1]}$ in p:

$$\lim_{x \to p} \frac{r_n(x)}{(x-p)^{n+1}} = \frac{f^{[n+1]}(p)}{(n+1)!}.$$

Die Abbildung

$$\psi(x) := \begin{cases} \dfrac{r_n(x)}{(x-p)^{n+1}}, & \text{falls } x \neq p \\ \dfrac{f^{[n+1]}(p)}{(n+1)!}, & \text{falls } x = p \end{cases}$$

ist also stetig und es gilt

$$f(x) = T_p^n(f)(x-p) + (x-p)^{n+1}\psi(x).$$

Beachte, dass dies für $n = 1$ analog zur Definition der Differenzierbarkeit ist (vgl. Lemma V.1.5). ■

Der folgende Satz ist eine Verschärfung der Restgliederdarstellung von Lagrange, denn hier wird $f^{[n+1]}$ nicht als stetig vorausgesetzt und θ_x liegt im offenen Intervall $]\,0, 1\,[$.

Satz VII.1.8. (Verschärfte Restglieddarstellung von Lagrange) *Die Funktion f sei im Intervall $[p, p+x]$ mindestens $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann existiert ein $\theta_x \in \,]0,1[$ mit*

$$f(p+x) = T_p^n(f)(x) + \frac{f^{[n+1]}(p+\theta_x \cdot x)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Beweis. Wir wenden den allgemeinen Mittelwertsatz (Satz V.3.1) mit

$$r(x) = f(x+p) - T_p^n(f)(x) \qquad \text{und} \qquad g(x) = x^{n+1}$$

an. Wir erhalten hiermit induktiv

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{x^{n+1}} &= \frac{r'(\theta_1 x)}{(n+1)(\theta_1 x)^n} = \frac{r''(\theta_1\theta_2 x)}{(n+1)n(\theta_1\theta_2 x)^{n-1}} \\ &= \ldots = \frac{r^{[n+1]}(\theta_1 \ldots \theta_{n+1} x)}{(n+1)!} = \frac{f^{[n+1]}(p+\theta_x \cdot x)}{(n+1)!} \end{aligned}$$

mit $\theta_x := \theta_1 \cdots \theta_{n+1} \in \,]0,1[$. ■

Beispiel VII.1.9. Die Taylorentwicklung kann man insbesondere zur effizienten Berechnung von Grenzwerten verwenden. Wir diskutieren hierzu ein Beispiel. Gesucht sei $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Setze $f(x) := 1 - \cos x$. Dann ist $f(0) = 0 = f'(0)$ und $f''(0) = \cos 0 = 1$. Es folgt $f(x) = 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 + x^3 \cdot \psi(x)$ mit einer stetigen Funktion ψ (Folgerung VII.1.7). Also ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to 0} x\psi(x) = \frac{1}{2} + 0 \cdot \psi(0) = \frac{1}{2}$$ ■

Das Konvergenzverhalten von Taylorreihen ist in der Regel **sehr schlecht**. Ist f in einer Umgebung von p beliebig oft differenzierbar, so muß die Taylorreihe

$$\big(T_p^\infty f\big)(x-p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{[k]}(p)}{k!}(x-p)^k$$

trotzdem nicht konvergieren. Und wenn sie konvergiert, so *muß sie nicht gegen $f(x)$ konvergieren!* Man betrachte hierzu die Taylorreihe $T_0^\infty(f)$ der Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ aus Bemerkung V.2.10. In diesem Fall verschwindet die Taylorreihe, aber trotzdem ist $f(x) > 0$ für alle $x > 0$. Der folgende Satz von Borel zeigt sogar, dass jede Folge als Koeffizientenfolge einer Taylorreihe auftreten kann.

Satz von Borel: *Für jede Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f^{[n]}(0) = n!a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.* ■

Für den Beweis verweisen wir auf Satz 4.5 in Th. Bröcker's „Analysis I". Der folgende Satz zeigt wenigstens, dass Funktionen, die durch konvergente Potenzreihen dargestellt werden, mit ihrer Taylorreihe übereinstimmen.

Satz VII.1.10. *Ist f in einer Umgebung von p durch eine konvergente Potenzreihe dargestellt, so stimmt diese mit der Taylorreihe von f in p überein.*

Beweis. Ist $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-p)^k$ für $|x-p| < r$, so ist gemäß Satz VI.3.5:

$$f^{[n]}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdots (k-n+1) \cdot (x-p)^{k-n},$$

also $f^{[n]}(p) = n!\, a_n$ und somit $a_n = \frac{f^{[n]}(p)}{n!}$. ■

Satz VII.1.11. *Sei f auf D beliebig oft differenzierbar und $M > 0$ mit*

$$\sup_{x \in D} |f^{[n]}(x)| \leq M \quad \textit{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt

$$f(x) = T_p^{\infty}(f)(x-p)$$

für alle $x \in D$, d.h., f wird durch seine Taylorreihe dargestellt.

Beweis. Mit Satz VII.1.6 erhalten wir

$$|r_n(x)| = \frac{|x-p|^{n+1}}{(n+1)!} \left| f^{n+1}(\xi) \right| \leq M \cdot \frac{|x-p|^{n+1}}{(n+1)!} \to 0,$$

da $e^{|x-p|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |x-p|^n$ konvergiert. Also gilt

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} T_p^n(f)(x-p) = T_p^{\infty}(f)(x-p).$$ ■

Beispiel VII.1.12. (1) Für $f(x) = \cos(x)$ gilt

$$f^{[4n]}(x) = \cos x, \quad f^{[4n+1]}(x) = \sin x$$

und

$$f^{[4n+2]}(x) = -\cos x \quad \text{und} \quad f^{[4n+3]}(x) = -\sin x.$$

Die Voraussetzungen von Satz VII.1.11 sind also erfüllt, und wir haben für alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = T_0^{\infty}(\cos)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{[n]}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^{[2n]}(0)}{2n!} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}.$$

