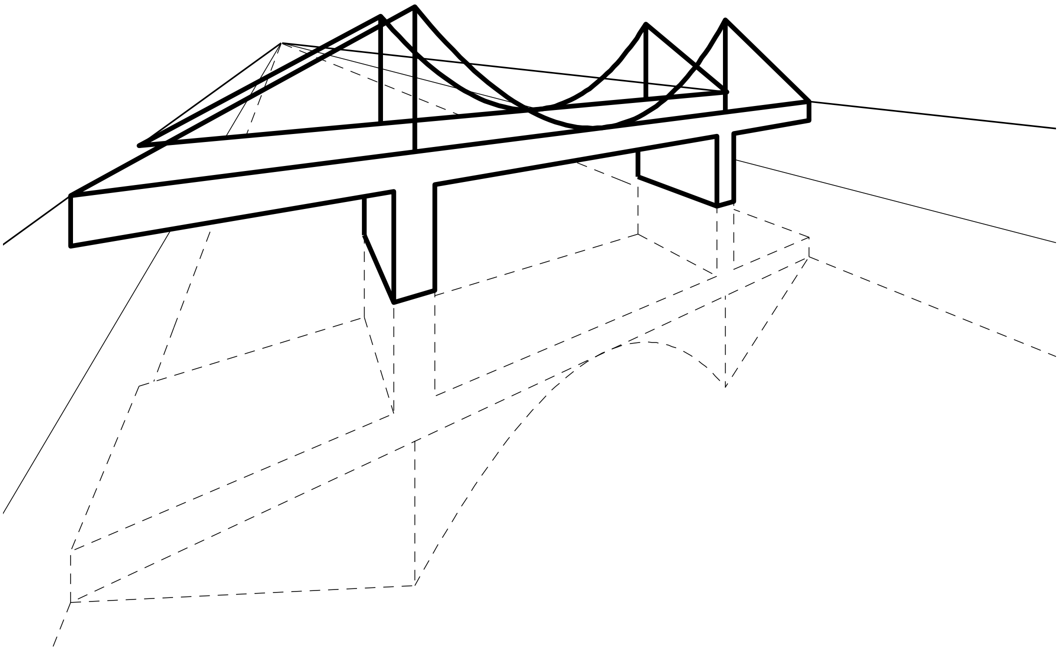
Darstellende Geometrie

für Bauingenieure

Skript von Erich Hartmann



Vorlesung von Ulrich Reif

Fachbereich Mathematik
Technische Universität Darmstadt
WS 13/14

Inhaltsverzeichnis

Ziele der Vorlesung

Die Aufgabe der *Darstellenden Geometrie* besteht darin, räumliche Objekte in einer Zeichenebene darzustellen. Die Vorlesung will erläutern, nach welchen Regeln diese Darstellungen entstehen.

Im einzelnen soll die Vorlesung erklären, wie die Darstellungen zu lesen sind, d.h. welche Merkmale der Objekte daraus abzulesen sind. Dies bedeutet die folgenden **Fähigkeiten**:

- Von einem 3D–Objekt schnell eine *Skizze anfertigen*,
- vorgefertigte Zeichnungen *lesen*,
- in vorgefertigte Zeichnungen oder Photos *Ergänzungen einfügen*,
- aus vorgefertigten Zeichnungen oder Photos *wahre Längen und Winkel* oder ganze Grund– und Aufrisse bestimmen.

Durch die konkreten Überlegungen soll ganz allgemein die räumliche Vorstellung geschult werden. Daher wird es uns bei speziellen Konstruktionsverfahren wichtig sein, sie aus der dreidimensionalen Geometrie heraus zu begründen.

Ziel der Vorlesung ist **nicht** das akurate Erstellen technischer Zeichnungen per Hand. In der Praxis leisten dies CAD-Systeme auf dem Rechner.

Arbeitsmaterialien

In der Vorlesung werden wesentliche Konstruktionen erarbeitet und im vorliegenden **Skript** eingezeichnet. Die Konstruktionsschritte sind im Skript stichwortartig beschrieben und durch Einrahmung hervorgehoben. In Vorlesung und Übungen benötigen Sie **Bleistift, Geodreieck** und **Lineal**, manchmal auch einen **Zirkel**.

Drucken Sie sich vor der Vorlesung das Skript aus und vervollständigen Sie die Zeichnungen als Ihre Vorlesungsmitschrift. Bringen Sie das Skript auch immer in die Übungen mit und verwenden Sie es dort als Arbeitsgrundlage. In der Klausur zur Vorlesung ist einzig das von Ihnen bearbeitete Skript als Material zugelassen.

Das Skript ist nicht als Lehrbuch zum Selbststudium gedacht. Als **Literatur** für Vorlesung und Praxis werden empfohlen:

a) Leopold: *Geometrische Grundlagen der Architekturdarstellung*, Kohlhammer-Verlag, Köln

Wir verweisen im Skript darauf in der Form "LEO, S. xx". Auch auf das folgende etwas ältere Buch verweisen wir gelegentlich durch "FKN, S. yy":

b) Fucke, Kirch, Nickel:*Darstellende Geometrie*, Fachbuchverlag Leipzig,

Als ergänzende und weiterführende Lektüre empfehlen wir die wunderschön illustrierten Bücher:

c) Glaeser: *Geometrie und ihre Anwendungen in Kunst, Natur und Technik*, Elsevier/Spektrum 2005,

d) Pottmann, Asperl, Hofer, Kilian: *Architectural Geometry/Archtekturgeometrie*, Bentley 2007/2010.

Das vorliegende Skript wurde von Erich Hartmann 2002 entworfen und durch Karsten Große-Brauckmann überarbeitet.

Kapitel 1

Projektionen in der Darstellenden Geometrie

1.1 Abbildungen

Die Aufgabe der *Darstellenden Geometrie* besteht darin, räumliche Objekte in einer Zeichenebene darzustellen. Dabei gibt es zwei konkurrierende Ziele:
• *Maßgenauigkeit* bedeutet, dass man aus der Abbildung leicht genaue Abmessungen ablesen kann.
• *Anschaulichkeit* bedeutet, dass die zweidimensionale Darstellung einen guten räumlichen Eindruck erweckt.
Die beiden folgenden Bilder eines Hauses sind maßgenau, aber nicht sehr anschaulich:

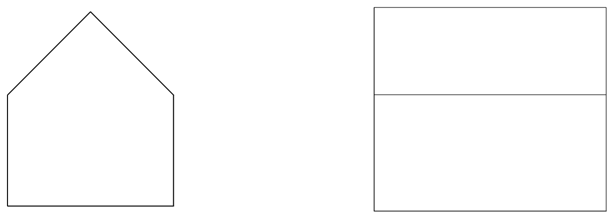
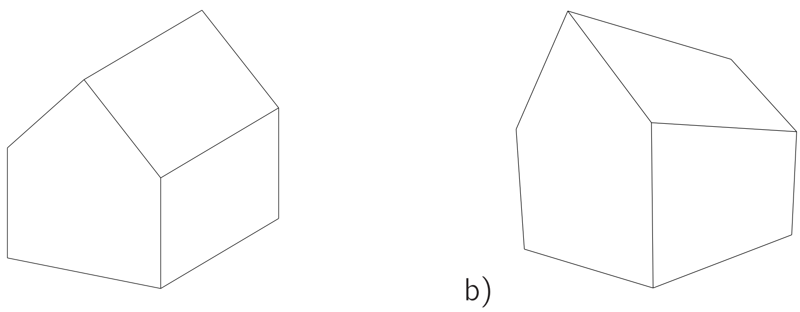


Abbildung 1.1: Haus in Seitenansicht

Dagegen bringen die nächsten beiden Bilder den räumlichen Eindruck zur Geltung. Allerdings lassen sich genaue Abmessungen gerade aus dem rechten Bild nur schwer ablesen.



a) b)

Abbildung 1.2: Haus in a) senkrechter Parallel- und b) Zentralprojektion

Es gibt viele Möglichkeiten, den dreidimensionalen Raum auf die zweidimensionale Ebene abzubilden, d.h. jedem Punkt P des Raumes einen Punkt P' der Bildebene zuzuordnen.
In der Darstellenden Geometrie bedient man sich zweier spezieller Abbildungsverfahren, die geometrisch definiert sind. Beide **projizieren** das Objekt **längs Geraden in die Ebene**. Man kann sich dazu konkret vorstellen, dass die Geraden *Lichtstrahlen* sind, welche die Punkte und Kurven eines Objektes im Raum auf einen *Schatten* in der Bildebene abbilden. Wir stellen diese beiden Abbildungen nun vor.

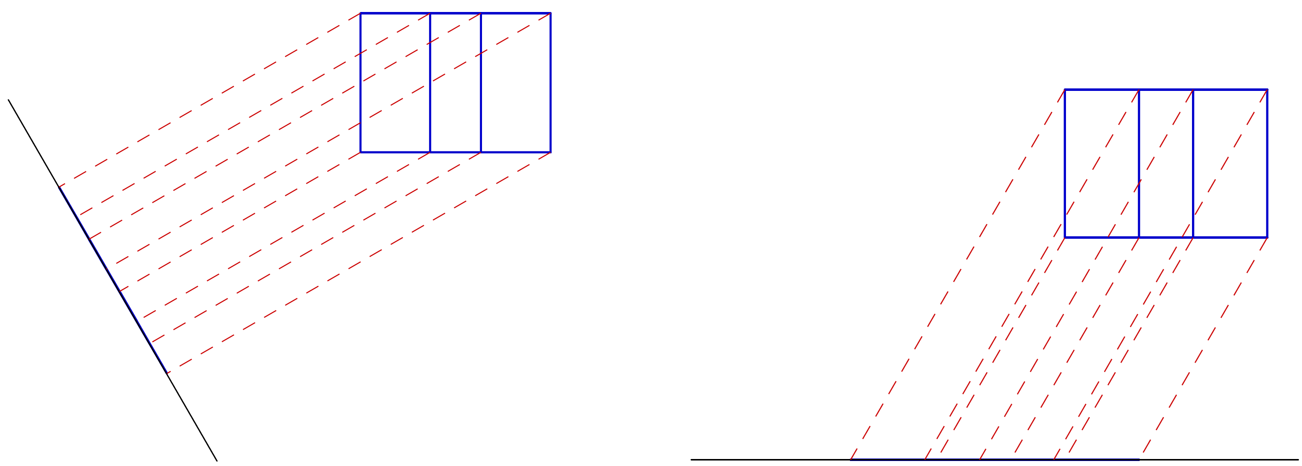
1.2 Parallelprojektion

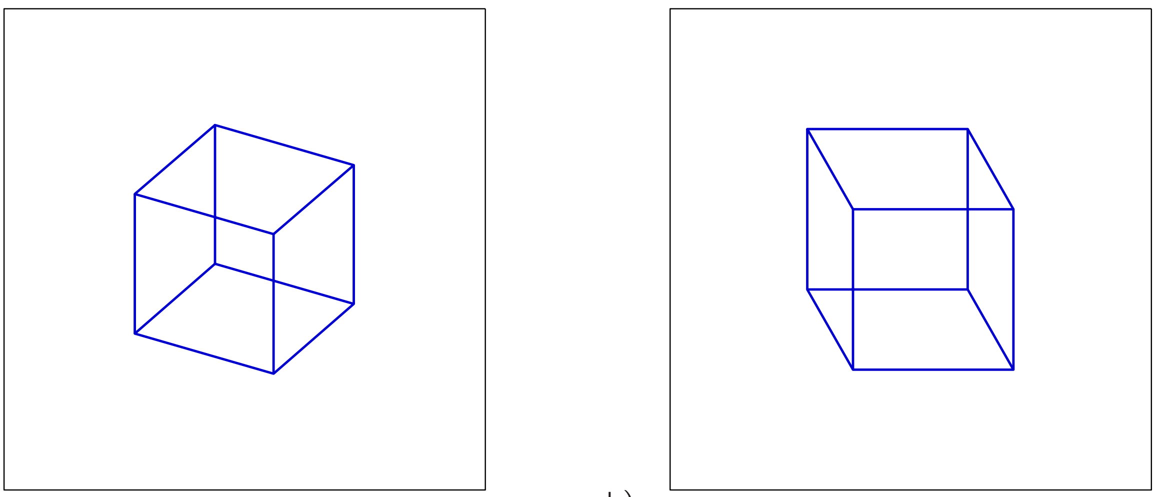
Abbildungsvorschrift

Bei dieser Projektion sind alle Abbildungsstrahlen **parallel**, d.h. jeder Punkt P wird längs paralleler Geraden auf einen Punkt P' der Bildebene abgebildet. Je nach Winkel zwischen Strahlen und Bildebene unterscheidet man zwei Fälle:

Senkrechte (orthogonale) **Parallelprojektion**: Die Strahlen stehen *senkrecht* zur Bildtafel.
Schiefe Parallelprojektion: Die Strahlen stehen *nicht senkrecht* zur Bildtafel.

Die senkrechte Parallelprojektion ist meist anschaulicher, schiefe Parallelprojektionen sind aber oft einfacher zu erzeugen.





a) b)

Abbildung 1.3: Würfel in a) senkrechter und b) schiefer Parallelprojektion

Die Parallelprojektion läßt sich als Schattenwurf eines Objektes durch eine weit entfernte Punktlichtquelle deuten. Von der Entfernung her ist Sonnenlicht ein gutes Beispiel dafür, wegen der Größe der Sonnenscheibe ist das Schattenbild allerdings unscharf. (Warum sehen Sie auf dem Waldboden kleine kreisförmige besonnte Flecken?).

Wir werden einen Vektor v, der parallel zu den Projektionsstrahlen ist und vom Objekt auf die Projektionsebene zeigt, als **Blickrichtung** bezeichnen.

Eigenschaften der Parallelprojektion

Die Parallelprojektion ist

(G) *geradentreu*, das Bild einer Gerade g ist wiederum eine Gerade g'. Ausnahme: Fällt g mit einem Projektionsstrahl zusammen, so wird g' zu einem Punkt; in diesem Fall heißt g *projizierend*.

(P1) Die Bilder paralleler Geraden sind im Allgemeinen wieder parallel. (Ausnahmen: projizierende Geraden.)

(P2) Parallele Geradenstücke werden im gleichen Verhältnis verzerrt (*Teilverhältnistreue*).

(P3) Ebene Figuren erscheinen im Bild unverzerrt, wenn sie parallel zur Bildtafel liegen.

Allerdings sind Parallelprojektion weder winkel- noch längentreu. Unter senkrechter Parallelprojektion können sich Längen immerhin nicht vergrößern.

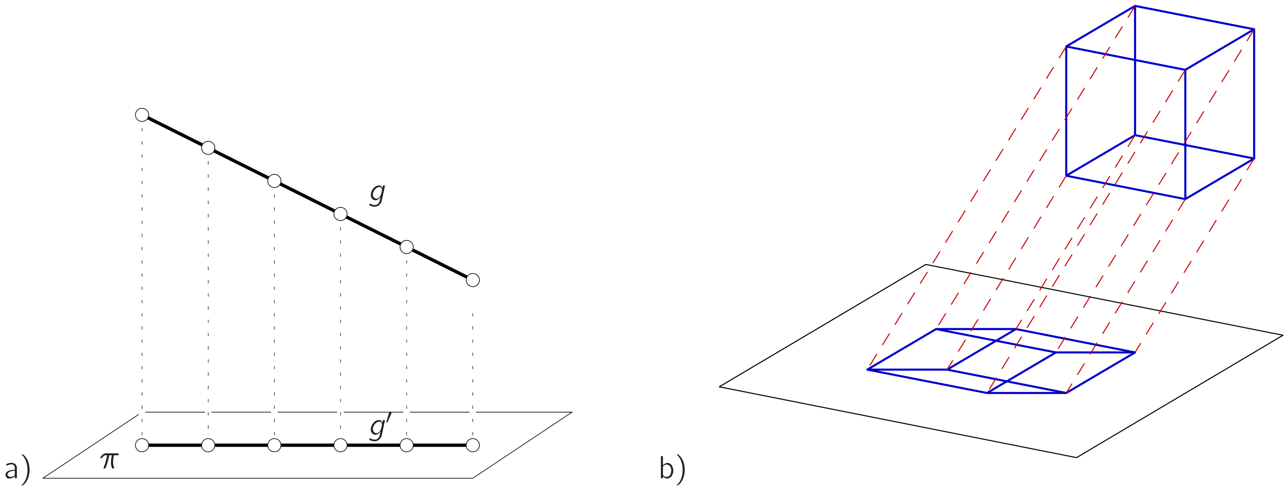


Abbildung 1.4: a) Teilverhältnistreue der Parallelprojektion b) Bei dieser schiefen Parallelprojektion bleiben Deckel und Boden des Würfels unverzerrt, während die vier vertikalen Kanten im gleichen Maß verzerrt sind, siehe auch Abb. 1.3b).

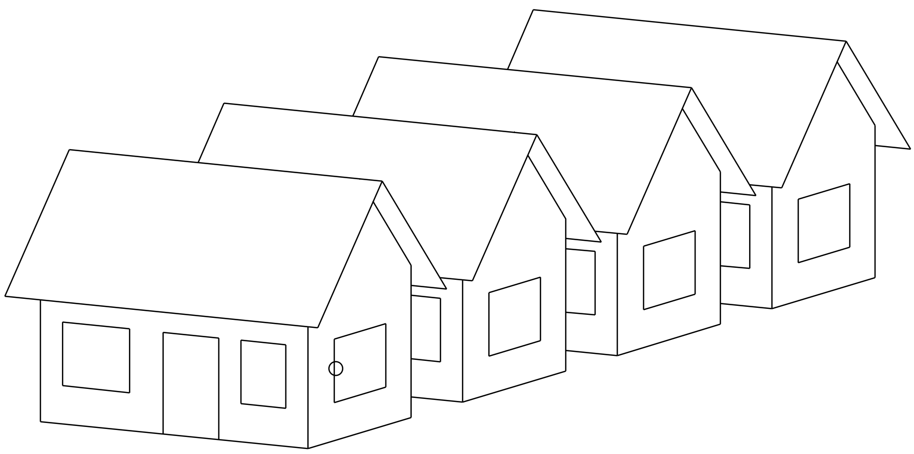


Abbildung 1.5: Häuser in Parallelprojektion

Wir werden uns in Kapitel 2 bis 4 näher mit der Parallelprojektion befassen.

1.3 Zentralprojektion

Abbildungsvorschrift

Bei Zentralprojektion gehen alle Abbildungsstrahlen durch einen Punkt, *Projektionszentrum* oder *Augpunkt* genannt. Dieses Abbildungsverfahren entspricht dem Schattenwurf durch eine nahe Punktlichtquelle. Es ist auch das Abbildungsverfahren, das der Fotografie oder dem Sehen mit einem Auge entspricht; daher ist die Bildwirkung natürlicher als bei Parallelprojektion.

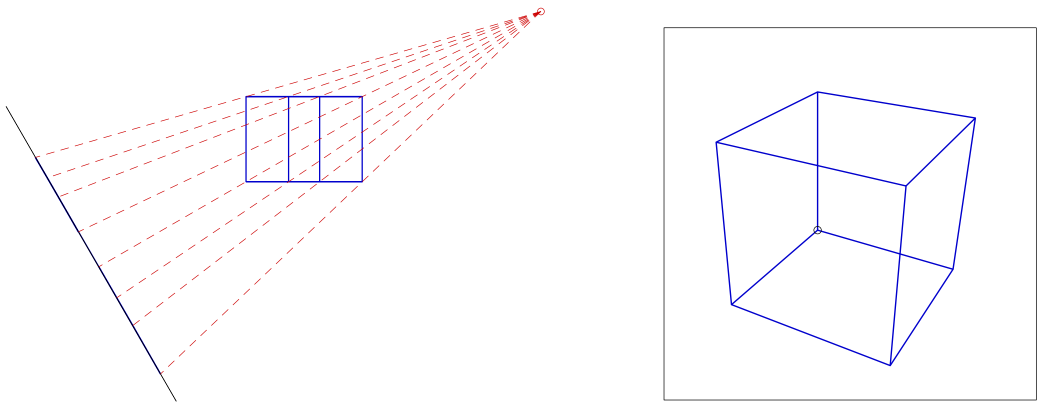


Abbildung 1.6: Würfel in Zentralprojektion

Eigenschaften der Zentralprojektion

Die Eigenschaften (P1) – (P3) gelten bei Zentralprojektion nicht, wie z.B. Abbildung 1.2 belegt. Aber es gilt:

(G) Geradentreue.