(2) Analog deutet man die Reihenentwicklung der Sinusfunktion:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$ ■

Satz VII.1.13. (Die binomische Reihe) *Für $|x| < 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt*

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \textit{mit} \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

Beweis. Für $a_k := \binom{\alpha}{k}x^k$ ist $a_{k+1} = \frac{\alpha-k}{k+1}xa_k$. Wegen $\left|\frac{\alpha-k}{k+1}x\right| \to |x| < 1$ folgt die Konvergenz der Reihe aus dem Quotientenkriterium. Wir setzen $f(x) := \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$ für $|x| < 1$. Dann ist f gliedweise differenzierbar (Satz VI.3.5), also gilt

$$\begin{aligned}
(1+x)\cdot f'(x) &= (1+x)\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}k\cdot x^{k-1}\\
&= (1+x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{(k-1)!}x^{k-1}\\
&= \alpha(1+x)\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k-1}x^{k-1}\\
&= \alpha\left(\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k}x^k + \sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{k-1}x^k\right)\\
&= \alpha\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\binom{\alpha-1}{k}+\binom{\alpha-1}{k-1}\right)x^k\right)\\
&= \alpha\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k\right) = \alpha\cdot f(x).
\end{aligned}$$

Wir erhalten $(1+x)\cdot f'(x) = \alpha\cdot f(x)$. Weiter ist $f(0) = 1 = (1+0)^\alpha$. Für $g(x) := \frac{f(x)}{(1+x)^\alpha}$ gilt daher $g(0) = 1$ und

$$\begin{aligned}
g'(0) &= \frac{f'(x)(1+x)^\alpha - \alpha(1+x)^{\alpha-1}f(x)}{(1+x)^{2\alpha}}\\
&= \frac{\alpha f(x)(1+x)^{\alpha-1} - \alpha f(x)(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} = 0.
\end{aligned}$$

Die differenzierbare Funktion g ist also auf dem Intervall $D =]-1,1[$ konstant 1. Daher gilt $f(x) = (1+x)^\alpha$ für $|x| < 1$. ■

Beachte: Ist $\alpha \in \mathbb{N}_0$, so ist $(1+x)^\alpha$ ein Polynom. Die Reihe bricht nach dem $(\alpha+1)$-ten Glied ab, da $\binom{\alpha}{k} = 0$ für $k > \alpha$ gilt. Spezialfälle sind:

- $\displaystyle\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$
- $\displaystyle\frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-2}{n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^n$
- $\displaystyle\sqrt{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 \pm \ldots,$

denn

$$\binom{\frac12}{n} = \frac{\frac12\cdot(\frac12-1)\cdots(\frac12-n+1)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{(n-\frac32)(n-\frac52)\cdots\frac32\cdot\frac12\cdot\frac12}{n!}$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{1}{2^n}\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots3\cdot1}{n!}$$
$$= (-1)^{n-1}\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots3\cdot1}{(2n)(2n-2)(2n-4)\cdots2}$$

Man erhält aus der obigen Diskussion eine brauchbare Näherungsformel für die Wurzelfunktion:

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2} \qquad \text{für „kleine" } x.$$

Insbesondere in der Speziellen Relativitätstheorie werden oft Näherungen des Typs

$$\Big(1-\frac{v^2}{c^2}\Big)^{-\frac12}\approx 1+\frac12\frac{v^2}{c^2}$$

verwendet.

Beispiel VII.1.14. Für die Funktion $\arcsin : [-1,1]\to[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ erhalten wir für $|x|<1$:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac12} = \sum_{n=0}^\infty \binom{-\frac12}{n}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^\infty \binom{n-\frac12}{n} x^{2n}.$$

Wegen $\arcsin(0)=0$ erhalten wir aus Satz VI.3.2 damit die Entwicklung

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^\infty \binom{n-\frac12}{n}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}.$$

Und wegen

$$\binom{n-\frac12}{n}\frac{1}{2n+1} = \frac{(n-\frac12)(n-\frac32)\cdots\frac12}{n(n-1)\cdots2\cdot1}\,\frac{1}{2n+1} = \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots3\cdot1}{(2n+1)(2n)(2n-2)\cdots4\cdot2}$$

ist

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2\cdot3}x^3 + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}x^7 + \cdots .$$

■

VII.2. Rechnen mit Taylorreihen

Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $0 \in D$, die im Nullpunkt mindestens n-mal differenzierbar ist, setzen wir $T^n(f) := T_0^n(f)$ (das n-te Taylorpolynom in 0). Ist f beliebig oft differenzierbar, so setzen wir $T(f) := T_0^\infty(f)$.

Die allgemeine Produktregel/Leibnizformel

Satz VII.2.1. *Sind f und g beide n-mal differenzierbare Funktionen auf $D \subseteq \mathbb{R}$, so gilt*

$$(f \cdot g)^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{[k]} \cdot g^{[n-k]}.$$

Beweis. Übung. ∎

Satz VII.2.2. *Sind f und g im Nullpunkt mindestens n-mal differenzierbar, so gelten*

(1) $T^n(f+g) = T^n(f) + T^n(g)$ *und*

(2) $T^n(f \cdot g) = T^n\big(T^n(f) \cdot T^n(g)\big)$.

Beweis. (1) Dies folgt sofort aus $(f+g)^{[k]}(0) = f^{[k]}(0) + g^{[k]}(0)$ für $0 \le k \le n$.