(Z) Die Bilder paralleler Geraden schneiden sich i.A. in einem Punkt, dem *Fluchtpunkt* der Geradenschar. Ausnahme: Die Bilder von parallelen Geraden, die in einer Ebene parallel zur Bildtafel liegen, bleiben parallel.

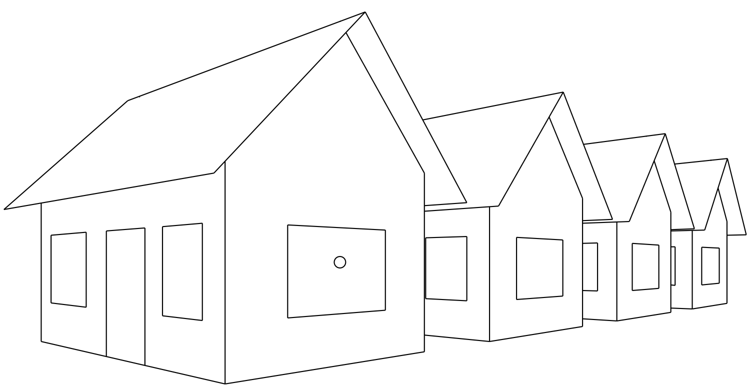


Abbildung 1.7: Häuser in Zentralprojektion

In Kapitel 5 werden wir die Zentralprojektion genauer untersuchen.

1.4 Grund– und Aufriss

Grund- und *Aufriss* sind spezielle senkrechte Parallelprojektionen auf zueinander senkrechte Ebenen.

Es seien dazu π_1, π_2 zwei aufeinander senkrecht stehende Ebenen: die **Grundrissebene** π_1 und die **Aufrissebene** π_2. Ihre Schnittgerade $k_{12} := \pi_1 \cap \pi_2$ nennen wir **Risskante**. Üblicherweise ist π_1 die horizontale xy-Ebene und π_2 die vertikale yz-Ebene, so dass k_{12} der y-Achse entspricht.

Projiziert man einen Punkt P *senkrecht* auf die Ebene π_1 bzw. π_2, so erhält man den *Grundriss* P' bzw. den *Aufriss* P'' von P. In Standard-Koordinaten hat $P = (x, y, z)$ den Grundriss $P' = (x, y)$ und den Aufriss $P'' = (y, z)$. Hat man noch eine weitere zu π_1 senkrechte Ebene π_3, so nennt man die Projektion $P''' = (*, z)$ von P auf π_3 einen **Seitenriss**.

In Architektur und technischen Zeichnungen stellt man Grund- und Aufriss in einer Zeichenebene dar. Man kann sich dazu vorstellen, dass man die Aufrisstafel π_2 um die Risskante k_{12} in die Grundrisstafel π_1 klappt. *Nach* dieser Umklappung liegen P' und P'' auf einer Senkrechten zur Risskante. Diese Senkrechte heißt **Ordner**; er verbindet $P' = (x, y)$ und $P'' = (y, z)$ mit konstantem y-Wert.

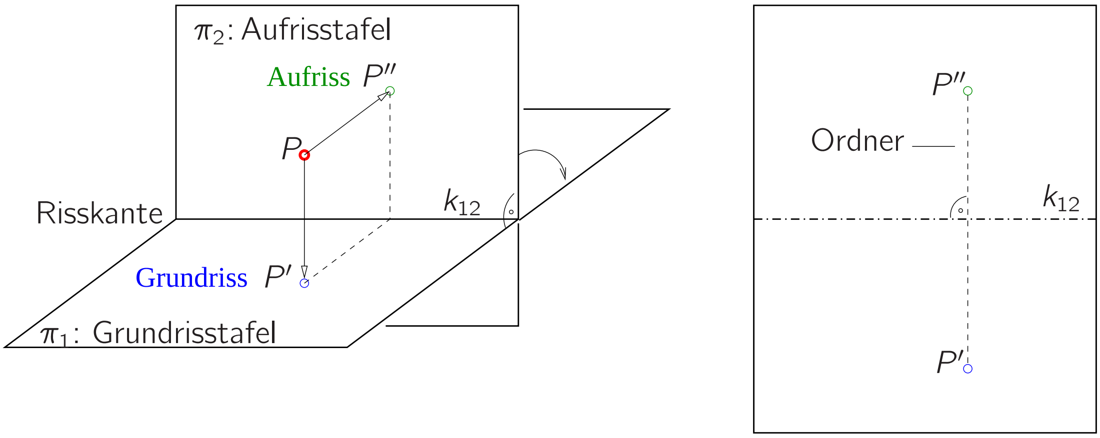


Abbildung 1.8: Grund- und Aufriss eines Punktes

Merke:
- Grundriss P' und Aufriss P'' eines Punktes liegen auf demselben Ordner!
- Ein Punkt P ist durch seinen Grund– und Aufriss eindeutig bestimmt.

Zur eindeutigen Beschreibung eines Punktes sind also **zwei** senkrechte Parallelprojektionen notwendig.

Im Folgenden sind Grund– und Aufrisse einiger Objekte gegeben, die den gleichen Grundriss besitzen.

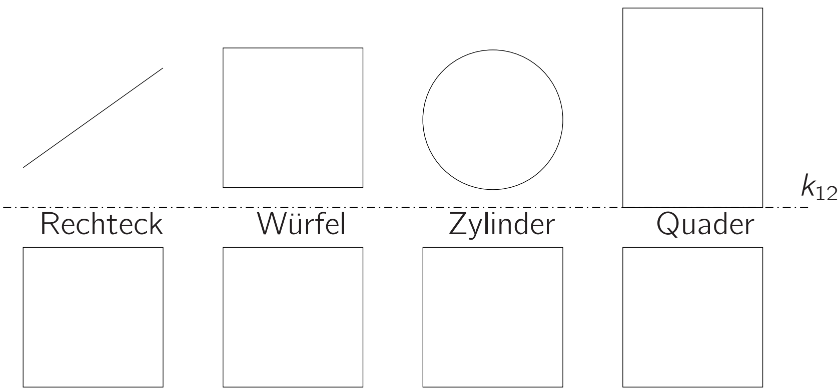


Abbildung 1.9: Verschiedene Objekte mit dem gleichen Grundriss

Kapitel 2

Parallelprojektion und Axonometrie

Wir werden Verfahren kennenlernen, die Parallelprojektionen herstellen: das *axonometrische Aufbauverfahren*, das *Einschneideverfahren*, und die *Umprojektion*. Danach befassen wir uns mit der Darstellung von Schatten.

2.1 Definierende Formel für die Axonometrie

(s. LEO S.67)

Eine Axonometrie ist eine Abbildung des Raumes in die Ebene, die über Koordinaten definiert ist.

Man führt im Raum ein geeignetes Koordinatensystem $(O; x, y, z)$ ein mit Ursprung O und Achsen x, y, z. Üblicherweise sind dies $O = (0,0,0)$ und die Achsenvektoren $\mathbf{e}_x = (1,0,0)$, $\mathbf{e}_y = (0,1,0)$, $\mathbf{e}_z = (0,0,1)$, die **rechtwinklig** sind und ein **Rechtssystem** bilden, d.h. ihre Orientierung entspricht der rechten-Hand-Regel.

In der Ebene π schreibt man nun die Bilder des Ursprungs O und der drei Koordinatenvektoren beliebig vor; wir bezeichnen die Bilder mit $\overline{\mathbf{O}}, \overline{\mathbf{e}}_x, \overline{\mathbf{e}}_y, \overline{\mathbf{e}}_z$. Das axonometrische Bild eines Punktes $P = (x, y, z)$ wird durch die Vorschrift $\overline{P} := \overline{\mathbf{O}} + x \cdot \overline{\mathbf{e}}_x + y \cdot \overline{\mathbf{e}}_y + z \cdot \overline{\mathbf{e}}_z$ gegeben. Die Längen der Bildvektoren kann man als Maßstäbe der Achsen verstehen oder auch als **Verzerrungsverhältnisse**, $v_x := |\overline{\mathbf{e}}_x|$, $v_y := |\overline{\mathbf{e}}_y|$, $v_z := |\overline{\mathbf{e}}_z|$.

Beispielsweise ist der Grundriss eine Axonometrie mit $\overline{\mathbf{O}} = (0,0)$ und $\overline{\mathbf{e}}_x = (1,0), \overline{\mathbf{e}}_y = (0,1), \overline{\mathbf{e}}_z = (0,0)$.

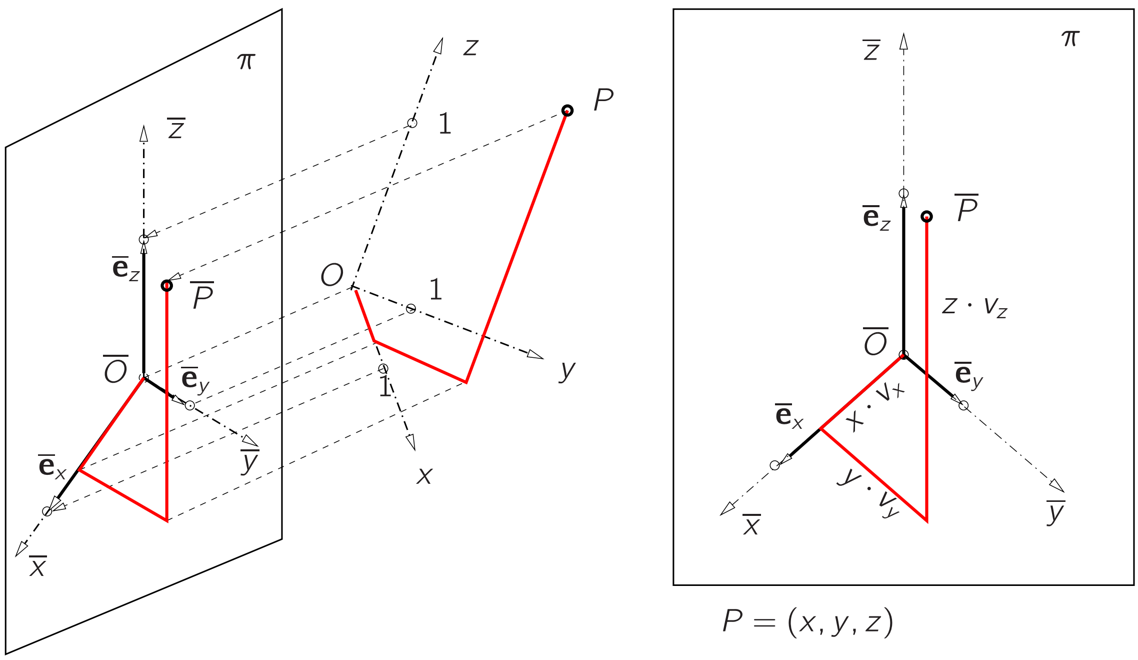


Abbildung 2.1: Axonometrie: Bilder der drei Koordinatenvektoren und eines Punktes P in der Ebene π

2.2 Axonometrisches Aufbauverfahren

Die geometrische Konstruktion, die der Axonometrie entspricht, nennt man auch **Aufbauverfahren**:

Durchführung : Gegeben $P = (x, y, z)$, gesucht $\overline{P}$.

Gehe in der Bildtafel von $\overline{O}$ aus
1. um $x \cdot v_x$ in $\overline{\mathbf{e}}_x$–Richtung und dann
2. um $y \cdot v_y$ in $\overline{\mathbf{e}}_y$–Richtung und dann
3. um $z \cdot v_z$ in $\overline{\mathbf{e}}_z$–Richtung.

(Die Reihenfolge kann beliebig vertauscht werden.)

Beim Zeichnen der Projektionen mehrerer Punkte sollte man vorhandene Parallelitäten (wie z.B. bei einem Quader) ausnutzen. Parallele Geraden gehen in parallele Geraden über.

Aufgabe 2.1 *Stelle axonometrische Bilder eines Hauses her (Abb. 2.2).*

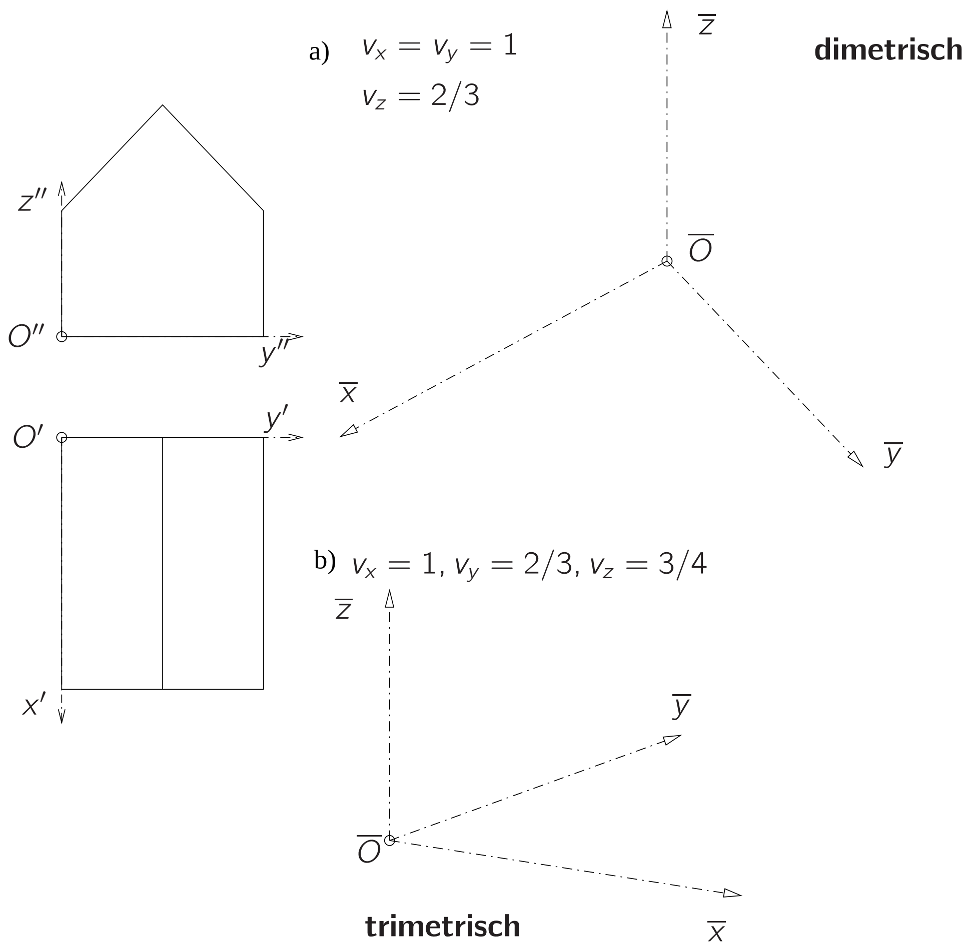
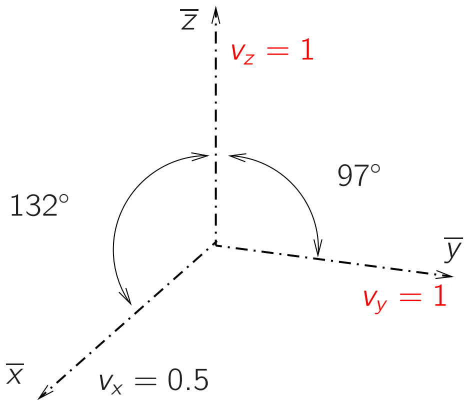


Abbildung 2.2: Axonometrien eines Hauses

Im ersten Beispiel stimmen die Maßstäbe in zwei Koordinatenrichtungen überein, im zweiten sind sie alle verschieden. Die Fachbegriffe dazu lauten:

- isometrische Axonometrie: die drei Verzerrungen sind gleich,
- dimetrische Axonometrie: zwei der drei Verzerrungen sind gleich,
- trimetrische Axonometrie: alle drei Verzerrungen sind verschieden.

2.3 Ingenieur–Axonometrie



Hierbei handelt es sich um folgende spezielle Axonometrie:

1. Die Verzerrungen sind $v_x = 0.5$, $v_y = v_z = 1$.
2. In der Projektion ist der
   Winkel zwischen der z–Achse und der x–Achse 132°,
   Winkel zwischen der z–Achse und der y–Achse 97°.

Die Vorteile der Ingenieur–Axonometrie sind:

- Durch die einfachen Verzerrungsverhältnisse ist sie leicht zu erstellen.
- Das axonometrische Bild ist nahezu eine um den Faktor 1.06 skalierte **senkrechte** Parallelprojektion.
- Die hierzu notwendigen Winkel von 7° und 42° sind auf vielen Geodreiecken markiert.
- Der Umriss einer Kugel ist in guter Näherung ein Kreis.

Aufgabe 2.2 *Zeichne von dem durch Grund– und Aufriss gegebenen Turm (Abb. 2.3) ein axonometrisches Bild in Ingenieur–Axonometrie.*

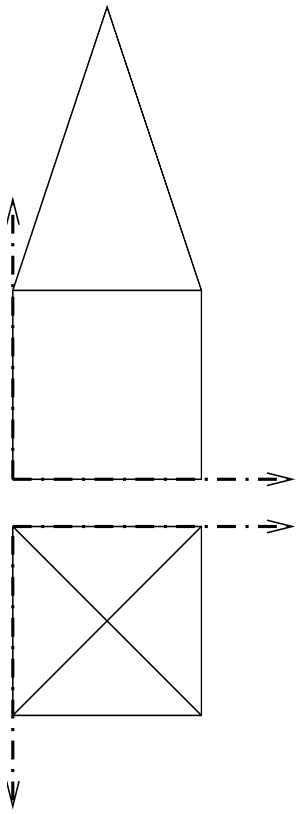


Abbildung 2.3: Aufgabe: Ingenieur–Axonometrie eines Turmes

Bemerkung:
Falls es geeignet erscheint, kann man auch die Winkel und Verzerrungen vertauschen:
a) $v_x = 1$, $v_y = 0.5$,
b) Winkel zwischen z–Achse und x–Achse: 97° und Winkel zwischen z–Achse und y–Achse: 132°.

2.4 Weitere spezielle Axonometrien

Nur eine gute Wahl der drei Vektoren $\overline{\mathbf{e}}_x, \overline{\mathbf{e}}_y, \overline{\mathbf{e}}_z$ führt zu einem anschaulichen Bild eines Gegenstandes, wie die folgenden axonometrischen Bilder des Einheitswürfels demonstrieren:

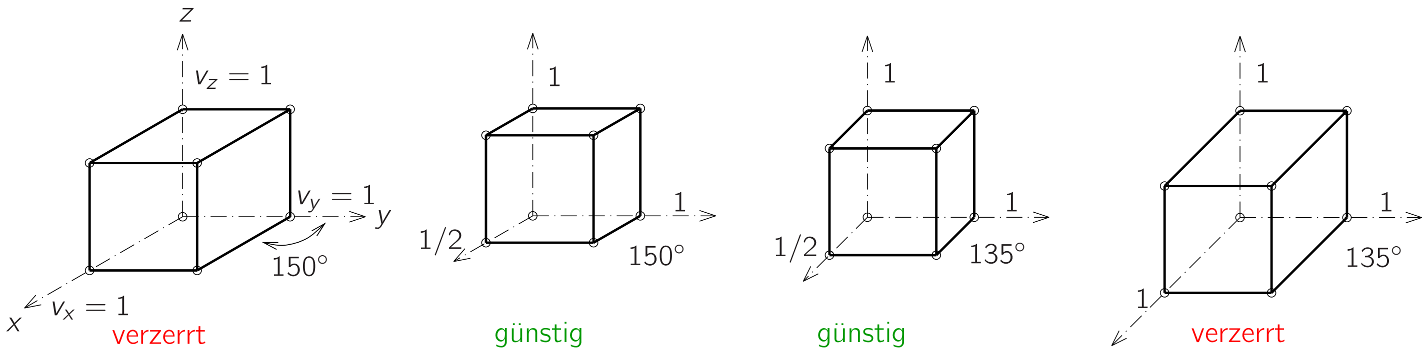


Abbildung 2.4: Verschiedene Axonometrien eines Würfels

Diese Beispiele sind einfach zu erzeugen, denn die beiden Bildvektoren $\overline{\mathbf{e}}_y$, $\overline{\mathbf{e}}_z$ stehen senkrecht aufeinander und haben Verzerrungsverhältnis $v_y = v_z = 1$. Jede solche Axonometrie heißt **Kavaliersperspektive**, wobei leider der Begriff *Perspektive* falsch gewählt ist. Von Objekten in der y, z-Ebene können die Koordinaten ungeändert übernommen werden; sie haben ein unverzerrtes, kongruentes Bild.