(2) Es gilt

$$\begin{aligned}
&T^n(f)(x)\, T^n(g)(x)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{[k]}(0)}{k!} x^k \sum_{l=0}^{n} \frac{g^{[l]}(0)}{l!} x^l\\
&= \sum_{k+l \le n} \frac{f^{[k]}(0)}{k!} \frac{g^{[l]}(0)}{l!} x^{k+l} + \underbrace{\sum_{m=n+1}^{2n} \dots}_{\text{Terme höherer Ordnung}}\\
&= \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} f^{[k]}(0) \cdot g^{[m-k]}(0) \right) \cdot x^m + \underbrace{\sum_{m=n+1}^{2n} \dots}_{\text{Terme höherer Ordnung}}
\end{aligned}$$

Mit der allgemeinen Produktregel (Satz VII.2.1) erhalten wir also

$$T^n\big(T^n(f) \cdot T^n(g)\big)(x) = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} (f \cdot g)^{[m]}(0) \cdot x^m = T^n(f \cdot g)(x).$$ ∎

Anschaulich bedeutet Teil (2) des vorigen Satzes, dass man das Taylorpolynom von $f \cdot g$ erhält, indem man die Taylorpolynome $T^n(f)$ und $T^n(g)$

multipliziert und anschließend alle Terme der Ordnung $\geq n+1$ weglässt: Für $T_p^n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{[k]}(p) x^k$ und $T_p^n(g)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} g^{[k]}(p) x^k$ ist

$$\begin{aligned} T_p^n(f \cdot g)(x) &= \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \left(\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} f^{[k]}(p) \cdot g^{[m-k]}(p) \right) \cdot x^m \\ &= \sum_{m=0}^n \left(\sum_{k=0}^m \frac{f^{[k]}(p)}{k!} \frac{g^{[m-k]}(p)}{(m-k)!} \right) \cdot x^m. \end{aligned}$$

Beispiel VII.2.3. (a) Gesucht ist die Taylorreihe von

$$x \mapsto \frac{\log(1+x)}{1+x}$$

in $p = 0$. Für $|x| < 1$ haben wir schon gesehen, dass

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^\infty (-1)^k \frac{x^k}{k} \quad \text{und} \quad \frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k x^k \text{ (geometrische Reihe)}$$

gilt, wobei die Reihen absolut konvergieren. Wegen Satz VII.2.1 und der absoluten Konvergenz der Reihen, dürfen wir die Taylorreihe des Produktes mit der Cauchy-Produktformel berechnen und erhalten daher

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = \sum_{n=0}^\infty \left(\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} (-1)^{n-k} \right) \cdot x^n = \sum_{n=0}^\infty (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{k} \right) \cdot x^n.$$

(b) Hat die Funktion $f(x) := x(1 + x - \cos x)$ ein Extremum am Nullpunkt? Hierzu berechnen wir das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f.

Für $g(x) = 1 + x - \cos x$ ist $T_0(g)(x) = 1 + x - \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$, also $T_0^2(g)(x) = x + \frac{x^2}{2}$. Ferner ist $T_0^2(h)(x) = x$ für $h(x) = x$. Durch Zusammensetzen erhält man

$$T_0^2(f)(x) = T_0^2(g \cdot h)(x) = T_0^2\big(T_0^2(g) \cdot T_0^2(h)\big)(x) = x^2,$$

da $(x + \frac{x^2}{2})x = x^2 + \frac{x^3}{2}$. Man erkennt also, dass $f(0) = 0 = f'(0)$ und $f''(0) = 2 > 0$ ist, so dass f im Nullpunkt ein isoliertes Minimum besitzt. ■

Beispiel VII.2.4. (Methode der unbestimmten Koeffizienten) Genügt eine Funktion f einer Gleichung oder einer Differentialgleichung (dies ist eine Gleichung, in der auch Ableitungen von f vorkommen), so kann man f als Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ ansetzen und bestimmt hieraus die Koeffizienten a_n, soweit dies möglich ist. Danach bestimmt man den Konvergenzbereich der so erhaltenen Potenzreihe.

(a) Gesucht ist die Taylorentwicklung des Tangens im Nullpunkt. Wir haben die Differentialgleichung $\tan' = 1 + \tan^2$; ferner wissen wir $\tan(0) = 0$.

Wir machen nun den Ansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit $f(0) = 0$ und $f' = 1 + f^2$. Aus $f(0) = 0$ erhalten wir $a_0 = 0$. Durch gliedweises Ableiten erhalten wir weiter

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Die rechte Seite der Differentialgleichung $f' = 1 + f^2$ liefert

$$1 + f(x)^2 = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot a_{n-k} \right) \cdot x^n.$$

Falls f der Differentialgleichung genügt, müssen diese beiden Reihen übereinstimmen, weswegen wir einen Koeffizientenvergleich für die a_n anstellen können. Wir erhalten für $n = 0$ die Beziehung $a_1 = 1 + a_0^2 = 1$ und ferner eine Rekursionsgleichung für die Koeffizienten mit höherem Index:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot a_{n-k} \quad \text{für } n \geq 1.$$

Die sechs ersten Koeffizienten errechnen sich mit Hilfe dieser Rekursionsgleichung zu

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = \tfrac{1}{2}(a_0 a_1 + a_1 a_0) = 0, \quad a_3 = \frac{1}{3}(a_0 a_2 + a_1^2 + a_2 a_0) = \frac{1}{3},$$

$$a_4 = 0, \quad a_5 = \frac{1}{5}(a_1 a_3 + a_3 a_1) = \frac{2}{15}.$$

Wir stellen nun zwei Behauptungen auf.

(1) Es gilt $a_{2n} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dies zeigt man durch Induktion: Wir wissen schon, dass $a_0 = 0$ ist. Für $n \geq 0$ ist

$$a_{2n+2} = \frac{1}{2n+2} \sum_{k=1}^{2n} a_k \cdot a_{2n+1-k}.$$

Ist in dieser Summe der Index k ungerade, so ist $2n+1-k$ gerade und umgekehrt. Damit ist die ganze Summe 0, da nach der Induktionsannahme $a_{2k} = 0$ für alle $k = 0, \ldots, n-1$ gilt.

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 \leq a_n \leq 1$.