Gilt das gleiche für x, y anstelle von y, z, also $\overline{\mathbf{e}}_x \perp \overline{\mathbf{e}}_y$ und $v_x = v_y = 1$, so heißt die Axonometrie auch **Vogelperspektive**. Die Vogelperspektive ist ein einfaches Mittel, um z.B. Stadtpläne zu veranschaulichen. Beispiele finden Sie vielleicht in den Aufgaben.

2.5 Axonometrien sind Parallelprojektionen

Man kann einfach zeigen, dass jede Parallelprojektion eine Axonometrie ist. (Dies gilt wegen der Linearität der Parallelprojektion, wenn Sie diesen Begriff schon kennen.)

Auch wenn wir in unserem Rahmen keine Begründung dafür angeben können, sollten Sie wissen, dass umgekehrt

jede Axonometrie bis auf einen Vergrößerungs- oder Verkleinerungsfaktor eine Parallelprojektion ist,

wobei die Projektion im allgemeinen schief ist. Dies ist die Aussage des **Satzes von Pohlke** (1853). Man kann also das axonometrische Bild eines Objektes stets als Schattenwurf auf eine Ebene unter parallelem Licht erzeugen, jedenfalls bis auf Maßstabsänderung. Das heißt, die Axonometrie liefert eine mathematische Formel für unsere geometrisch definierten Parallelprojektionen.

Senkrechte Axonometrien, also Axonometrien, die einer senkrechten Parallelprojektion entsprechen, haben eine deutlich bessere Bildwirkung als schiefe Axonometrien. Es ist nicht offensichtlich, welche Wahlen von Bildvektoren $\overline{\mathbf{e}}_x, \overline{\mathbf{e}}_y, \overline{\mathbf{e}}_z$ zu senkrechten Parallelprojektionen gehören. Wir werden dieses Problem in Abschnitt 3.8 behandeln.

2.6 Einschneideverfahren

(s. LEO S.75)

Das **Einschneideverfahren** ist ein einfacher geometrischer Weg, um aus Grund- und Aufriss eine Axonometrie oder Parallelprojektion zu erhalten:

Vorgabe:

1. Grund- und Aufriss eines Objektes (allgemeiner: zwei zugeordnete orthogonale Projektionen) sind in vorgegebener Lage in der Zeichenebene π gegeben.
2. Zwei verschiedene *Einschneiderichtungen* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

Verfahren:

1. Durch die Risse P', P'' eines Punktes P werden je ein Strahl $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ in $\mathbf{e}_1$–, $\mathbf{e}_2$–Richtung gezogen.
2. $\mathbf{p}_1 \cap \mathbf{p}_2 = \overline{P}$ ist das axonometrische Bild von P.

Wir vereinbaren, dass nach demselben Verfahren als erstes die Bilder der drei Einheitsvektoren gezeichnet werden, so dass sich die Sichtbarkeit einfach kontrollieren läßt.

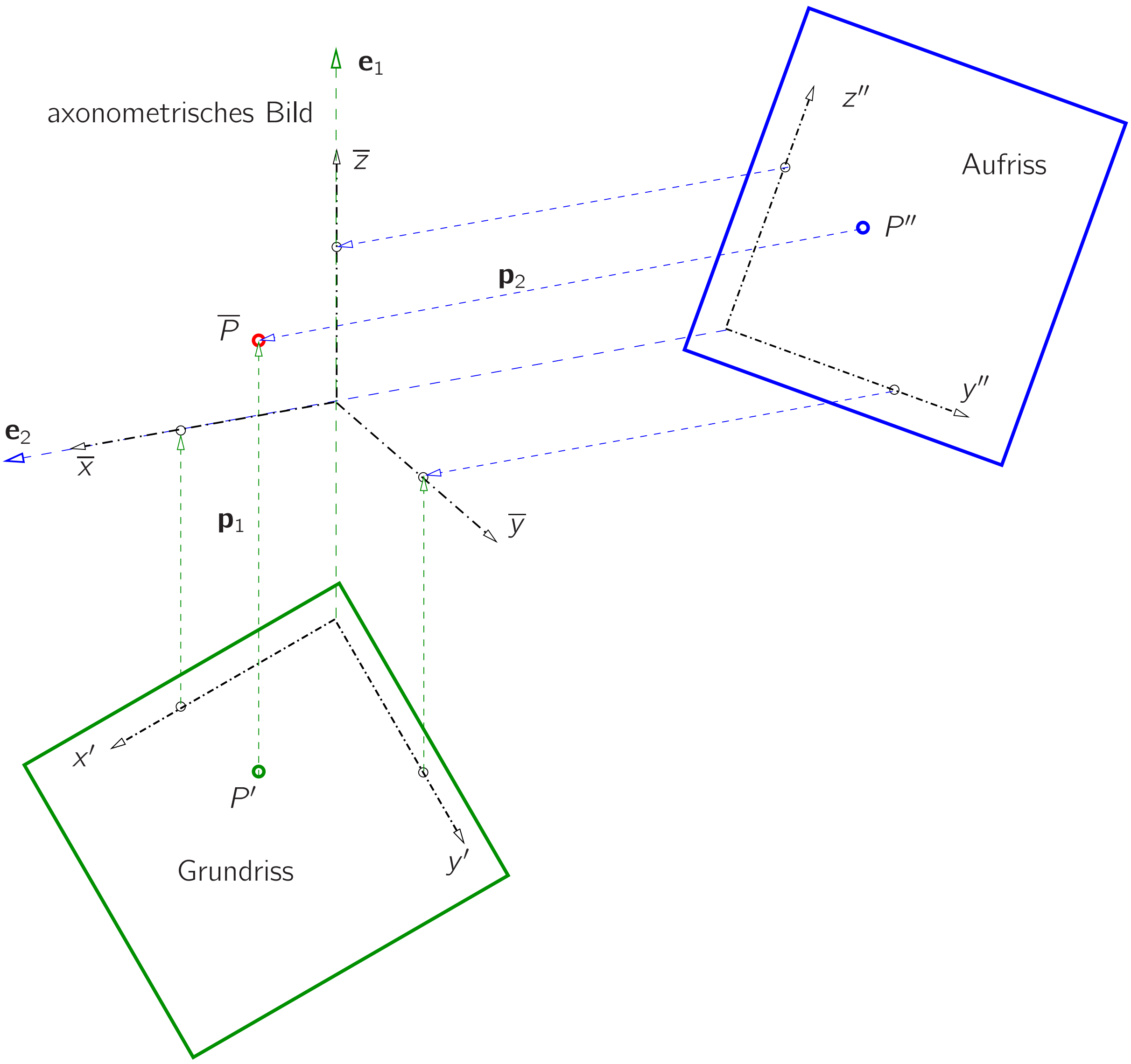


Abbildung 2.5: Einschneideverfahren

Aufgabe 2.3 *Stelle ein axonometrisches Bild eines Hauses mit Hilfe des Einschneideverfahrens her (Abb. 2.6).*

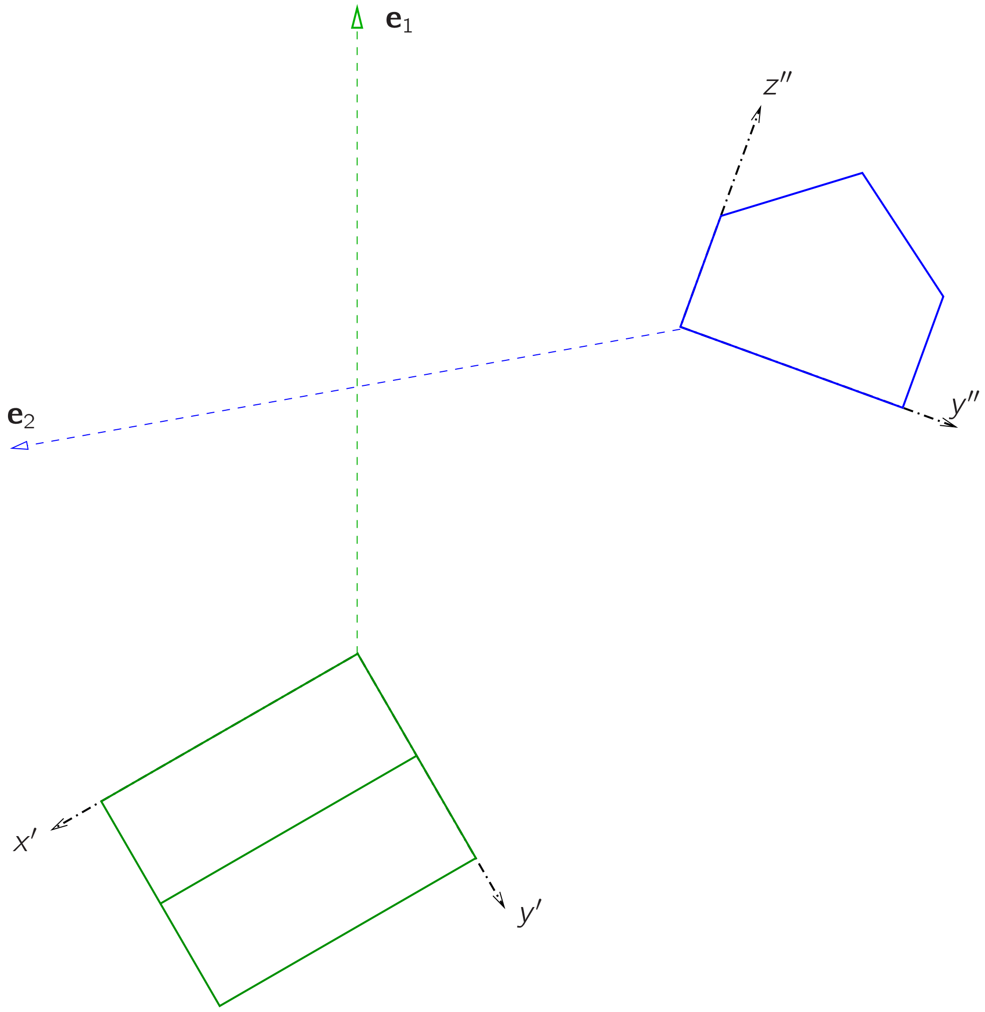


Abbildung 2.6: Einschneideverfahren: Haus

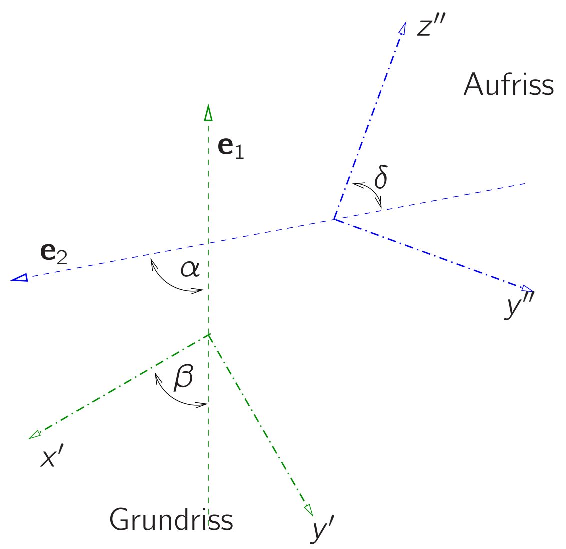


Abbildung 2.7: "Gute" Bilder bei: $\alpha = 50^o \ldots 90^o, \beta = 5^o \ldots \alpha, \delta \approx \beta$

2.7 Umprojektion

(s. LEO S.96)

Eine Umprojektion stellt aus Grund- und Aufriss eine neue senkrechte Parallelprojektion her. Die neue Projektionsebene ist allerdings nicht beliebig, sondern muss entweder auf der Grundriss- oder der Aufrissebene senkrecht stehen. In Abb. 2.8 steht die neue Projektionsebene π_3 senkrecht auf π_1, d.h. die Umprojektion ersetzt den Aufriss durch einen anderen Seitenriss. Eine Umprojektion ist beispielsweise dann nützlich, wenn Grund- und Aufriss ein Objekt in zu spezieller Lage zeigen und eine anschaulichere Projektion aus einer anderen Richtung gewünscht ist.

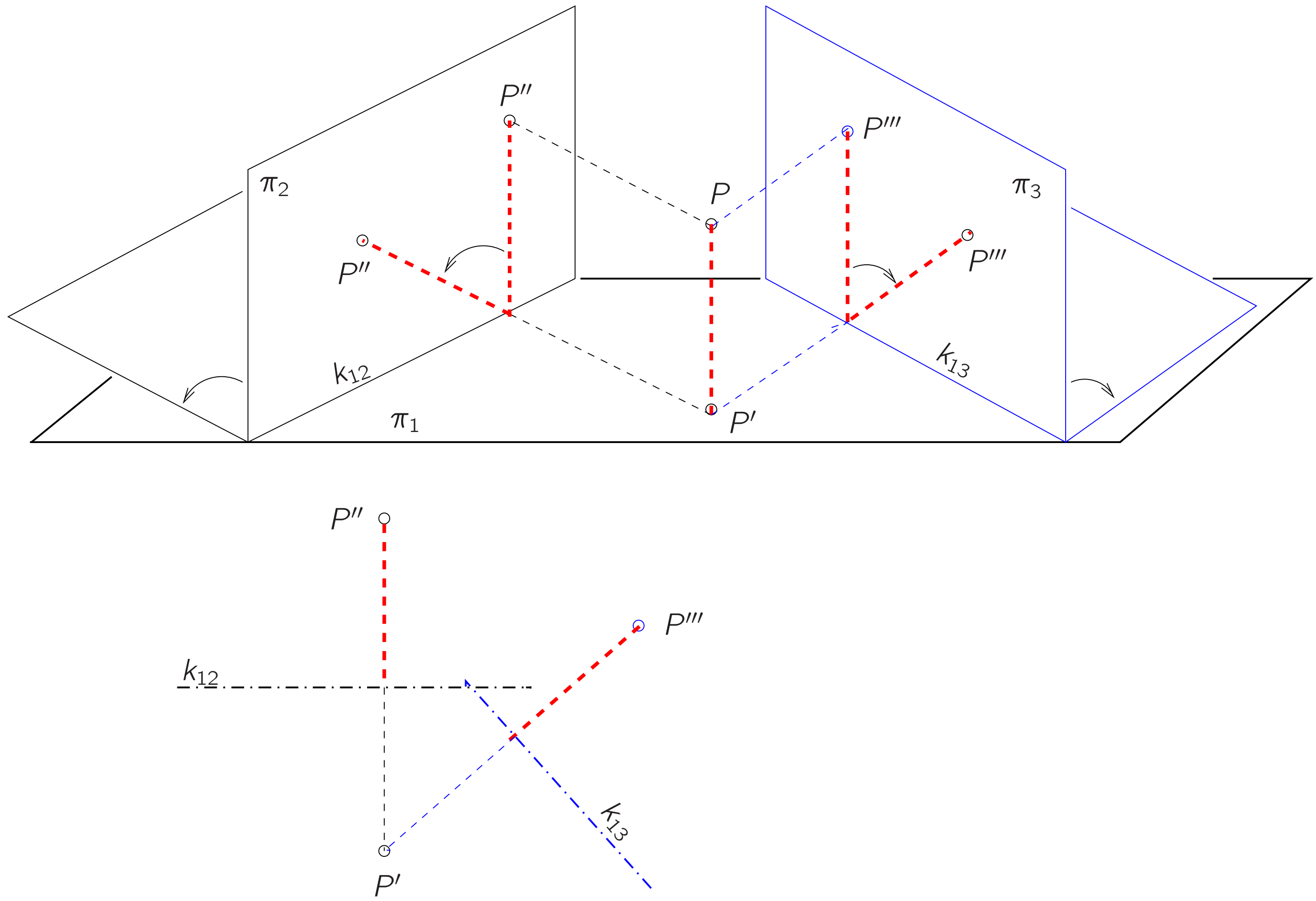


Abbildung 2.8: Umprojektion eines Punktes

Gegeben: Punkt P mit Grund- und Aufriss P', P'', sowie eine Risskante k_{13} für eine neue Aufrisstafel π_3.

Durchführung: Der gesuchte neue Aufriss P''' des Punktes P liegt

(1) auf der Senkrechten durch P' zur neuen Risskante k_{13} (neuer Ordner).

(2) Er hat denselben Abstand von k_{13} wie der alte Aufriss P'' von der alten Risskante k_{12}.

Veranschaulichen Sie sich die Umprojektion durch Hochfalten des Papiers entlang der beiden Risskanten.

Die Durchführung für den Fall, dass π_3 senkrecht auf der Aufrisstafel π_2 steht, verläuft analog (Abb. 2.9).

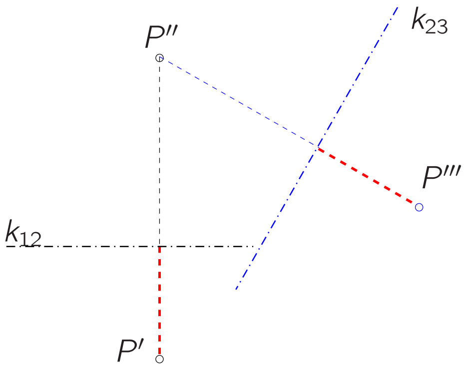


Abbildung 2.9: Umprojektion eines Punktes (Grundriss wird ersetzt)

Aufgabe 2.4 *Stelle durch Umprojektion ein anschauliches Bild eines Hauses her (Abb. 2.10).*

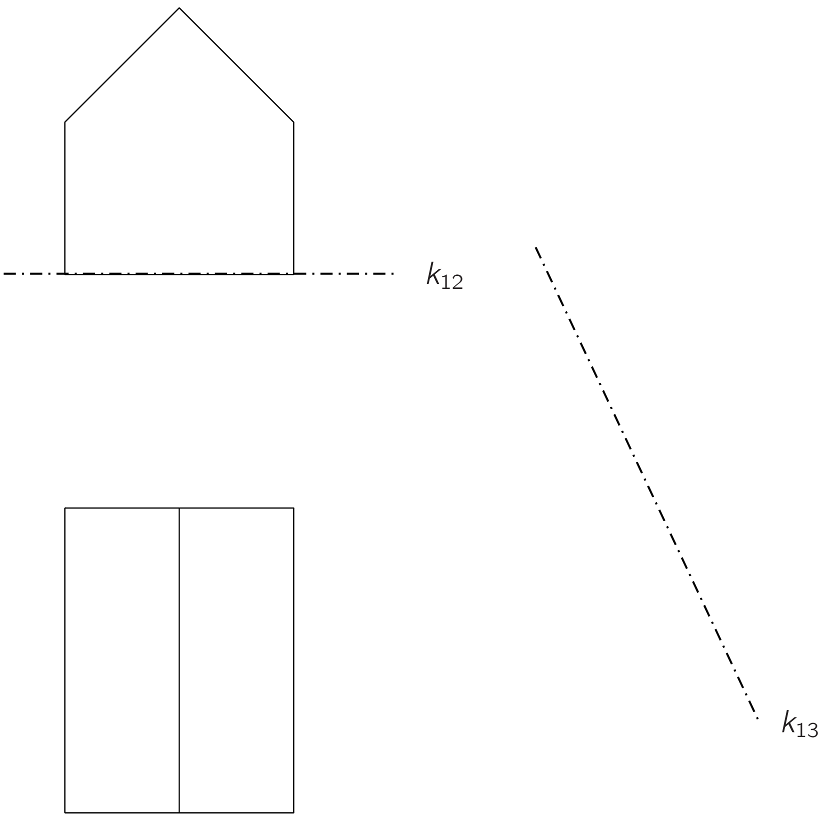


Abbildung 2.10: Umprojektion eines Hauses

Die Blickrichtung v entscheidet über die Sichtbarkeit; es ist daher sinnvoll, sie in die Umprojektion einzutragen. Im letzten Beispiel projiziert die Blickrichtung v in π_3 auf einen Punkt v''', aus dem wir v' und v'' in Umkehrung des Verfahrens gewinnen können. Man muss dabei nur Anfangs- und Endpunkt des Vektors umprojizieren.

Man kann auch eine beliebige Blickrichtung v durch v' und v'' vorgeben und eine Parallelprojektion in Richtung v durch doppelte Umprojektion erzeugen.