Aus der Rekursionsformel folgt sofort $0 \leq a_n$ für alle n; speziell ist $0 \leq a_0 \leq 1$. Ist nun $0 \leq a_k \leq 1$ für $k = 0, \ldots, n$, so folgt auch

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} a_k a_{n-k} \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} 1 = \frac{n}{n+1} \leq 1.$$

Damit ist insbesondere auch $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \leq 1$ und somit der Konvergenzradius der Reihe ≥ 1. Wir erhalten also eine Funktion $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ durch $f(x) =$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_n x^n$. Gemäß unserer Konstruktion ist $f(0) = 0$ und $f' = 1 + f^2 \geq 1$ (Satz VI.3.2). Damit ist f streng monoton wachsend, also $f :]-1,1[\to f(]-1,1[)$ umkehrbar mit differenzierbarer Umkehrfunktion $f^{-1} : f(]-1,1[) \to]-1,1[$, und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{1 + f(f^{-1}(x))^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Wegen $f^{-1}(0) = 0$ ist damit $f^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x$ und folglich $f(x) = \tan x$ für $|x| < 1$. Wir haben also gesehen, dass sich die Tangensfunktion auf dem Intervall $]-1,1[$ durch eine Potenzreihe

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$$

darstellen lässt. Die Koeffizienten erhält man aus der obigen Rekursionsformel.

(b) Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Für $x \neq 0$ ist also

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}$$

und ebense $f(0) = \frac{1}{1!} = 1$. Also ist f auf ganz $\mathbb{R}$ durch eien konvergente Potenzreihe darstellbar und daher beliebig oft differenzierbar (Satz VI.3.2).

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x) \neq 0$, und folglich ist

$$g(x) := \frac{1}{f(x)} = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

eine beliebig oft differenzierbare Funktion. Wir setzen nun für die Funktion g wie oben eine Potenzreihe an:

$$T_0(g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} x^n.$$

Die Koeffizienten $\beta_n = g^{[n]}(0)$ heißen *Bernoulli-Zahlen.*

Die Gleichung $g(x)f(x) = 1$ liefert $g(x)(e^x - 1) = x$, also $T_0(g) \cdot T_0(e^x - 1) = x$, das heißt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Somit ergibt sich $\beta_0 = g(0) = 1$. Für $n \geq 2$ erhält man aus der Summe eine Rekursionsgleichung für β_{n-1}:

$$\beta_{n-1} = -(n-1)! \sum_{k=0}^{n-2} \frac{\beta_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!}.$$

Damit können wir weitere Bernoulli-Zahlen berechnen:

$$\beta_1 = -\frac{\beta_0}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \beta_2 = -2!\left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2 \cdot 2!}\right) = -2\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

und

$$\beta_4 = -4!\left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2 \cdot 4!} + \frac{1}{6 \cdot 2!\, 3!}\right) = -\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{30}.$$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\beta_{2k+1} = 0$: Hierzu betrachten wir die um $\beta_1 x$ modifizierte Funktion g.

$$\begin{aligned} g(x) + \tfrac{1}{2}x &= \frac{x}{e^x - 1} + \tfrac{1}{2}x = \frac{x \cdot \left(1 + \frac{1}{2}(e^x - 1)\right)}{e^x - 1} \\ &= \frac{x}{2} \frac{e^x + 1}{e^x - 1} = \frac{x}{2} \frac{e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})}{e^{\frac{x}{2}}(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})} = \frac{x}{2} \frac{\cosh(\frac{x}{2})}{\sinh(\frac{x}{2})}. \end{aligned}$$

Hierbei sind die Funktionen sinh und cosh jeweils definiert durch

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Wir schließen hieraus, dass $g(x) + \frac{1}{2}x$ eine gerade Funktion ist. Also gilt

$$g^{[2k+1]}(0) = \beta_{2k+1} = 0 \qquad \text{für alle} \qquad k \in \mathbb{N}_0. \qquad \blacksquare$$

Bemerkung VII.2.6. Es gilt

$$\tan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)}{(2n)!} (-1)^{n+1} \beta_{2n} x^{2n-1} \quad \text{für } |x| < \frac{\pi}{2}.$$

Die Bernoullizahlen liefern also auch die Entwicklung der Tangensfunktion (sogar für $|x| < \frac{\pi}{2}$). $\blacksquare$

Wir wenden uns nun einer Verallgemeinerung der Kettenregel zu. Die Kettenregel macht eine Aussage über die Ableitung einer Komposition von Funktionen:

$$\left(g \circ f\right)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

Die Ableitung einer Funktion bekommt man aus ihrem Taylorpolynom erster Ordnung. Man kann die Kettenregel wie folgt mit Taylorpolynomen schreiben:

$$T_p^1(g \circ f) = T_{f(p)}^1(g) \cdot T_p^1(f).$$

Diese Regel lässt sich verallgemeinern.

Allgemeine Kettenregel

Satz VII.2.7. *Gegeben seien n-mal differenzierbare Funktionen*

$$f : D \to B \subseteq \mathbb{R}, \quad g : B \to \mathbb{R}$$

und ein Punkt $p \in D$ mit $f(p) = q$. Dann gilt

$$T_p^n(g \circ f) = T_0^n\big(T_q^n(g) \circ (T_p^n(f) - q)\big).$$

Beweis. Ersetzen wir f durch $x \mapsto f(x+p) - q$ und g durch $x \mapsto g(x+q)$, so dürfen wir $p = q = 0$ annehmen. Für den Spezialfall, dass $g(y) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell y^\ell$ eine Polynomfunktion vom Grad $\leq n$ ist, liefert Satz VII.2.2(2)

$$\begin{aligned} T_0^n(g \circ f) &= \sum_{\ell=0}^n a_\ell \cdot T_0^n(f^\ell) = \sum_{\ell=0}^n a_j \cdot T_0^n\big(T_0^n(f)^\ell\big) = T_0^n\left(\sum_{\ell=0}^n a_\ell \cdot T_0^n(f)^\ell\right) \\ &= T_0^n\big(g \circ T_0^n(f)\big) = T_0^n\big(T_0^n(g) \circ T_0^n(f)\big), \end{aligned}$$

da $g = T_0^n(g))$ ist. Für eine allgemeine Funktion g setzen wir $\widetilde{g} := g - T_0^n(g)$. Dann ist $T_0^n(g)$ eine Polynomfunktion vom Grad $\leq n$, und wir erhalten

$$T_0^n(g \circ f) = T_0^n\big(T_0^n(g) \circ f\big) + T_0^n(\widetilde{g} \circ f) = T_0^n\big(T_0^n(g) \circ T_0^n(f)\big) + T_0^n(\widetilde{g} \circ f).$$