Aufgabe 2.5 *Stelle durch Umprojektion ein anschauliches Bild einer Pyramide her (Abb. 2.11).*

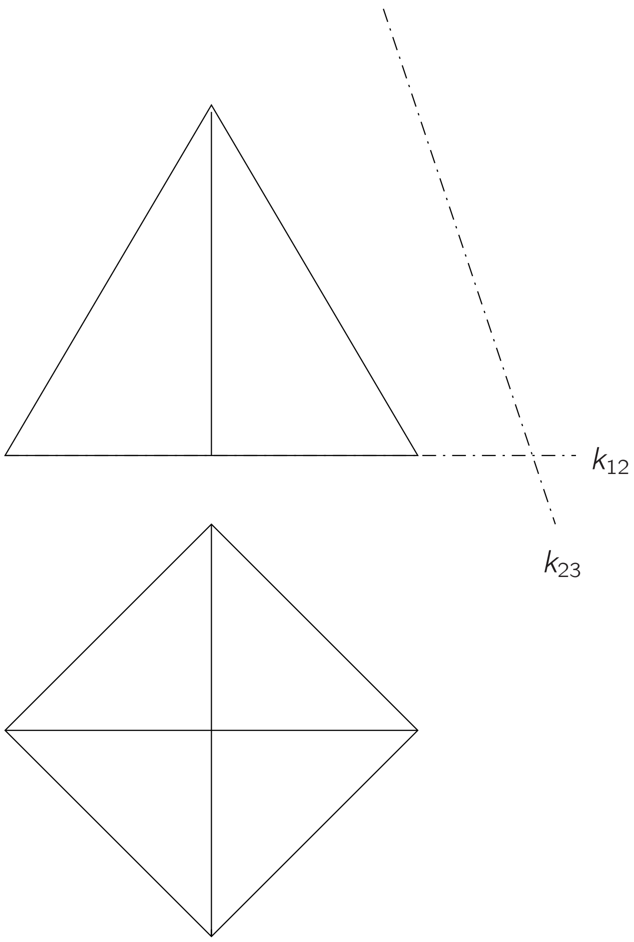


Abbildung 2.11: Umprojektion einer Pyramide (Grundriss wird ersetzt)

Umprojektionen können mehrfach hintereinander durchgeführt werden. Sinnvoll ist eine **doppelte Umprojektion**, denn dadurch kann man aus Grund- und Aufriss eine Parallelprojektion auf eine beliebige Projektionsebene herstellen. Dabei entnimmt man dem jeweils wegfallenden Riss den Abstand zur neuen Risskante.

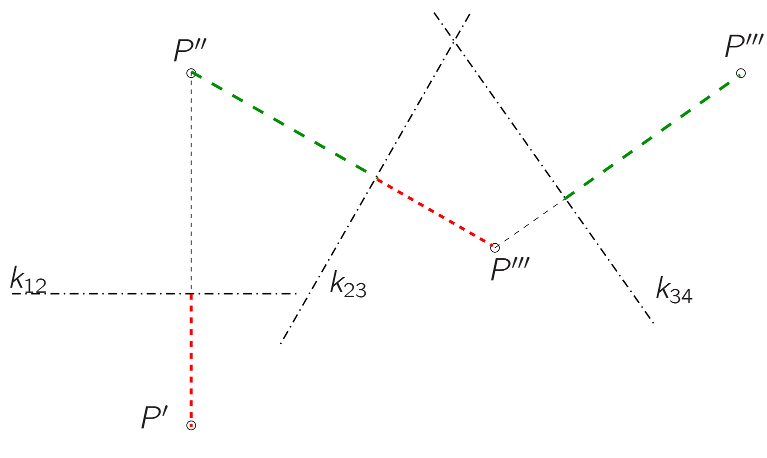


Abbildung 2.12: Mehrfachumprojektion eines Punktes

2.8 Schatten bei parallelem Licht

(s. LEO S.172)

Der räumliche Eindruck eines Bildes verbessert sich deutlich, wenn man Schatten berücksichtigt. Wir betrachten zuerst den Fall von **parallelem** Licht. Hierbei sind alle Lichtstrahlen parallel, wie beispielsweise für Sonnenlicht in guter Näherung.

Wir betrachten zuerst den Schattenwurf einer Geraden g auf eine Ebene, z.B. die Grundrissebene π_1. Alle Lichtstrahlen, die g treffen, bilden eine Ebene ε. Diese Ebene und die Bildebene schneiden sich daher in einer Geraden $h = \varepsilon \cap \pi_1$. Der Schattenwurf einer Geraden auf eine Ebene ist also wieder eine Gerade. Zur Konstruktion des Schattens h von g reicht es daher, zwei Punkte aus h zu kennen. Im folgenden werden wir den Schattenwurf einer Strecke als geradlinige Verbindung der Schattenwürfe ihrer Endpunkte finden.

Vorgabe: Axonometrie mit Lichtstrahl ℓ und Projektion ℓ' in die Grundrissebene.
Konstruktion:

1. Konstruiere zu P die Grundrissprojektion P'.
2. Schneide eine zum Strahl ℓ parallele Gerade durch P mit der zur Lichtstrahlprojektion ℓ' parallelen Geraden durch P'. Der Schnittpunkt ist der Schattenwurf $\tilde{P}$ von P auf die Grundrissebene.
3. Um den Schattenwurf auf Objekte zu konstruieren, beachte: Wenn eine Strecke parallel zu einer Ebene ist, so sind die Strecke und ihr Schattenwurf auf die Ebene parallel. Das gleiche gilt nach Parallelprojektion, also in der Axonometrie.

Aufgabe 2.6 *Ein in Axonometrie gegebenes Haus werde parallel beleuchtet. Die Lichtrichtung ℓ und ihre Projektion $\overline{\ell}'$ sind gegeben. Zeichne den Schatten. Ist die rechte Dachfläche beleuchtet?*

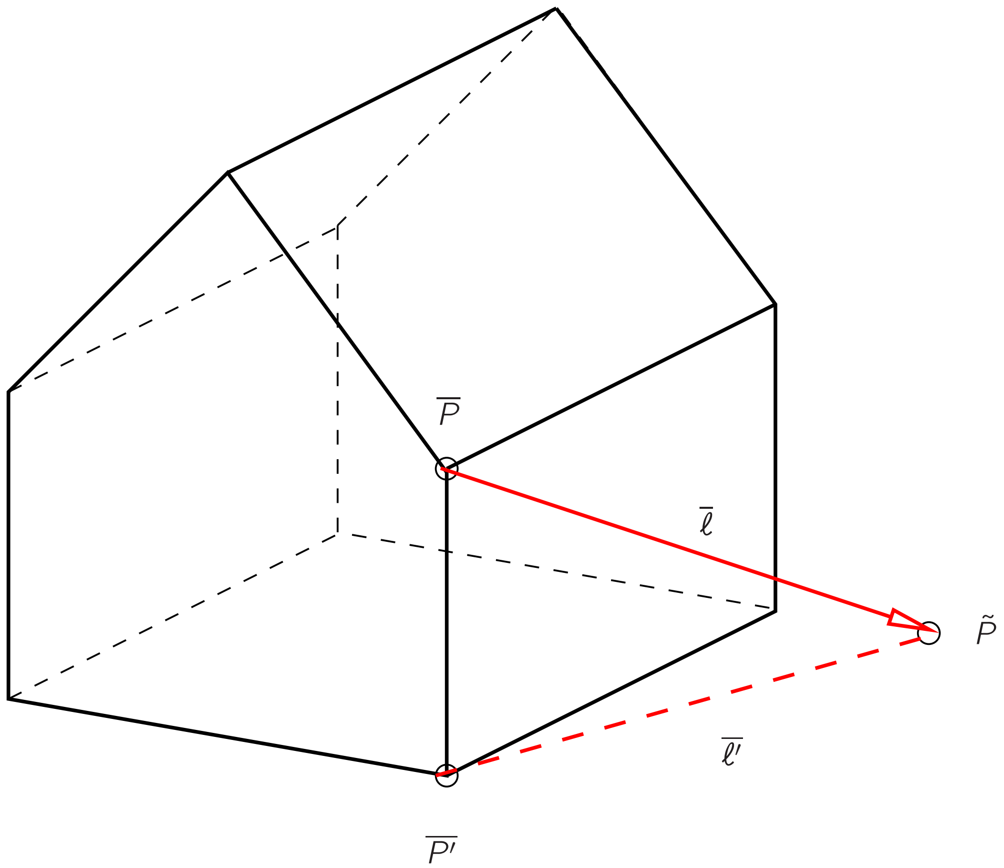


Abbildung 2.13: Schatten eines Hauses bei parallelem Licht

Es ist üblich, folgende Dinge beim Zeichnen von Schatten zu unterscheiden:

- Der **Schlagschatten** ist der Schattenwurf eines Objektes auf die Grundrissebene oder auf andere Objekte.
- Der **Eigenschatten** bezeichnet Flächen eines Objektes die im Schattenwurf desselben Objektes liegen.
- Die **Schattengrenze** ist eine Kurve auf dem Objekt, die beleuchtete Teile vom Eigenschatten abgrenzt.

Es ist sinnvoll, den Schatten durch graue Schattierung oder durch Schraffierung einzutragen. Der Übersichtlichkeit halber vereinbaren wir aber, dies nur dann zu tun, wenn die Fläche oder der Schattenwurf sichtbar ist. Bei nicht sichtbarem Schattenwurf wollen wir nur die Randlinie andeuten.

Manchmal sieht man nicht sofort, welche Kanten des Objekts auf der Schattengrenze liegen. In diesem Fall hilft es, den Schatten sämtlicher Kanten des Objekts zu betrachten: Die am weitesten außen liegenden Schattenwürfe beranden den Schlagschatten und werden von der Schattengrenze erzeugt.

In wichtigen Fällen sind eine Gerade und ihr Schattenwurf parallel:
• Vertikale Geraden werfen auf vertikale Flächen auch vertikale Schatten.
• Eine horizontale Gerade wirft auf eine horizontale Fläche einen zu ihr parallelen Schatten.
Dies folgt aus dem allgemeinen Prinzip: *Zwei parallele Ebenen werden von einer weiteren Ebene in zwei parallelen Geraden geschnitten.* In unserer Anwendung ist die genannte weitere Ebene durch den Schattenwurf der Geraden im Raum gegeben.

Aufgabe 2.7 *In Abb. 2.14 ist ein axonometrisches Bild zweier Quader mit Grundfläche in der Grundrissebene gegeben, ferner die Lichtrichtung ℓ und ihre Projektion ℓ' in die Grundrissebene. Zeichne den Schatten.*

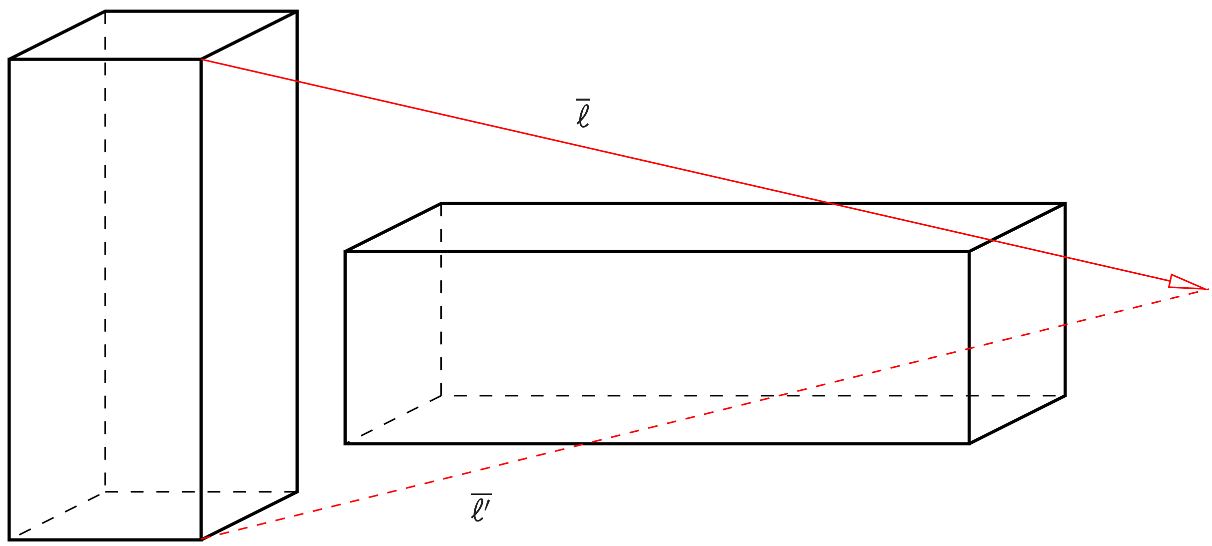


Abbildung 2.14: Schatten zweier Quader bei parallelem Licht

2.9 Schatten bei zentralem Licht

(s. LEO S.181)

Bei einer **zentralen** Lichtquelle gehen alle Lichtstrahlen von einem Punkt, der Lichtquelle L, aus. Auch in diesem Fall ist der Schattenwurf einer Geraden g im Raum in einer Ebene ε enthalten, die durch sämtliche durch g laufende Lichtstrahlen aufgespannt wird. Die Ebene ε enthält also die Punktlichtquelle L und die Gerade g. Die Grundrissebene (oder jede andere Ebene) wird von ε in einer Geraden geschnitten.

Diese Überlegung ergibt folgendes Konstruktionsverfahren für Schatten:

Vorgabe: Axonometrie mit Punkt-Lichtquelle L und ihrem Fußpunkt L'.
Konstruktion:

1. Konstruiere zu P die Grundrissprojektion P'.
2. Der Schattenwurf $\tilde{P}$ von P in der Grundrissebene ist der Schnittpunkt der Geraden LP und $L'P'$.
3. Um den Schattenwurf auf Objekte zu konstruieren, verfolgt man sukzessive den Schattenwurf längs Kanten des Objekts. Beachte dabei: Wenn eine Strecke parallel zu einer Ebene ist, so sind die Strecke und ihr Schattenwurf auf die Ebene parallel.

Zur Begründung dieses Verfahrens nimmt man als Gerade g die Verbindung $P'P$. Die Ebene ε enthält außer g auch den speziellen Lichtstrahl LL'. Die Ebene schneidet daher die Grundrissebene in einer Geraden, die die beiden Punkte L' und P' enthält.

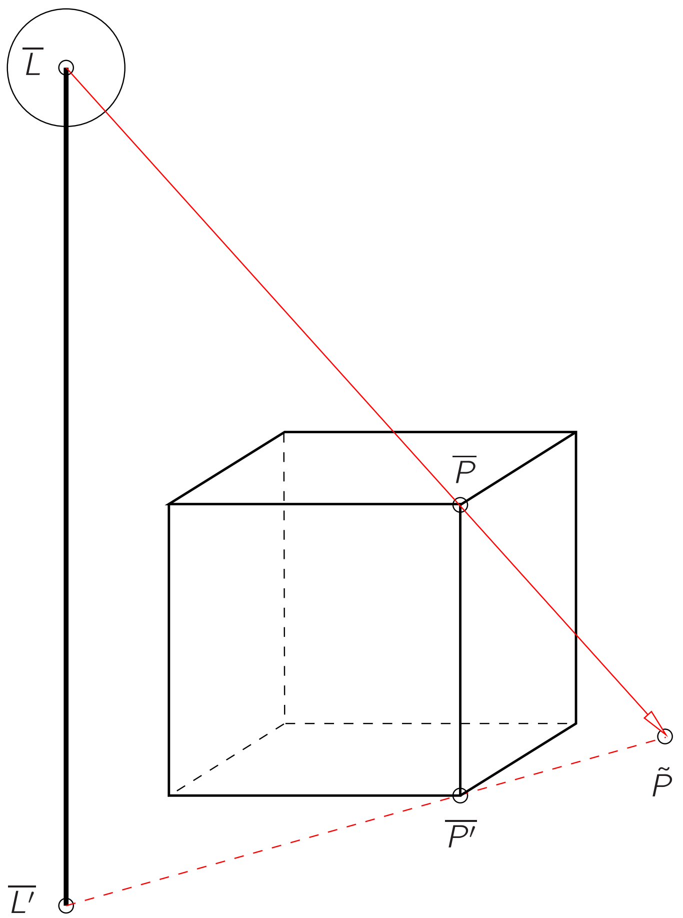


Abbildung 2.15: Schatten eines Quaders bei zentralem Licht

Aufgabe 2.8 *Zeichne den Schattenwurf des Hauses bei Beleuchtung durch die Lichtquelle L in das axonometrische Bild Abb. 2.16. Wirft der First einen Schatten?*

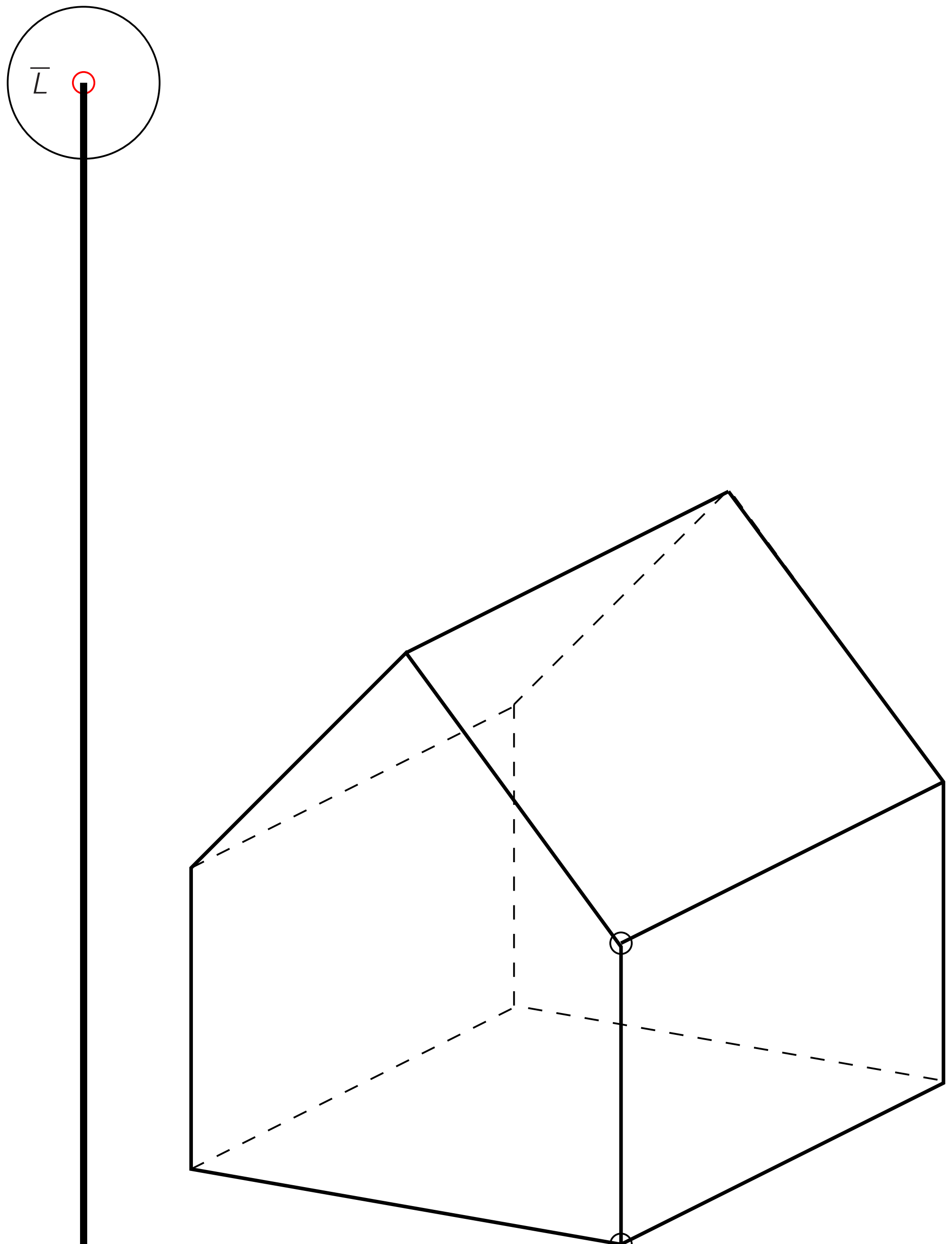


Abbildung 2.16: Schatten eines Hauses bei zentralem Licht

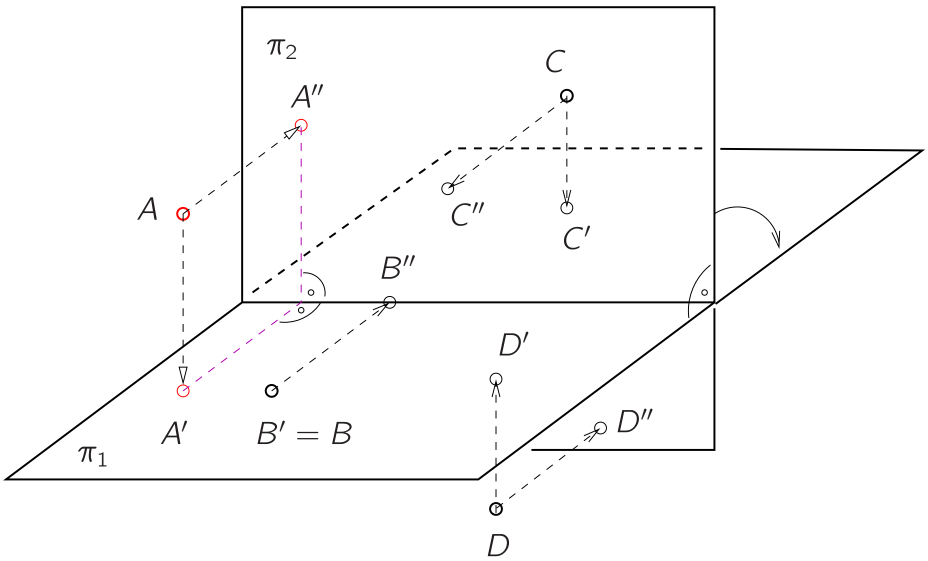
Kapitel 3

Zwei– und Mehrtafelprojektion, Dachausmittelung

Wir befassen uns nun systematischer mit der Darstellung von Objekten in Grund- und Aufriss, der sogenannten Zweitafelprojektion. In Abschnitt 1.4 sind die Begriffe *Risskante* und *Ordner* erklärt, die wir nun benötigen.