Wir behaupten nun, dass $T_0^n(\widetilde{g} \circ f) = 0$ ist. Dies zeigen wir, indem wir durch Induktion nach k nachweisen, dass aus $h^{[j]}(0) = 0$ für $j = 0, 1, \ldots, k \leq n$ die Beziehung $T_0^k(h \circ f) = 0$ folgt. Diese Aussage können wir dann auf $h = \widetilde{g}$ anwenden.

(A) Für $k = 0$ ist $T_0^0(h \circ f)(0) = h(f(0)) = h(0) = 0$.

(S) $k \to k+1$: Für $k < n$ haben wir

$$\begin{aligned} \big(h \circ f\big)^{[k+1]}(0) &= \big((h \circ f)'\big)^{[k]}(0) = \big((h' \circ f) \cdot f'\big)^{[k]}(0) \\ &= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \underbrace{\big(h' \circ f\big)^{[m]}(0)}_{=0} \cdot f^{[k+1-m]}(0), \end{aligned}$$

denn wir können die Induktionsvoraussetzung auf die Funktion h' anwenden, deren Ableitungen bis zur Ordnung k in 0 verschwindet. Damit ist

$$\big(h \circ f\big)^{[k+1]}(0) = 0.$$

Die Induktion zeigt jetzt, dass $\big(h \circ f\big)^{[k]}(0) = 0$ für alle $k = 0, \ldots, n$ gilt, folglich $T_0^n(h \circ f) = 0$. Wir haben also

$$T_0^n(g \circ f) = T_0^n\big(T_0^n(g) \circ T_0^n(f)\big)$$

gezeigt. ∎

Beispiel VII.2.8. Wie berechnet man die dritte Ableitung von $g \circ f$? Man schreibt $T_q^3(g)(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3$, wobei $a_j = \frac{g^{[j]}(q)}{j!}$ ist, und

$$T_p^3(f)(x) - q = b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 \quad \text{mit} \quad b_j = \frac{f^{[j]}(p)}{j!}.$$

Die gerade bewiesene Aussage entspricht dann

$$T_p^3(g \circ f) = T_0^3\big(T_q^3(g) \circ (T_p^3(f) - q)\big).$$

Den Term dritter Ordnung erhält man durch Einsetzen:

$$a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3 = \frac{(g \circ f)'''(p)}{3!}.$$

Die allgemeine Formel lautet:

$$(g \circ f)'''(p) = g'(q) f'''(p) + 3g''(q) f'(p) f''(p) + g'''(q)\big(f'(p)\big)^3. \qquad \blacksquare$$

VIII. Uneigentliche Integrale

In diesem Abschnitt werden wir die Integration verwenden, um die Konvergenz von Reihen zu untersuchen. Hierbei wird sich eine interessante Analogie zwischen unendlichen Reihen und den sogenannten uneigentlichen Integralen zeigen. Aus dieser Korrespondenz lassen sich sehr feine Resultate über das Konvergenzverhalten von Reihen gewinnen, da uns nun der Kalkül der Differentialrechnung zur Verfügung steht.

Definition VIII.1. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $b \in]a, \infty]$. Weiter sei $f \colon [a, b[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, sodass für alle $x \in [a, b[$ die Einschränkung $f|_{[a,x]}$ Riemann-integrabel ist. Falls er existiert, heißt der Grenzwert

$$\int_a^b f(t)dt := \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_a^x f(t)\,dt$$

das *uneigentliche Integral von f auf* $[a, b[$. Die Integrale $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ heißen *Partialintegrale* (analog zu den Partialsummen von Reihen). Analog definiert man uneigentliche Integrale für $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, wenn f auf allen Intervallen $[x, b]$, $x \in]a, b]$ Riemann-integrabel ist. ■

Bemerkung VIII.2. Ist $F : [a, b[\to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung $F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,dt$. Die Existenz des uneigentlichen Integrals $\int_a^b F'(t)\,dt$ ist also äquivalent zur Existenz des Grenzwerts $\lim_{x \nearrow b} F(x)$. ■

Der folgende Satz zeigt, dass wir Reihen als eine spezielle Form von uneigentlichen Integralen ansehen dürfen.

Satz VIII.3. *Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe, so definieren wir*

$$f : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \ t \mapsto a_k \quad \textit{für} \quad k \le t < k + 1.$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral $\int_0^{\infty} f(t)\,dt$ existiert. In diesem Fall sind beide Werte gleich.

Beweis. Für $F(x) := \int_0^x f(t)\,dt$ und $n \le x < n + 1$ ist

$$F(x) = \int_0^n f(t)\,dt + \int_n^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + (x - n) \cdot a_n.$$

Insbesondere ist $F(n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. Existiert nun das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t)\,dt$, so existiert auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} F(n) = \int_0^\infty f(t)\,dt.$$

Konvergiert andererseits die Reihe $\sum_{k=0}^\infty a_k$, so ist für ausreichend große $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [n, n+1[$:

$$\left| F(x) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \right| = \left| (x-n)a_n - \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right| \le |a_n| + \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_k \right| < \varepsilon. \qquad \blacksquare$$

Wegen obiger Bemerkung verwundert es nicht, dass sich einige Konvergenzsätze für Reihen auf uneigentliche Integrale übertragen lassen.