3.1 Zweitafelprojektion eines Punktes (s. LEO S.82)

Die nächste Zeichnung zeigt Punkte A und D in allgemeiner Lage, während B und C in Grund- bzw. Aufrissebene liegen.



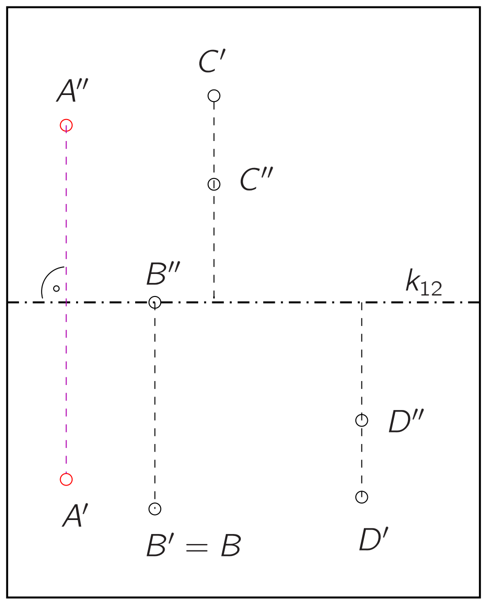


Abbildung 3.1: Zweitafelprojektion von Punkten

Der Punkt D belegt, dass der Aufriss eines Punktes nicht immer oberhalb der Risskante liegen muss. Normalerweise sorgt man aber dafür, dass dieser Fall nicht eintritt. Analog muss der Grundriss eines Punktes nicht immer unterhalb der Risskante liegen.

Im folgenden Beispiel bestimmt man den Grundriss eines Punktes, indem man den Punkt als den eindeutig bestimmten Schnittpunkt zweier sich schneidender Geraden darstellt.

Aufgabe 3.1 *Durch die Punkte A, B, C ist eine Ebene ε gegeben (Abb. 3.2). Von einem Punkt $P \in \varepsilon$ ist P'' bekannt. Bestimme P'.*

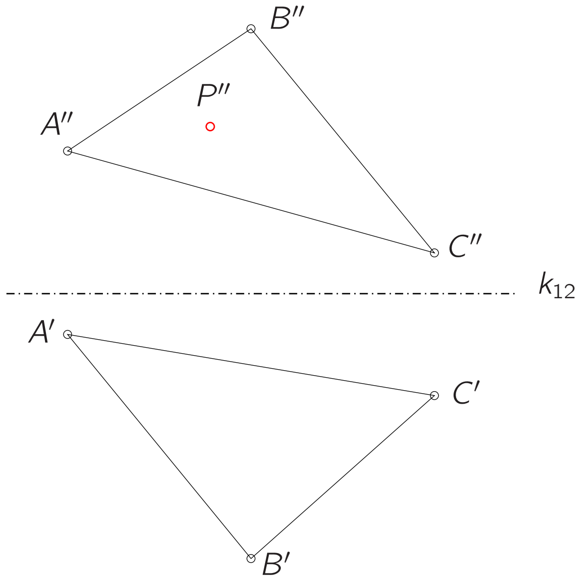


Abbildung 3.2: Punkt in einem Dreieck

Im folgenden Beispiel ist die Lage von Punkten leicht durch das Ausnutzen von Parallelitäten zu bestimmen.

Aufgabe 3.2 *Gegeben: Satteldach eines Hauses und der Grundriss zweier Reklamebuchstaben auf einer Dachfläche (Abb. 3.3). Gesucht: Aufriss der Buchstaben.*

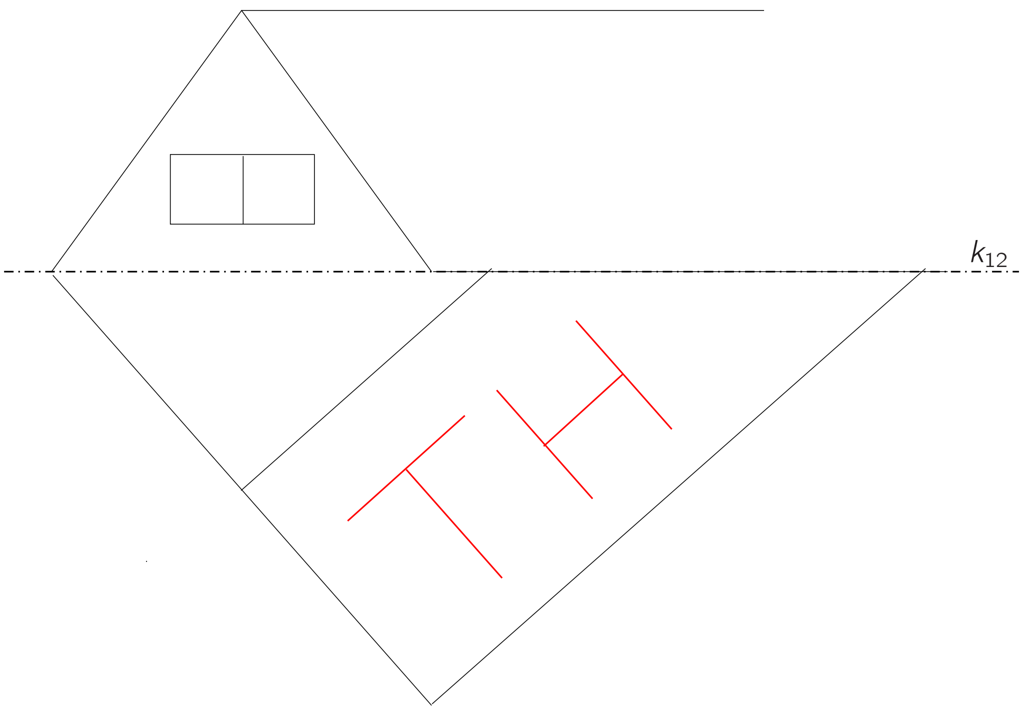


Abbildung 3.3: Reklame auf einem Dach

3.2 Zweitafelprojektion von Geraden

(s. LEO S.83,89)

Eine Gerade

Die Projektion einer Geraden ist i.A. wieder eine Gerade:

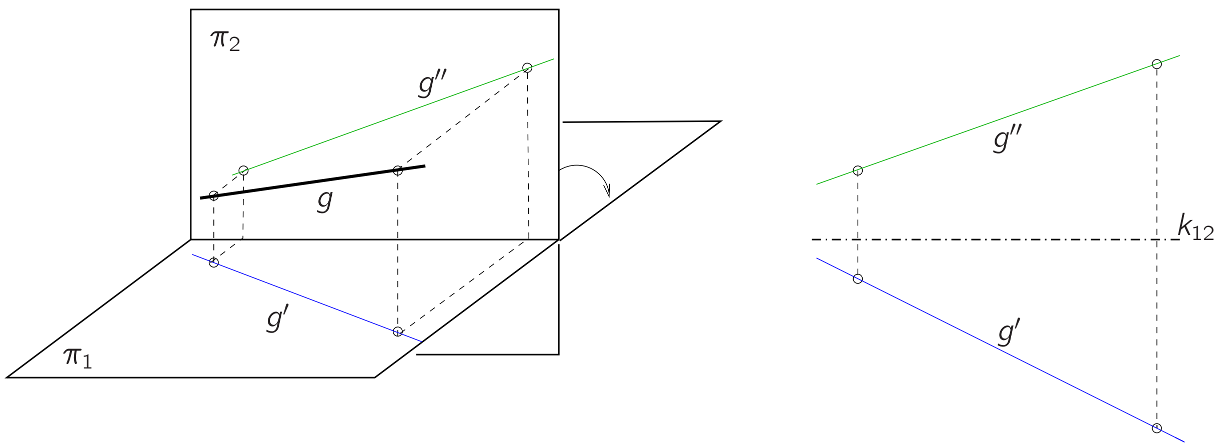


Abbildung 3.4: Zweitafelprojektion einer Gerade

Wir wollen folgende Begriffe für Sonderlagen von Geraden verwenden:
• Eine **Höhenlinie** ist eine zu π_1 parallele Gerade, d.h. z ist konstant.
• Eine **Frontlinie** ist eine zu π_2 parallele Gerade mit x konstant.
Eine **Hauptgerade** ist eine Höhenlinie oder eine Frontlinie. Eine für Maßaufgaben wichtige Eigenschaft von Hauptgeraden ist:

Der Grundriss einer Höhenlinie ist unverzerrt. Der Aufriss einer Frontlinie ist unverzerrt.

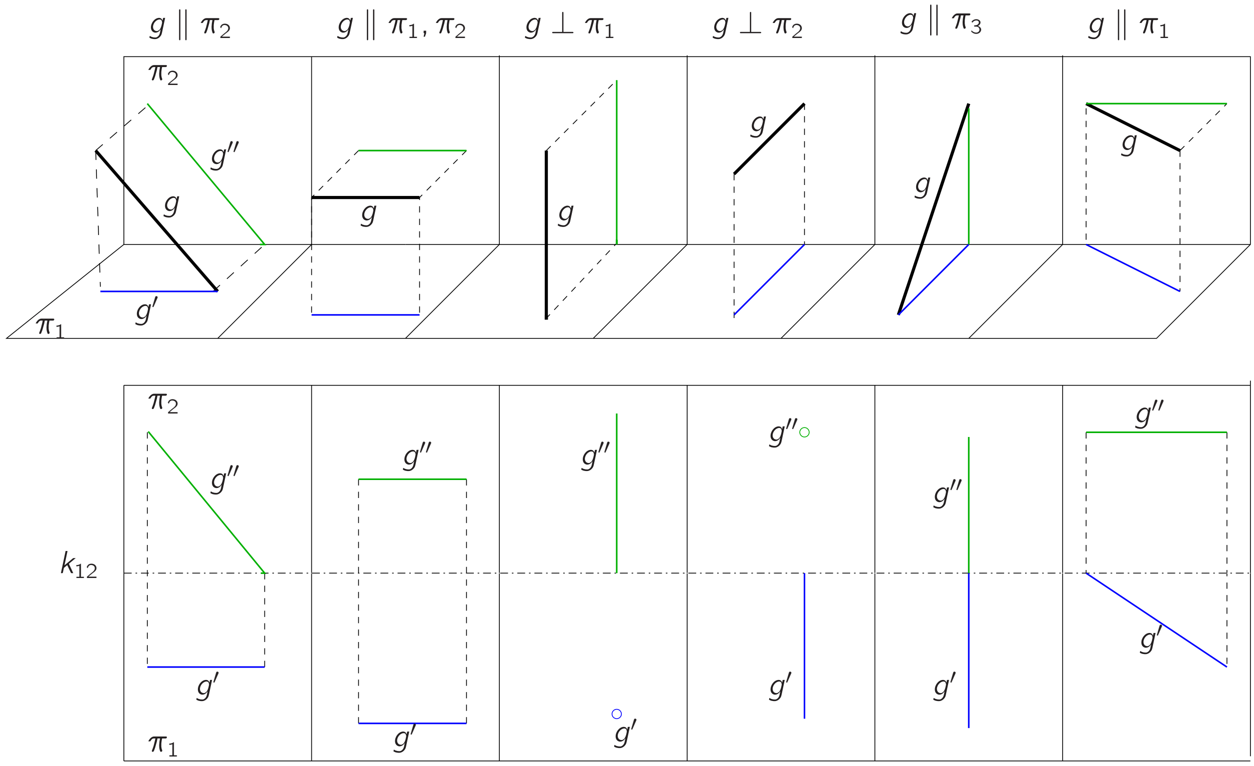


Abbildung 3.5: Sonderlagen von Geraden

Die Durchstoßpunkte einer Geraden g mit den Risstafeln nennt man **Spurpunkte** von g.

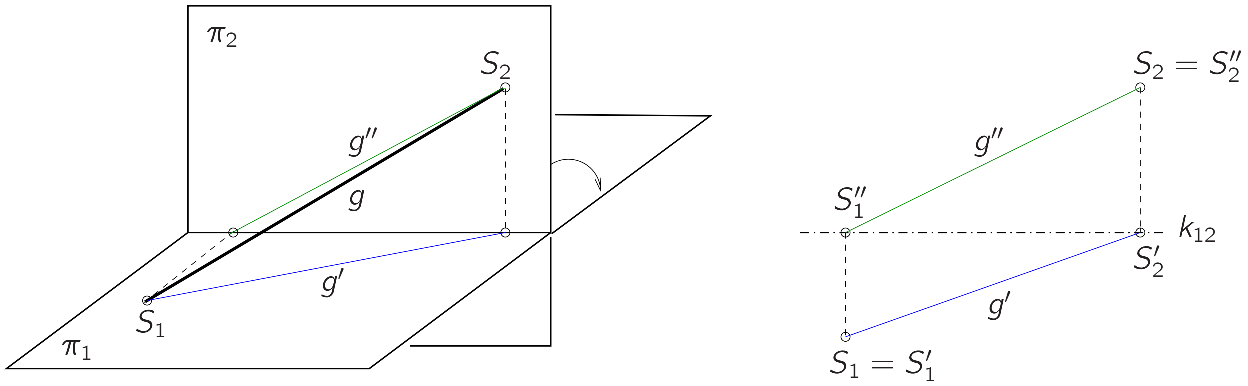


Abbildung 3.6: Spurpunkte $S_1 = g \cap \pi_1$ und $S_2 = g \cap \pi_2$ der Geraden g

Zwei und mehr Geraden

Für zwei verschiedene Geraden g, h gibt es drei verschiedene Möglichkeiten:
a) Sie *schneiden sich in einem Punkt* $S = g \cap h$, oder
b) sie sind *parallel*, $g \| h$.
c) Wir nennen sie **windschief**, wenn sie weder parallel sind noch sich schneiden.

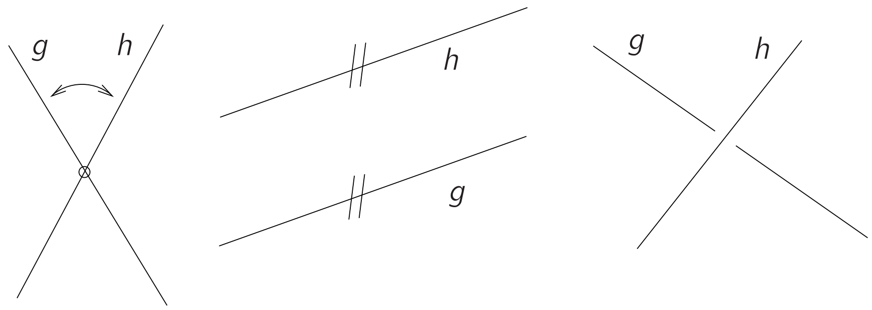


Abbildung 3.7: Sich schneidende, parallele, windschiefe Geraden

Wir untersuchen nun, wie diese drei Fälle in Grund- und Aufriss erscheinen.

a) Die Parallelprojektionen von *parallelen* Geraden ist wieder parallel. Wir sehen das in Grund- und Aufriss:

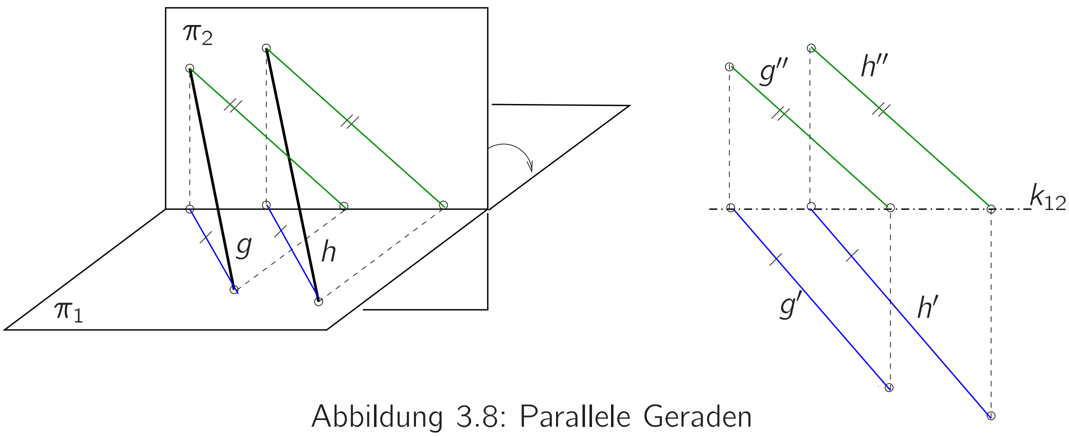


Abbildung 3.8: Parallele Geraden

b) *Schneiden* sich zwei Geraden g, h in einem Punkt S, so müssen $S' \in \pi_1$ und $S'' \in \pi_2$ auf einem Ordner liegen:

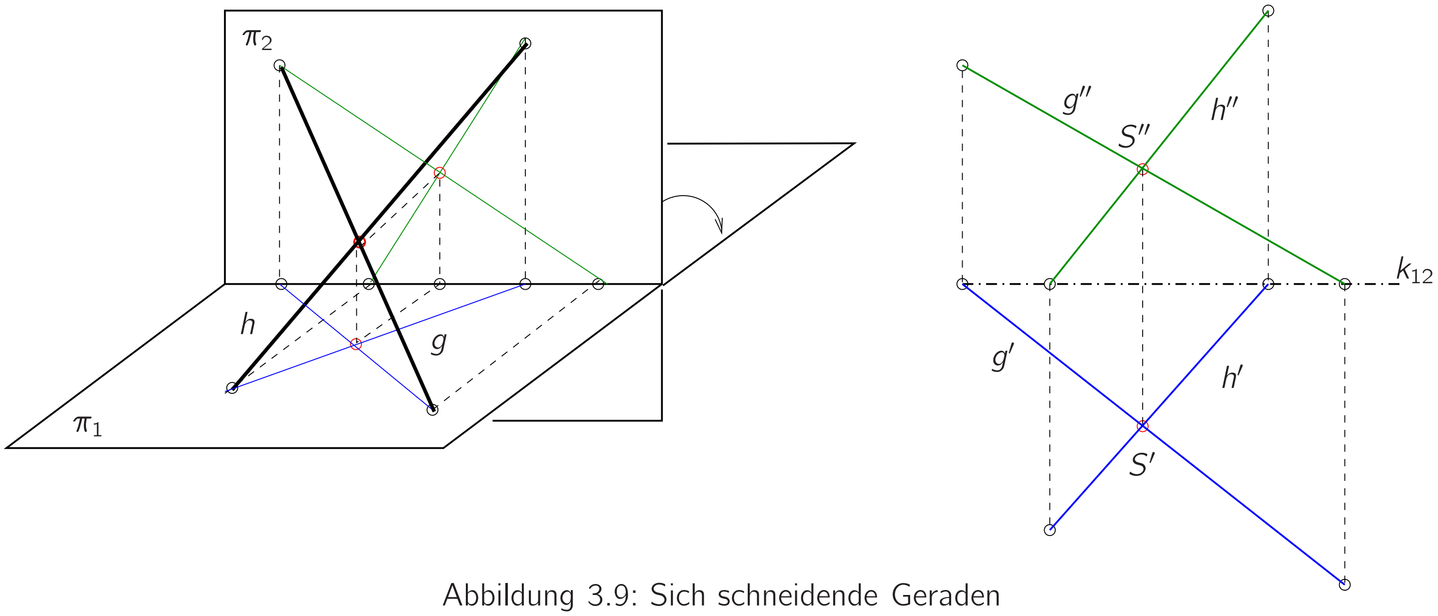


Abbildung 3.9: Sich schneidende Geraden

c) Betrachten wir schließlich den Fall zweier zueinander *windschiefer* Geraden g, h. Es sei $S' \in \pi_1$ der Schnittpunkt von g' und h' im Grundriss, und $T'' \in \pi_2$ der Schnittpunkt von g'' und h'' im Aufriss. Da diese beiden Punkte *nicht* zu nur einem Punkt im Raum gehören, müssen S' und T'' auf zwei verschiedenen Ordner liegen. siehe Abb. 3.10.