Satz über die monotone Konvergenz

Satz VIII.4. *Ist $f \ge 0$ und $f|_{[a,x]} \in R_a^x$ für alle $x \in [a,b[$, so existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ genau dann, wenn die Funktion $F : [a,b[\to \mathbb{R}, x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ beschränkt ist.*

Beweis. Wir setzen $s := \sup F([a,b[)$. Wir nehmen zuerst $s < \infty$ an. Da das Partialintegral F monoton wächst (beachte $f \ge 0$) und für ein $x \in [a,b[$ die Beziehung $F(x) > s - \varepsilon$ gilt, erhalten wir $F(y) > s - \varepsilon$ für alle $y \in [x,b[$. Also ist $|s - F(y)| < \varepsilon$ für alle $y \in [x,b[$. Hieraus folgt $\lim_{x\to b} F(x) = s$.

Ist $s = \infty$, so folgt analog $\lim_{x\to b} F(x) = \infty$, d.h., das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\,dt$ existiert nicht. ■

Majorantenkriterium

Satz VIII.5. *Ist $0 \le f \le g$ und existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b g(t)\,dt$, so existiert auch $\int_a^b f(t)\,dt$.*

Beweis. Dies folgt wegen $\int_a^x f \le \int_a^x g \le \int_a^b g$ aus Satz VIII.4. ■

Beispiel VIII.6. Sei $a = 1$, $b = \infty$ und $f(x) = x^{-\alpha}$ mit $\alpha > 0$. Dann ist

$$F(x) = \int_1^x t^{-\alpha}\,dt = \begin{cases} \frac{1-x^{1-\alpha}}{\alpha-1}, & \text{falls } \alpha \ne 1 \\ \log x, & \text{falls } \alpha = 1. \end{cases}$$

Für $\alpha < 1$ ist $1 - \alpha > 0$ und folglich $\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha+1} = \infty$, d.h. $\int_1^\infty t^{-\alpha}\,dt$ existiert nicht. Für $\alpha = 1$ existiert $\int_1^\infty \frac{dt}{t}$ ebenfalls nicht, da $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$. Für $\alpha > 1$ jedoch ist $1 - \alpha < 0$ und daher $\lim_{x\to\infty} x^{-\alpha+1} = 0$. In diesem Fall existiert das Integral, und es gilt:

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}. \qquad \blacksquare$$

Man beachte, dass diese Rechnung viel einfacher war als diejenige, die wir gemacht haben, um die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ auf Konvergenz zu untersuchen. Man sieht also, dass der Kalkül der Differential- und Integralrechnung vieles einfacher macht. Wie man Ergebnisse über Reihen aus solchen für uneigentliche Integrale direkt gewinnen kann, zeigt der folgende Satz:

Satz VIII.7. *Sei $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ eine nichtnegative monoton fallende Funktion. Dann ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit*

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^{n+1} f(t)\, dt$$

nicht negativ, monoton wachsend, und sie konvergiert mit

$$0 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le f(1).$$

Insbesondere konvergiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(t)\, dt$ genau dann, wenn die Reihe $\sum_{k=1}^\infty f(k)$ konvergiert.

Beweis. Da f monoton fallend ist, ist $f \mid_{[1,x]}$ für alle $x \ge 1$ integrabel (vgl. Satz VI.1.10). Aus der Monotonie ergibt sich

$$f(k+1) \le \int_k^{k+1} f(t)\, dt \le f(k).$$

Summation liefert

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \le \int_1^{n+1} f(t)\, dt \le \sum_{k=1}^{n} f(k),$$

und somit ist $a_n := \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(t)\, dt \ge 0$. Aus $f(n+1) \ge \int_{n+1}^{n+2} f(t)\, dt$ folgt $a_{n+1} \ge a_n$, d.h., $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Weiter ist

$$a_n \le \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=2}^{n+1} f(k) = f(1) - f(n+1) \le f(1).$$

Aus dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt nun, dass $\lim_{n\to\infty} a_n$ existiert. Die Beziehung

$$0 \le \lim_{n\to\infty} a_n \le f(1)$$

folgt aus $0 \le a_n \le f(1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und der Rest der Behauptung direkt aus dem Bewiesenen und Satz VIII.4. ■

Beispiel VIII.8. (a) Wir wenden Satz VIII.7 auf die Funktion $f : x \mapsto x^{-\alpha}$ an $(\alpha > 0)$. Dann existiert das Integral

$$\int_1^\infty f(t)\,dt = \int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$$

nach Beispiel VIII.6 genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist. Nach dem vorstehenden Satz ist dies genau dann der Fall, wenn die Reihe

$$\sum_{k=1}^\infty f(k) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}$$

konvergiert. Wir erhalten sogar die Abschätzung

$$0 \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha} - \int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{\alpha-1} \leq f(1) = 1,$$

das heißt

$$\frac{1}{\alpha-1} \leq \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{\alpha-1} + 1 = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Für $\alpha > 1$ schreibt man

$$\zeta(\alpha) := \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^\alpha}.$$

Die Funktion $\zeta :]1, \infty[\to \mathbb{R}$ heißt *Riemannsche Zetafunktion*. Sie spielt in der Zahlentheorie, als Funktion im Komplexen, eine zentrale Rolle.