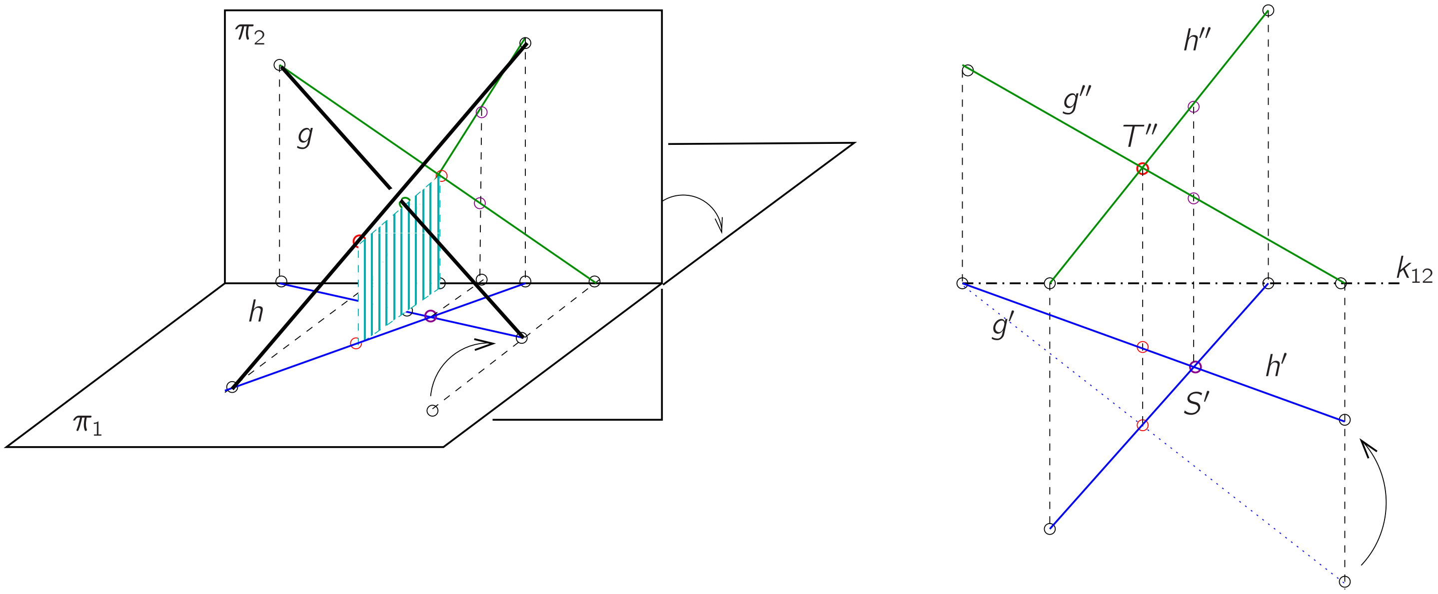


Abbildung 3.10: Windschiefe Geraden (eine Gerade aus Abb. 3.9 wird bewegt)

Wir halten als Ergebnis der letzten beiden Fälle fest:

> Zwei Geraden g, h haben genau dann einen Schnittpunkt,
> wenn die Punkte $g' \cap h' \in \pi_1$ und $g'' \cap h'' \in \pi_2$ auf demselben Ordner liegen.

Aufgabe 3.3 *Liegen die vier in Grund– und Aufriss gegebenen Punkte (Abb. 3.11) in einer Ebene?*

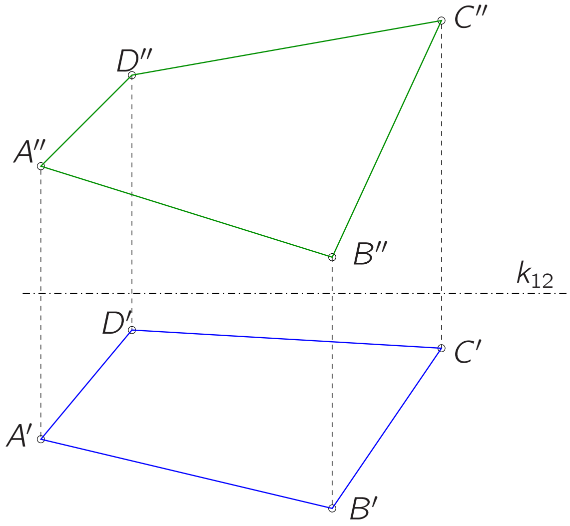


Abbildung 3.11: Ist das Viereck eben?

Aufgabe 3.4 *Abb. 3.12 gibt Grund– und Aufriss einer Säule mit viereckigem Querschnitt (Prisma), die von vier Geraden a, b, c, d berandet wird (in dieser Reihenfolge). Bestimme den Schnitt der Säule mit der Grundrisstafel π_1.*

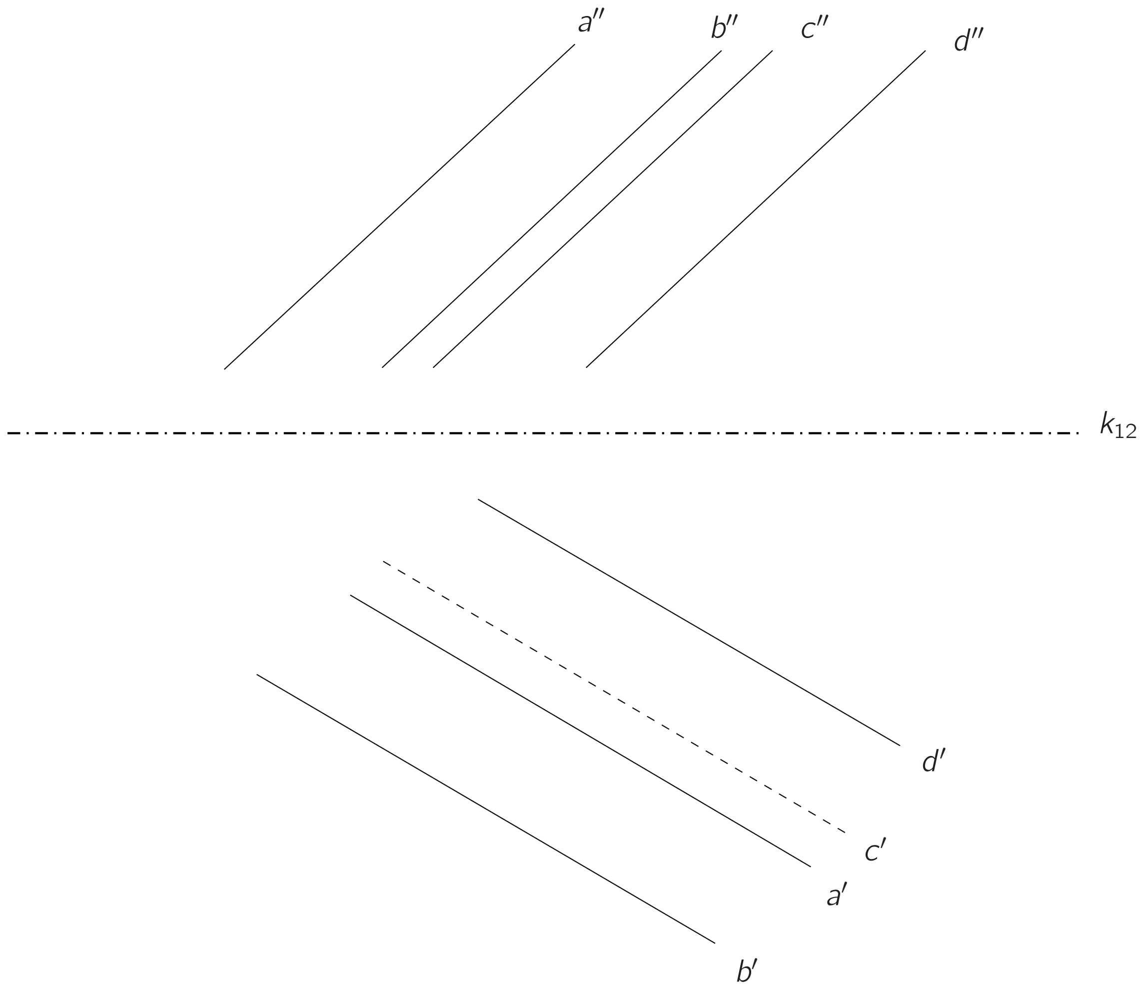


Abbildung 3.12: Grundriss–Spur eines Balkens

3.3 Zweitafelprojektion einer Ebene

(s. LEO S.91)

Eine Ebene im Raum kann festgelegt werden durch
(a) drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, oder
(b) eine Gerade und einen Punkt, der nicht auf der Gerade liegt, oder
(c) zwei parallele oder sich schneidende Geraden.

Bezüglich Grund- und Aufriss sind folgende Sonderlagen für Ebenen möglich (Abb. 3.13):

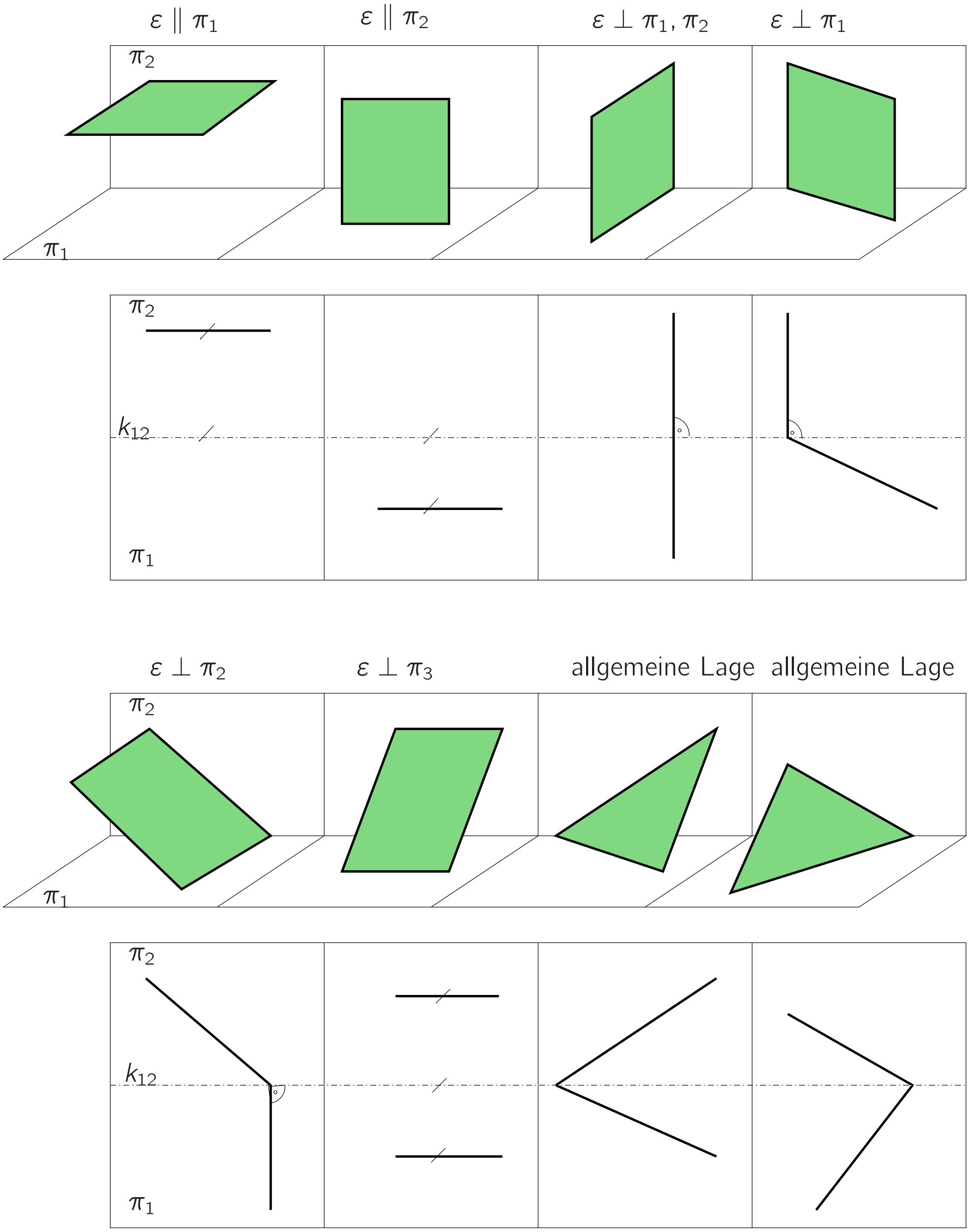


Abbildung 3.13: Sonderlagen von Ebenen und ihre Spuren in Grund- und Aufriss

Die Schnittgeraden einer Ebene ε mit den Risstafeln heißen die **Spuren** von ε. Die Grundrissspur ist genau die Höhenlinie mit $z = 0$ und die Aufrissspur gerade die Frontlinie mit $y = 0$. Die folgenden beiden Aufgaben lassen sich durch Ausnutzen der Parallelität der Spuren mit Höhen- und Frontlinien lösen.

Aufgabe 3.5 *Die Ebene ε ist durch die Höhenlinie h und die Frontlinie f durch den Punkt P gegeben (Abb. 3.14). Bestimme die Spuren von ε.*

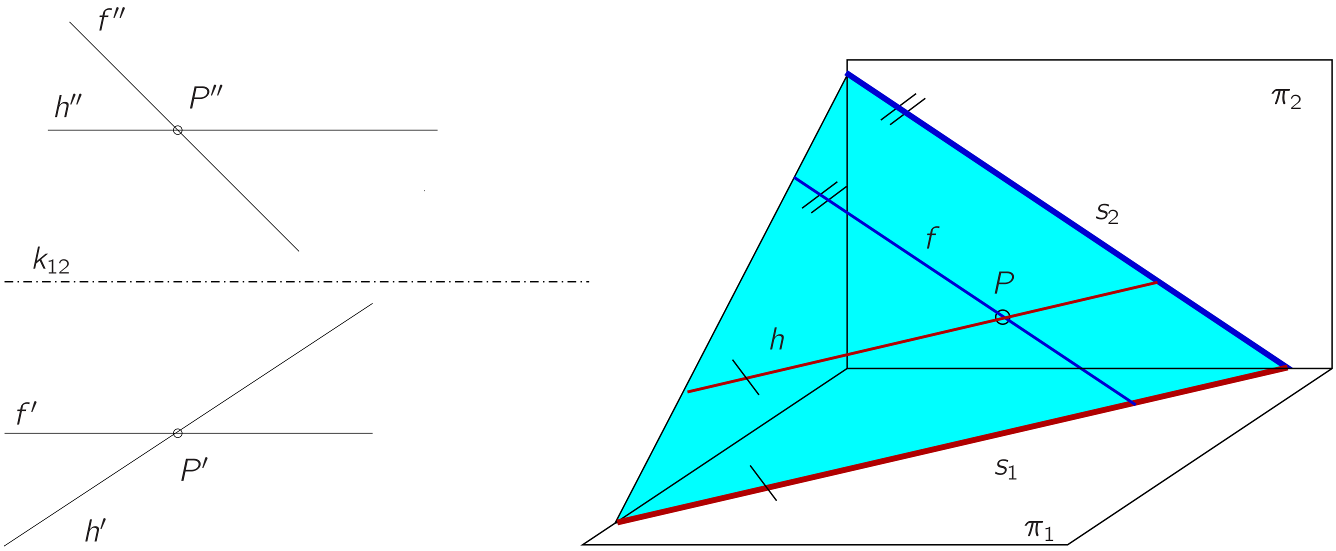


Abbildung 3.14: Spuren einer Ebene

Aufgabe 3.6 *Die Ebene ε ist durch ihre Spuren s_1, s_2 gegeben (Abb. 3.15). Von dem Punkt P ist der Aufriss P'' bekannt. Bestimme P' und die beiden Hauptgeraden h, f durch P.*

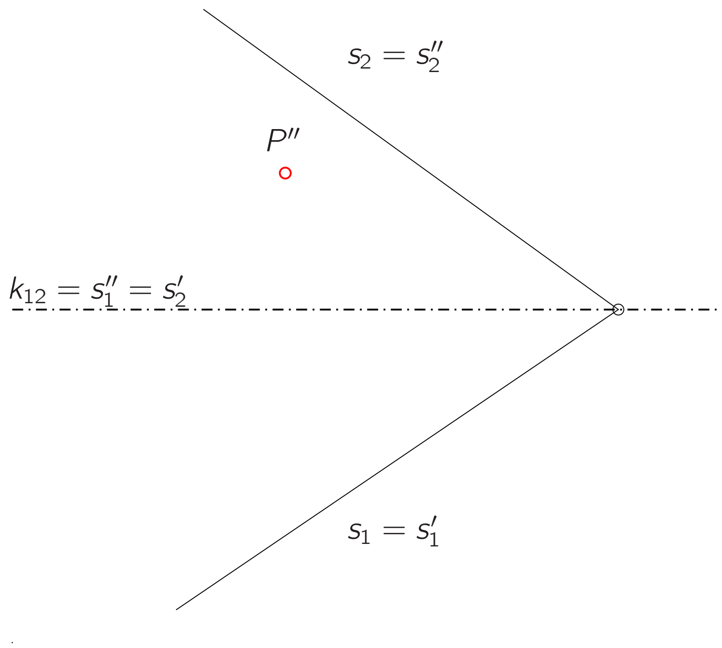


Abbildung 3.15: Punkt und Hauptgeraden in einer Ebene

3.4 Schnittpunkt Gerade–Ebene (Durchstoßpunkt)

(s. LEO S.92)

Gegeben: Gerade g durch Grundriss g' und Aufriss g'',
Ebene ε durch drei Punkte A, B, C in Grund- und Aufriss (Aufgabe 3.7).
Gesucht: Schnittpunkt $D = g \cap \varepsilon$.
Lösungs**idee**: Es sei μ die zu π_1 (oder π_2) senkrechte Ebene, die g enthält. Sie schneidet ε in der Schnittgeraden $s := \mu \cap \varepsilon$. Dann gilt für den gesuchten Durchstoßpunkt $D = s \cap g$.

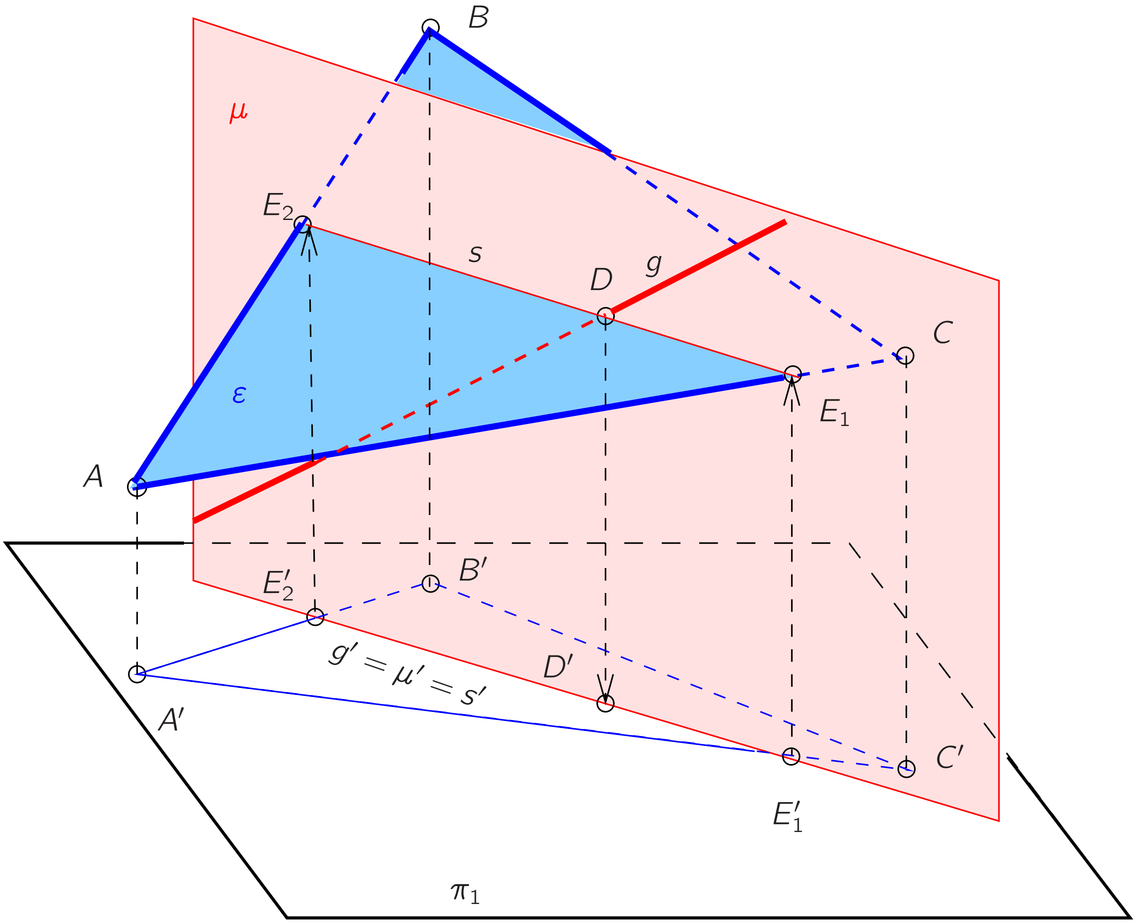


Abbildung 3.16: Schnitt Gerade–Ebene

Durchführung, falls $\mu \perp \pi_1$ gewählt ist:

(1) Wähle zwei Geraden e_1, e_2 der Ebene ε. (g' und e_1', e_2' dürfen nicht parallel sein.)
(2) Im Grundriss liefert der Schnitt von g' mit e_1' bzw. e_2' zwei Punkte E_1' bzw. E_2'.
(3) Im Aufriss ergeben die Schnittpunkte ihrer Ordner mit e_1'', e_2'' die Punkte E_1'', E_2''. Es sei s'' eine Hilfsgerade durch E_1'' und E_2''.
(4) Der Aufriss des Durchstoßpunktes ist $D'' = s'' \cap g''$.
(5) Der Grundriss D' ist der Schnittpunkt des Ordners durch D'' mit g'.

Die Durchführung für den Fall, dass $\mu \perp \pi_2$ gewählt wurde, verläuft analog; man muss nur die Rollen von Grund- und Aufriss vertauschen.

Aufgabe 3.7 *Bestimme den Schnittpunkt einer Geraden mit der durch ein Dreieck gegebenen Ebene (Abb. 3.17). Entscheide über die Sichtbarkeit der Geradenabschnitte durch Betrachtung des jeweils anderen Risses.*

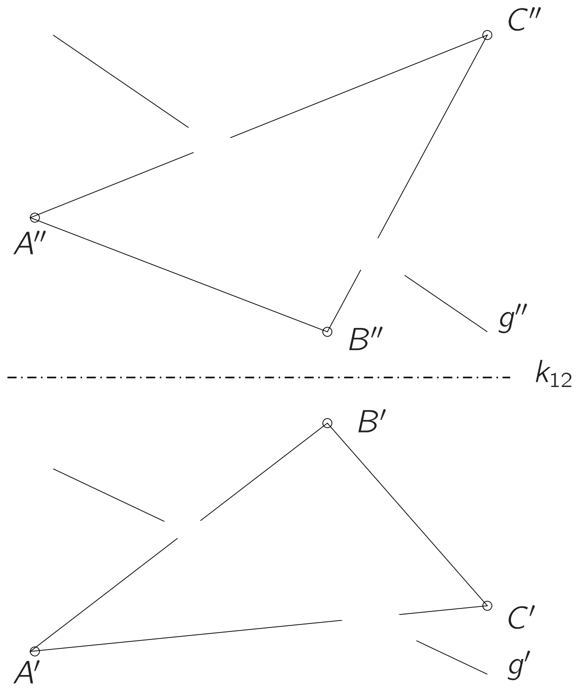


Abbildung 3.17: Schnitt Gerade–Ebene

Aufgabe 3.8 *In Grund- und Aufriss ist ein dreikantiger Balken und ein ebenes Viereck gegeben (Abb. 3.18). Bestimme Grund- und Aufriss der Schnittfigur und entscheide über die Sichtbarkeit des Balkens.*

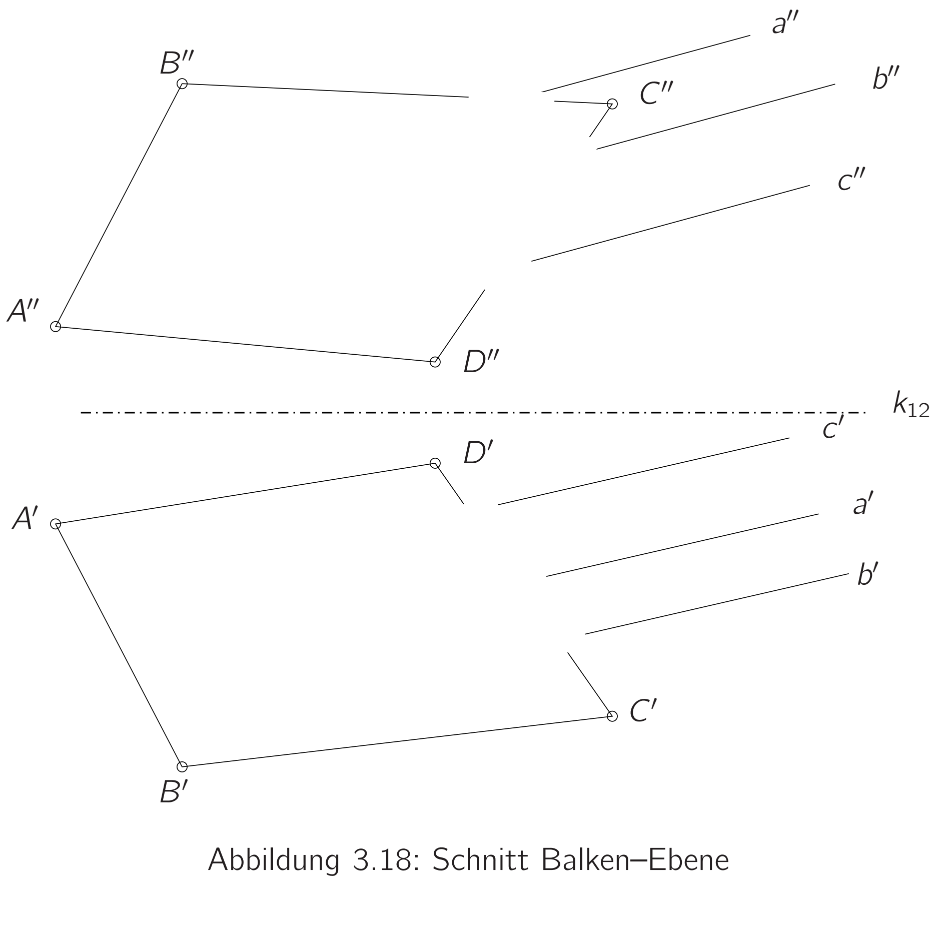


Abbildung 3.18: Schnitt Balken–Ebene

Die Idee, den Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene mittels einer senkrechten Hilfsebene zu bestimmen, lässt sich direkt bei der Konstruktion eines Schattenpunktes auf eine geneigte Ebene verwenden.

Aufgabe 3.9 *Gegeben ist ein axonometrisches Bild eines Hochhauses (Quader), zweier Fabrikhallen mit schrägen Dächern, sowie paralleles Licht durch die Lichtrichtung ℓ und den Schattenwurf einer Kante (Abb. 3.19). Zeichne den Schatten.*

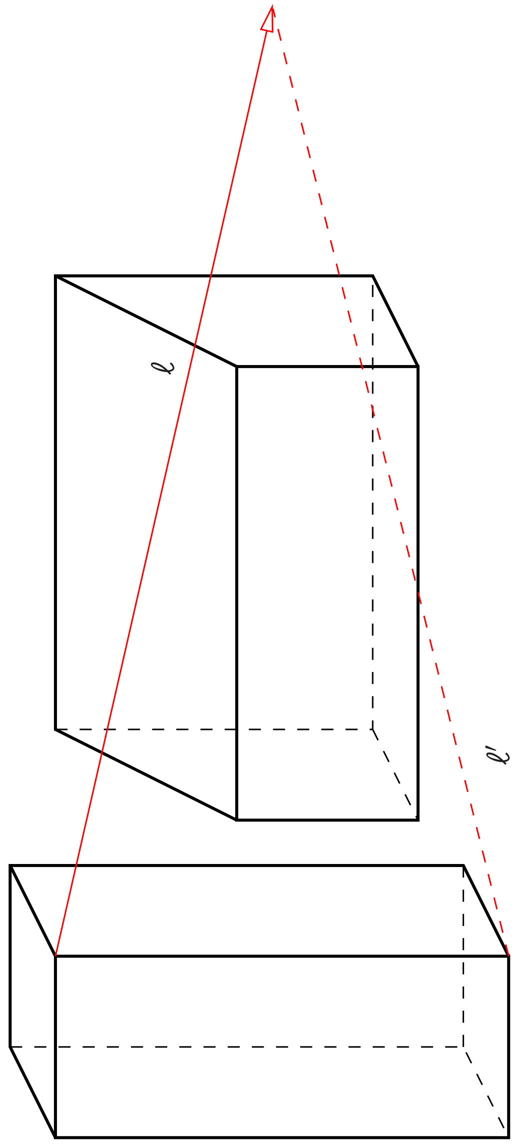


Abbildung 3.19: Schatten auf geneigte Ebenen bei parallelem Licht

3.5 Wahre Länge und wahre Gestalt

Wahre Länge einer Strecke

(s. LEO S.100)

Gegeben: Strecke $\overline{AB}$ in Grund- und Aufriss.
Gesucht: Die wahre Länge dieser Strecke.

Lösungs**idee**: Eine Strecke erscheint im Aufriss (bzw. Grundriss) in wahrer Länge, wenn die Strecke zur Aufrisstafel (bzw. Grundrisstafel) parallel ist. Man dreht die Strecke um eine zur Grundrisstafel (bzw. Aufrisstafel) senkrechte Achse, bis sie parallel zur Aufrisstafel (bzw. Grundrisstafel) ist.

Durchführung der Drehung um eine zu π_1 senkrechte Achse durch B:

(1) Drehe A' um B', bis die gedrehte Strecke parallel zu k_{12} ist.
Der gedrehte Punkt sei $\tilde{A}'$ (Grundriss von $\tilde{A}$, dem um B gedrehten Punkt A).

(2) $\tilde{A}''$ liegt auf dem Ordner durch $\tilde{A}'$ und auf der Parallelen durch A'' zur Risskante, denn bei der Drehung bleibt $\tilde{A}$ auf der gleichen Höhe wie A.

(3) $|\tilde{A}''\,B''|$ ist die wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$.

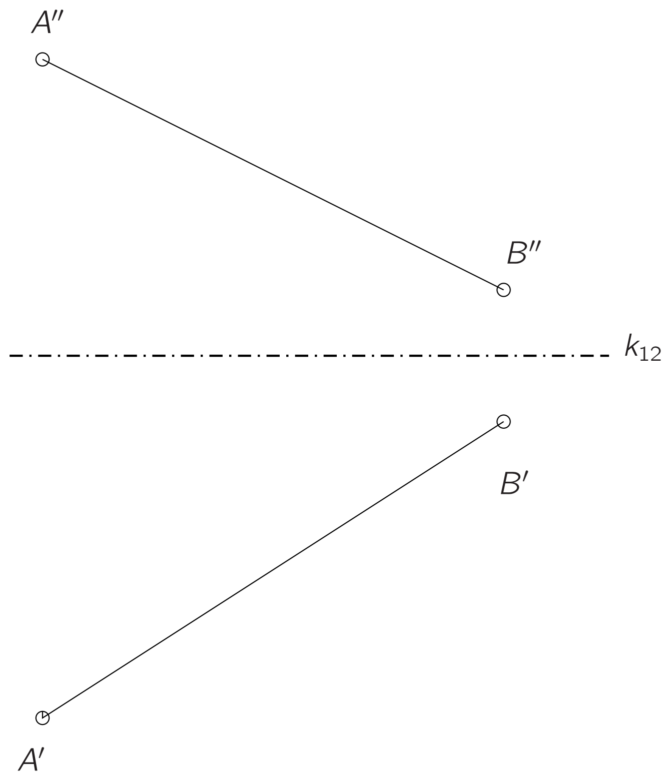


Abbildung 3.20: Wahre Länge einer Strecke

Aufgabe 3.10 *Von einem Punkt P und einer Geraden g sind Grund- und Aufriss gegeben (Abb. 3.21). Trage auf g eine in P beginnende Strecke der Länge 4 cm ab.*

Aufgabe 3.11 *Gegeben: Satteldach, Kaminkopf (K) und die Richtung der Sonnenstrahlen (S) (Abb. 3.22). Gesucht: a) Dachneigung α und wahre Länge der Strecke $\overline{AB}$. b) Schatten des Kamins auf der Dachfläche. c) Schnitt des Kamins mit der Dachfläche.*

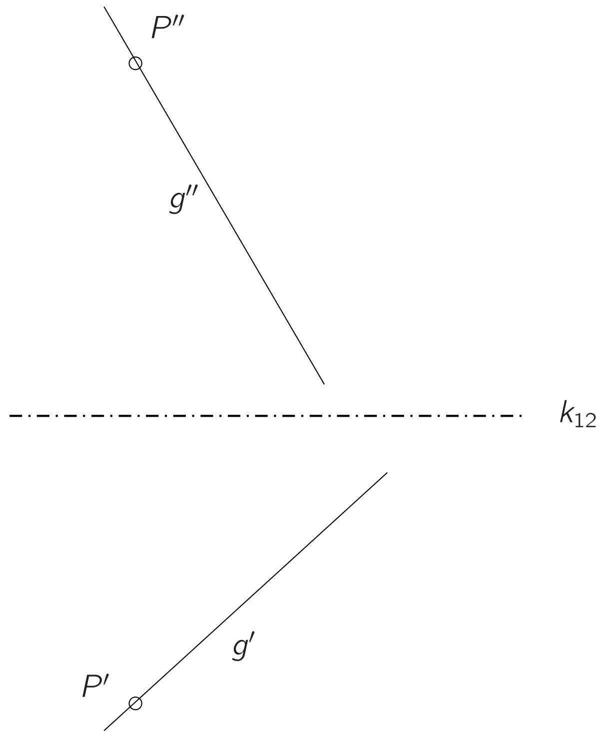


Abbildung 3.21: Antragen der wahren Länge einer Strecke

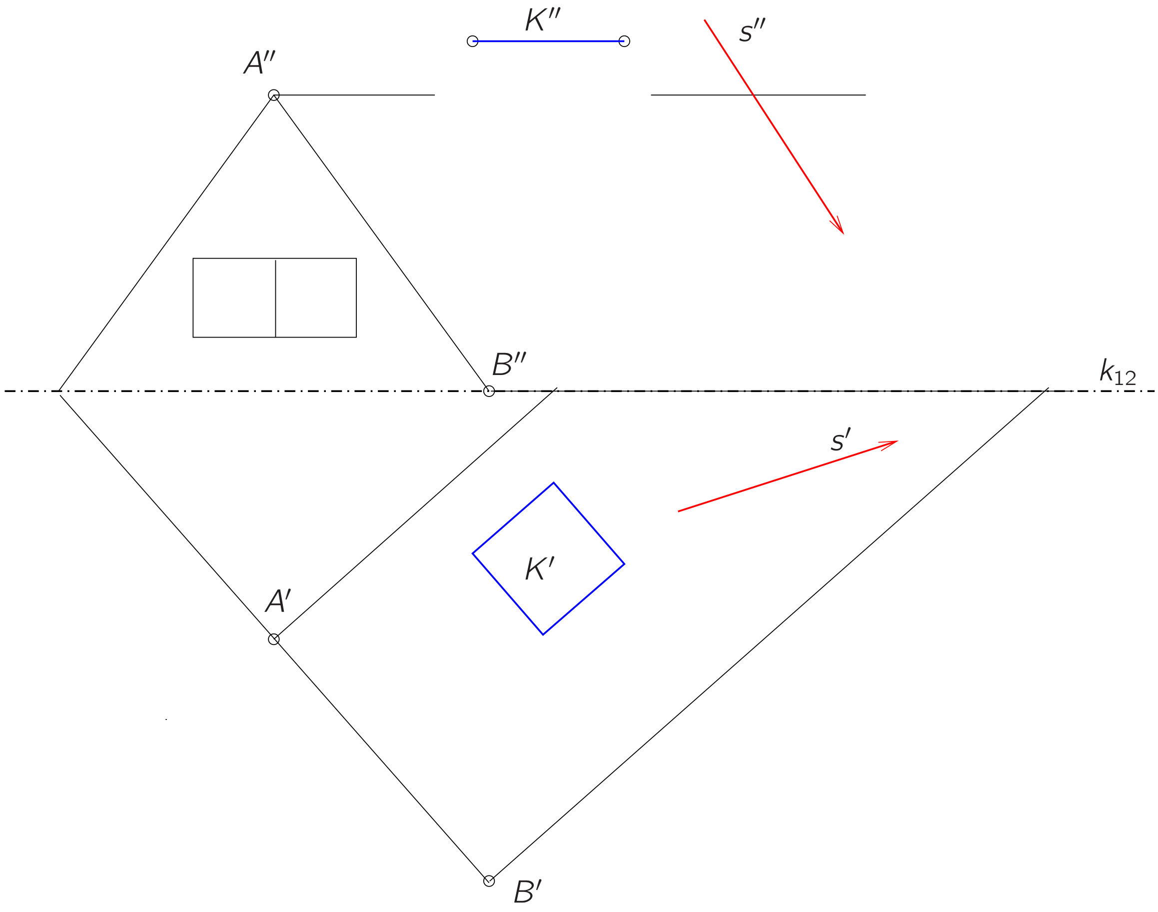


Abbildung 3.22: Schatten eines Kamins

Wahre Gestalt einer ebenen Figur

(s. LEO S.103)

Gegeben: Das Dreieck A, B, C in Grund- und Aufriss.
Gesucht: Die Wahre Gestalt des Dreiecks.

Lösungs**idee**: Gesucht ist eine senkrechte Parallelprojektion auf die Ebene π_4, die das Dreieck enthält. Dazu projizieren wir das Dreieck zuerst längs einer Höhenlinie auf eine Ebene π_3; das Ergebnis muss eine Strecke sein. Eine erneute Projektion, senkrecht zu dieser Strecke, liefert den gewünschten Seitenriss. Für die gewünschte Projektion in Richtung der Normalen des Dreiecks benötigen wir daher zwei Umprojektionen.

Durchführung, falls π_3 senkrecht auf dem Grundriss steht (neue Seitenrissebene):

(1) Bestimme eine Höhenlinie h des Dreiecks.
(2) Neue Risskante $k_{13} \perp h'$.
Erste Umprojektion des Dreiecks: Das gesamte Dreieck projiziert auf eine Gerade d'''.
(3) Neue Risskante $k_{34} \| d'''$. Zweite Umprojektion liefert das Dreieck in wahrer Gestalt.