Wegen $\zeta(\alpha) \geq \frac{1}{1^\alpha} = 1$ und $\frac{1}{\alpha-1} \leq \zeta(\alpha) \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$ ist

$$\lim_{\alpha\to\infty} \zeta(\alpha) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\alpha\to 1} \zeta(\alpha) = \infty.$$

(b) Für $\alpha = 1$ erhalten wir wie im Beweis von Satz VIII.7:

$$\log(n+1) = \int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \log n.$$

Die nach Satz VIII.7 konvergente Folge

$$a_n := \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \log n$$

hat als Grenzwert die *Euler-Mascheronische Konstante*

$$c := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{2} + \ldots + \tfrac{1}{n} - \log n\right) = 0{,}5772\ldots,$$

d.h., die harmonische Reihe wächst genauso wie $\log n$. ■

Wir übertragen jetzt noch einige Konvergenzkriterien für Reihen auf uneigentliche Integrale.

Satz VIII.9. (Cauchykriterium) *Sei* $F : D \to \mathbb{R}$ *eine Funktion,* $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, *und es gebe mindestens eine Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* D, *die gegen* b *konvergiert. Dann existiert* $\lim_{x\to b} F(x)$ *genau dann, wenn gilt:*

(1) $b \neq \pm\infty$: $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x, z \in U_\delta(b) \cap D) : |F(x) - F(z)| < \varepsilon$.

(2) $b = \infty$: $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall x, z \in D, x, z > N) : |F(x) - F(z)| \leq \varepsilon$.

(3) $b = -\infty$: $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall x, z \in D, x, z < -N) : |F(x) - F(z)| \leq \varepsilon$.

Beweis. Sei zunächst $b \neq \pm\infty$.

Wir nehmen zuerst an, dass $a := \lim_{x\to b} F(x)$ existiert. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $|F(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|F(z) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $x, z \in D \cap U_\delta(b)$. Damit ist

$$|F(x) - F(z)| \leq |F(x) - a| + |a - F(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Sei nun (1) erfüllt und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $x_n \to b$. Weiter sei $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ gemäß (1) gewählt. Wegen $x_n \to b$ existiert ein $N_\delta \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - b| < \delta$ für alle $n > N_\delta$. Damit ist $|F(x_n) - F(x_m)| < \varepsilon$ für alle $n, m > N_\delta$. Die Folge $\big(F(x_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Cauchyfolge und daher konvergent. Sei $a := \lim_{n\to\infty} F(x_n)$. Ist $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge in D mit $y_n \to b$, so konvergiert auch die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} := (x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \ldots)$ gegen b. Also ist

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = \lim_{n\to\infty} F(z_n) = \lim_{n\to\infty} F(x_n) = a.$$

Der Grenzwert hängt also nicht von der gewählten Folge ab, d.h. $\lim_{x\to b} F(x) = b$.

Die Fälle $b = \pm\infty$ behandelt man analog. ■

Wir wollen das Cauchysche Konvergenzkriterium insbesondere auf uneigentliche Integrale anwenden, d.h., wir betrachten

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt, \quad x \in D = [a, b[.$$

Definition VIII.10. Das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)\, dt$ heißt *absolut konvergent*, wenn das Integral $\int_a^b |f(t)|\, dt$ konvergiert. ■

Satz VIII.11. *Ein absolut konvergentes uneigentliches Integral konvergiert.*

Beweis. Für $x \geq a$ sei $F(x) := \int_a^x f(x)\, dx$ und $G(x) := \int_a^x |f(x)|\, dx$. Dann gilt für $z \leq x$:

$$|F(z) - F(x)| = \Big|\int_x^z f(t)\, dt\Big| \leq \int_x^z |f(t)|\, dt = G(z) - G(x).$$

Die Behauptung folgt nun, indem wir das Cauchysche Konvergenzkriterium VIII.9 verwenden, um die Existenz des Grenzwertes $\lim_{x\to b} F(x)$ einzusehen. ■

Folgerung VIII.12. *Sei $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ eine Funktion, die von höherer als erster Ordnung in ∞ verschwindet, d.h. es existieren $\alpha > 1$, ein $c > a$ und ein $K > 0$, so dass für alle $t \geq c$ gilt $|f(t)| \leq \frac{K}{t^\alpha}$. Dann konvergiert das Integral $\int_a^\infty f(t)\,dt$ absolut. Gilt dagegen $f(t) \geq \frac{K}{t}$ für ein $K > 0$ und alle $t \geq c$, so divergiert das Integral.*

Beweis. Ist $f(t) \geq \frac{K}{t}$ für $t \geq c \geq a$, so würden wir aus der Konvergenz des Integrals $\int_c^\infty f(t)\,dt$ nach dem Majorantenkriterium die Konvergenz von $\int_c^\infty \frac{dt}{t}$ folgern können. Folglich ist das Integral $\int_c^\infty f(t)\,dt$ und damit auch $\int_a^\infty f(t)\,dt$ divergent.

Gilt hingegen $|f(t)| \leq \frac{K}{t^\alpha}$ für $\alpha > 1$ und alle $t \geq c$, so folgt die Konvergenz des Integrals $\int_c^\infty |f(t)|\,dt$ aus dem Majorantenkriterium, Satz VIII.11 und Beispiel VIII.6, d.h., das Integral

$$\int_a^\infty f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^\infty f(t)\,dt$$

ist absolut konvergent. ■

Beispiel VIII.13. Wegen $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{x^2}$ für $x \geq 1$ konvergiert das Integral $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2}$. Wir wissen schon, dass $\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \lim_{t\to\infty} \arctan t = \frac{\pi}{2}$ ist. ■

Natürlich betrachtet man auch Integrale, die an beiden Integralenden „uneigentlich" sind. Allgemein definieren wir

$$\int_{-\infty}^\infty f := \int_{-\infty}^0 f + \int_0^\infty f \quad \text{und} \quad \int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f,$$

für $a < b < c$, wenn es sich an den Intervallenden $a, c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ um uneigentliche Integrale handelt.

Beispiel VIII.14. (Die Gammafunktion) Für jedes $t > 0$ konvergiert das Integral

$$\Gamma(t) := \int_0^\infty x^{t-1} \cdot e^{-x}\ dx$$

(die *Gamma-Funktion*), wobei das Integral an beiden Intervallenden als uneigentliches Integral zu verstehen ist. Für alle $x \geq 0$ ist $x^{t-1}e^{-x} \leq x^{t-1}$, und somit existiert das folgende uneigentliche Integral nach dem Majorantenkriterium

$$\int_0^1 x^{t-1}e^{-x}\ dx = \lim_{x\to 0} \int_x^1 x^{t-1}e^{-x}\ dx,$$

denn es gilt

$$\int_0^1 x^{t-1}\ dx = \lim_{x\to 0} \int_x^1 s^{t-1}\ ds = \lim_{x\to 0} \left[\frac{s^t}{t}\right]_x^1 = \frac{1}{t} - \lim_{x\to 0} \frac{x^t}{t} = \frac{1}{t}.$$

Weiter gilt:

$$x^2 \cdot (x^{t-1}e^{-x}) = x^{t+1}e^{-x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Nach den de l'Hospitalschen Regeln ist nämlich

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\infty} \frac{x^{t+1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} (t+1)\frac{x^t}{e^x} \\
&= \lim_{x\to\infty} (t+1)\cdot t\frac{x^{t-1}}{e^x} = 0, \qquad \text{falls } t \in]0,1] \text{ ist, da } x^{t-1} \leq 1 \\
&= \lim_{x\to\infty} (t+1)\cdot t\cdot (t-1)\frac{x^{t-2}}{e^x} = 0, \qquad \text{falls } t \in]1,2] \text{ ist, da } x^{t-2} \leq 1 \\
&\ldots .
\end{aligned}$$

Damit existiert also ein $K > 0$, so dass $x^{t-1} \cdot e^{-x} \leq \frac{K}{x^2}$ für alle $x \geq 1$ gilt, und daher existiert das Integral $\int_1^\infty x^{t-1}e^{-x}\,dx$ nach dem Majorantenkriterium.

Eigenschaften der Gammafunktion: Es gilt die *Funktionalgleichung der Gammafunktion*

$$(\forall t > 1) \quad \Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1).$$

Dies beweisen wir mittels partieller Integration:

$$\begin{aligned}
\Gamma(t) &= \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\,dx \\
&= \lim_{y\to\infty} -y^{t-1}e^{-y} - \lim_{y\to 0} y^{t-1}e^{-y} + \int_0^\infty (t-1)x^{t-2}e^{-x}\,dx \\
&= 0 + 0 + (t-1)\Gamma(t-1),
\end{aligned}$$

da $y^{t-1} \to 0$ wegen $t > 1$ gilt. Für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ erhalten wir speziell:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = \lim_{y\to\infty} \left[-e^{-x}\right]_0^y = \lim_{y\to\infty} 1 - e^{-y} = 1,$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt aus der Funktionalgleichung

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Dies erhält man durch Induktion: Für $n = 0$ haben wir $\Gamma(0+1) = 0! = 1$. Beim Induktionsschluss verwenden wir die Funktionalgleichung und rechnen $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$. ∎

Beispiel VIII.15. (Fresnelsche Integrale) Durch Anwendung des Transformationssatzes mit $t = \varphi(u) = \sqrt{u}$ rechnet man

$$\int_0^\infty \sin(t^2)\,dt = \lim_{x\to\infty} \int_0^x \sin(t^2)\,dt = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2}\int_0^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du$$

(mittels $\frac{du}{2\sqrt{u}} = \varphi'(u) \cdot du$). Wir fragen nach der Konvergenz dieses Integrals. Hierzu rufen wir uns zunächst in Erinnerung, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle u zwischen $2k\pi$ und $(2k+1)\pi$ der Wert $\sin(u) \geq 0$ ist; zwischen $(2k+1)\pi$ und $(2k+2)\pi$ ist $\sin(u) \leq 0$. Weiter ist

$$\begin{aligned} -\int_{(2k+1)\pi}^{(2k+2)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du &= -\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin(u+\pi)}{\sqrt{u+\pi}}\, du \\ &= \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u+\pi}}\, du \leq \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du. \end{aligned}$$

Analog erhält man

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du \leq -\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du.$$

Somit ist die Folge $a_n := (-1)^n \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$ nichtnegativ, monoton fallend, und es gilt

$$|a_n| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{du}{\sqrt{u}} \leq \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \to 0.$$

Nach dem Leibnizkriterium existiert daher

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k = \lim_{n\to\infty} \int_0^{(n+1)\pi} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du.$$

Sei nun $F(x) := \int_0^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$. Für $n\pi \leq x \leq (n+1)\pi$ ist dann

$$\big|F(x) - F(n\pi)\big| = \left| \int_{n\pi}^{x} \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du \right| \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{du}{\sqrt{u}} \leq \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \to 0,$$

und somit existiert das uneigentliche Integral

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_0^\infty \frac{\sin u}{\sqrt{u}}\, du$$

nach dem Cauchykriterium VIII.9. Es sei bemerkt, dass der ursprüngliche Integrand $t \mapsto \sin(t^2)$ für $t \to \infty$ *nicht* gegen Null konvergiert. Wir haben sogar

$$\int_0^\infty \sin(u^2)\, du = \int_0^\infty 2t \cdot \sin(t^4)\, dt$$

(über die Transformationsformel mit $\varphi(t) = t^2$ und $\varphi'(t)\, dt = 2t\, dt$), und der Integrand ist in diesem Fall sogar unbeschränkt. ∎

Beispiel VIII.16. Wir betrachten das folgende uneigentliche Integral:

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{\pi}{2}.$$

Hierzu verwendet man die Transformationsformel mit $\varphi(t) = \arcsin t$, also

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

für $0 \leq t < 1$ (Bemerkung V.4.17). Daher folgt

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \lim_{x \to 1} \int_0^x \varphi'(t)\, dt = \lim_{x \to 1} \arcsin x = \frac{\pi}{2}. \qquad \blacksquare$$