Aufgabe 3.12 *Bestimme die wahre Gestalt eines in Grund– und Aufriss gegebenen Dreiecks (Abb. 3.23).*

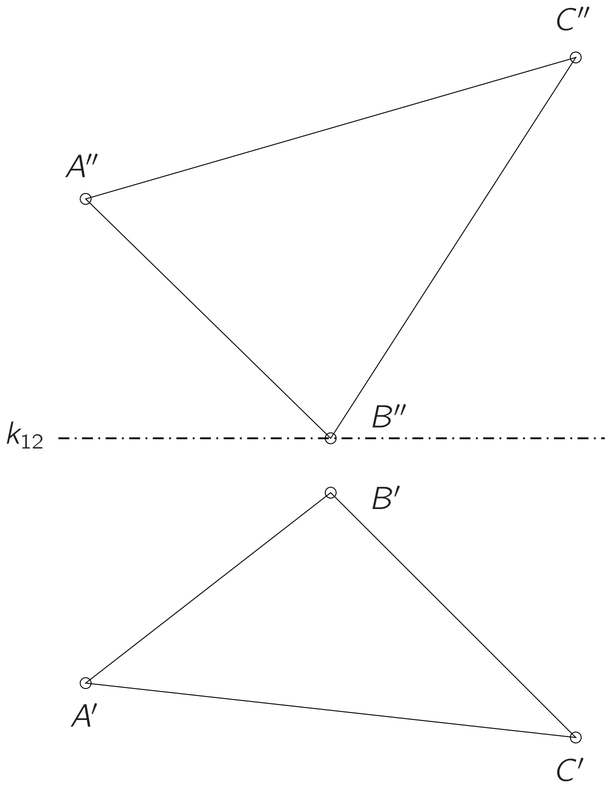


Abbildung 3.23: Wahre Gestalt eines Dreiecks

3.6 Winkel unter senkrechter Parallelprojektion

Bei sich schneidenden Geraden interessiert oft die wahre Größe des Schnittwinkels. Im allgemeinen können sich Winkel unter senkrechter Parallelprojektion verkleinern oder vergrößern. Testen Sie dies, indem Sie ihr Geodreieck im Raum drehen und prüfen, wie groß der rechte Winkel erscheint.

Ebene Figuren, die parallel zur Bildtafel sind, werden jedoch unverzerrt abgebildet:

Der Schnittwinkel zweier Geraden erscheint unter Parallelprojektion in die Ebene π unverzerrt, wenn beide Geraden parallel zu π sind.

Der Schnittwinkel zwischen zwei Höhengeraden bleibt also im Grundriss erhalten, und entsprechend der Winkel zwischen zwei Frontgeraden im Aufriss:

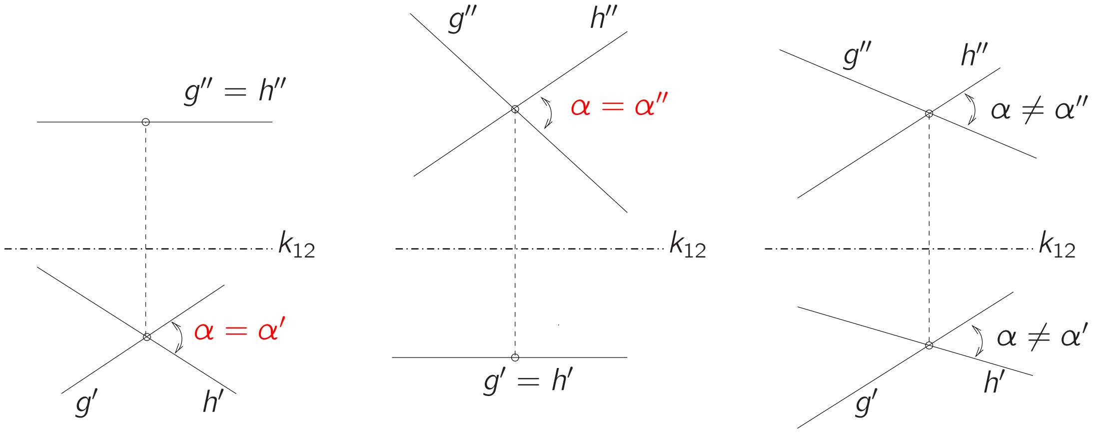


Abbildung 3.24: Winkel schneidender Geraden

Für den rechten Winkel kann diese Voraussetzung aber abgeschwächt werden:

Ein *rechter Winkel* wird bei senkrechter Parallelprojektion in die Ebene π auf einen rechten Winkel abgebildet, wenn bereits *ein* Schenkel parallel zu π ist.

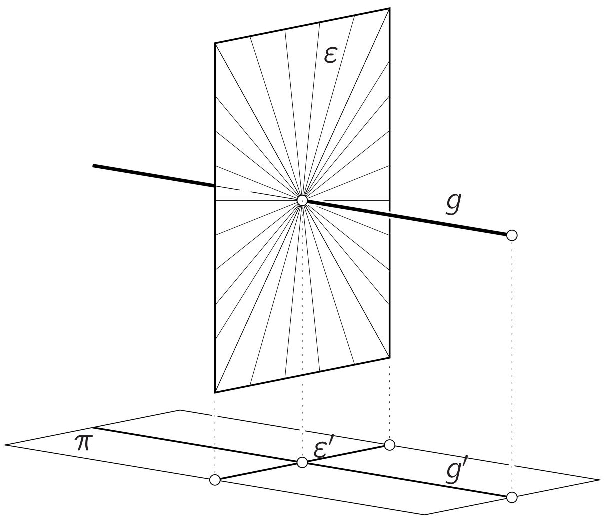


Abbildung 3.25: Orthogonalprojektion eines rechten Winkels

Aufgabe 3.13 *Wo erscheinen in den folgenden Rissen eines Hauses (Abb. 3.26) Winkel in wahrer Größe?*

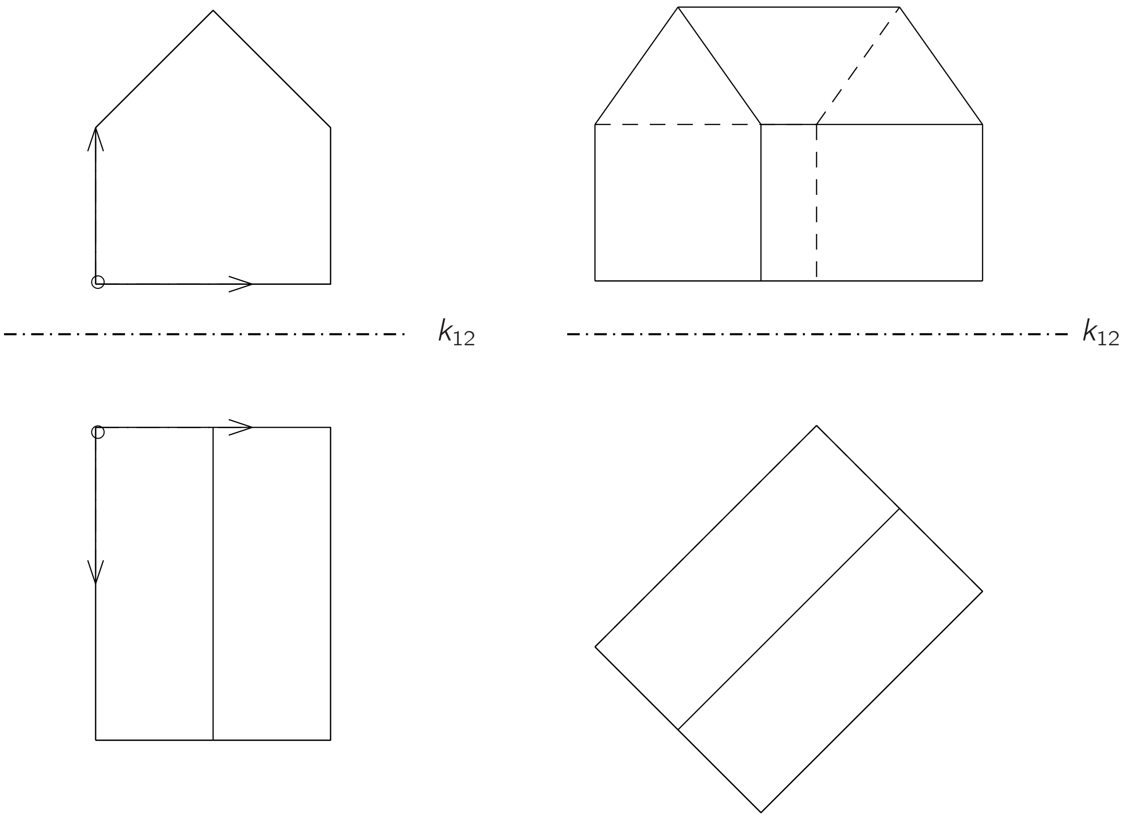


Abbildung 3.26: Wahre Winkel?

3.7 Lot auf eine Ebene

(s. LEO S.105)

Wir erinnern an die in Abschnitt 3.6 erwähnte Tatsache: Die Orthogonalprojektion eines rechten Winkels ist genau dann wieder ein rechter Winkel, wenn einer der beiden Schenkel parallel zur Bildebene liegt. Beispielsweise sind Höhenlinien parallel zu π_1 und daher erscheint im Grundriss jeder rechte Winkel mit einer Höhenlinie ebenfalls als rechter Winkel. Entsprechendes gilt für Frontlinien im Aufriss.

Diese Tatsache liefert die Idee zur Bestimmung von Loten auf Ebenen.

Gegeben: Ebene ε durch drei Punkte A, B, C und Punkt P.
Gesucht: Lot l auf ε durch P (d.h. finde $l \perp \varepsilon$ mit $P \in l$).

Durchführung:

(1) Zeichne die Höhenlinie h und die Frontlinie f von ε, z.B. durch C in Grund- und Aufriss.
(2) Der Grundriss l' des Lotes l steht senkrecht auf h' und der Aufriss l'' des Lotes steht senkrecht auf f''. Also bestimmt die Bedingung $P \in l$ das Lot l eindeutig.

Aufgabe 3.14 *a) Bestimme das Lot l durch den Punkt P auf die Ebene ε des Dreiecks A, B, C. Konstruiere seinen Fußpunkt $Q = \varepsilon \cap l$ und entscheide über die Sichtbarkeit der Lotgerade. (Abb. 3.27, links).*

b) Gegeben sei die Gerade g und ein Punkt $P \notin g$ (Abb. 3.27 rechts).
Gesucht sind die Höhen- und Frontlinie der Lotebene μ zu g durch P.

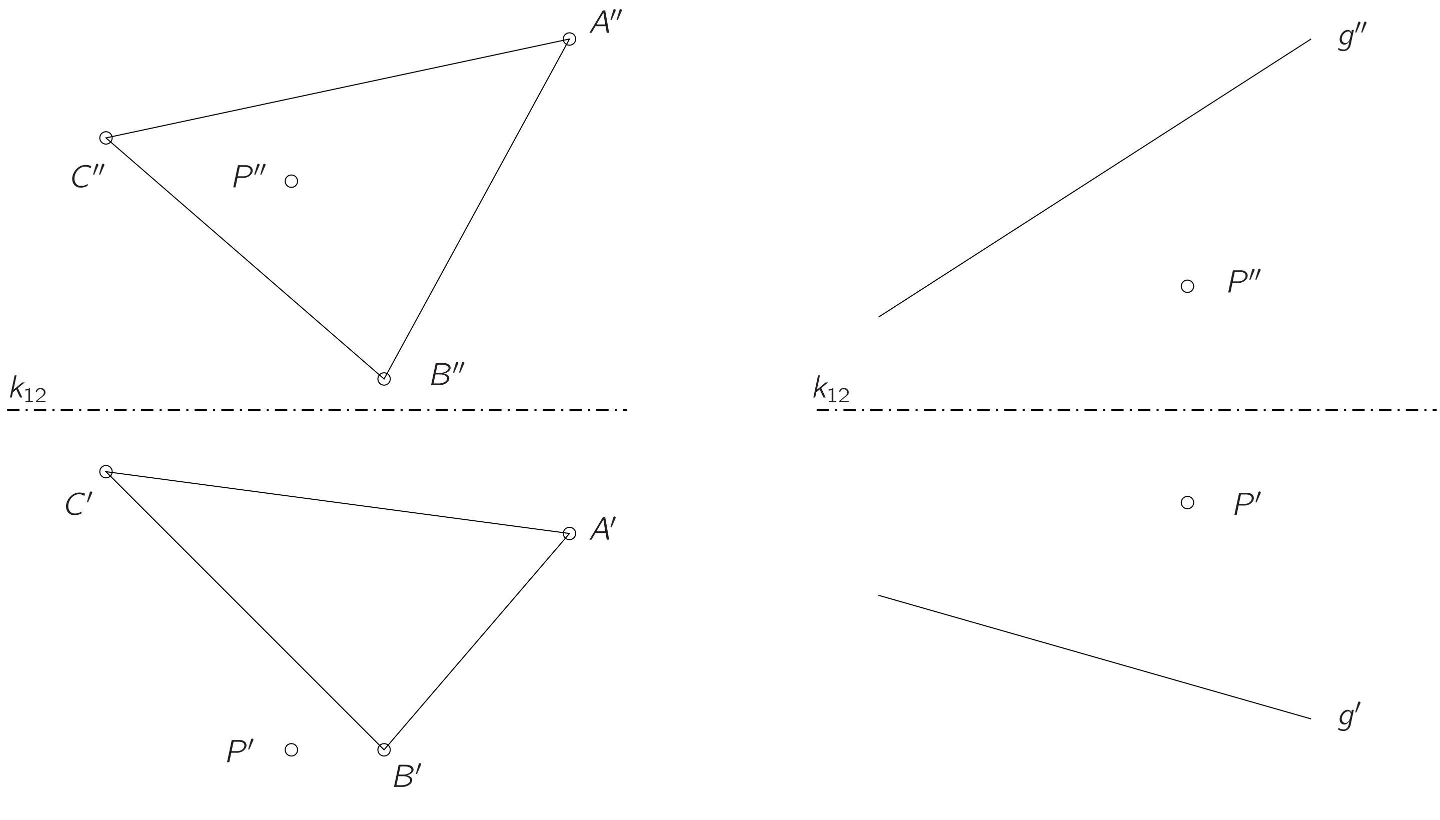


Abbildung 3.27: Lot auf Ebene bzw. Lotebene

3.8 Einschneideverfahren und senkrechte Parallelprojektion

(s. LEO S.199,204,208)

Wir wollen nun klären, wie man die Richtungen beim Einschneideverfahren zu wählen hat, wenn das Ergebnis einer senkrechten Parallelprojektion entsprechen soll. Wir hatten schon erwähnt, dass genau in diesem Fall das Einschneiden günstige Bilder ergibt.

Wir nehmen an, dass die senkrechte Parallelprojektion einer Projektionsrichtung p entspricht, bei der p nicht in einer Koordinatenebene liegt. Nur solche Richtungen ergeben anschauliche Darstellungen. Dann schneidet die Bildebene (senkrecht zur Projektionsrichtung p) ein *Spurdreieck* S_x, S_y, S_z aus den drei Koordinatenebenen, siehe Fig. 3.28.

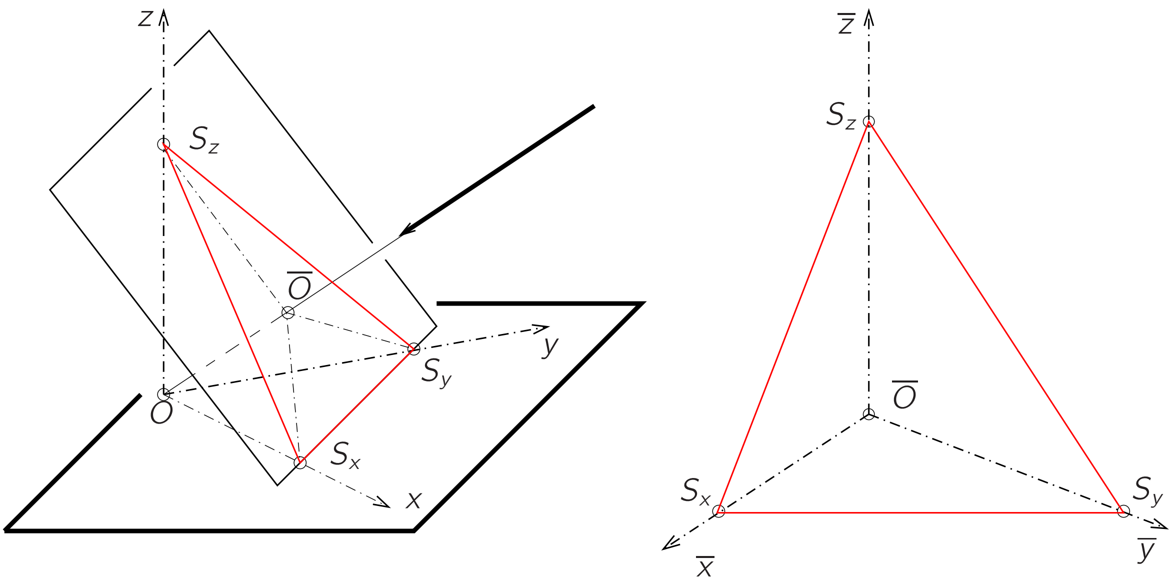


Abbildung 3.28: Senkrechte Parallelprojektion: Spurdreieck

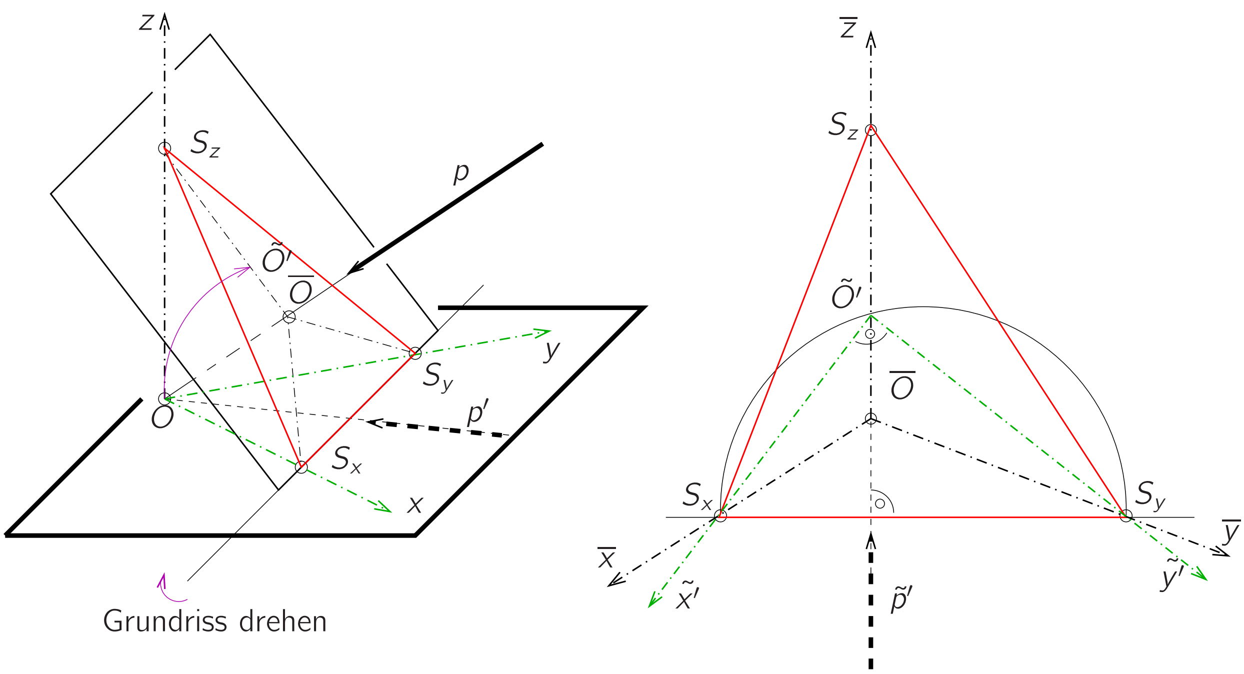


Abbildung 3.29: Senkrechte Parallelprojektion: Grundriss in die Bildtafel drehen

Um festzustellen, welche Lage und Richtung des Grundrisses beim Einschneiden zu einer senkrechten Parallelprojektion führen würde, drehen wir den Grundriss um die Grundrissspur in die Bildebene (Fig. 3.29).
Vor der Drehung liegt der Grundrissursprung O unterhalb von S_z und p' steht senkrecht auf S_xS_y (Fig. 3.29 links). Das bedeutet, dass nach der Drehung für den Grundriss gilt (Fig. 3.29 rechts):

- Die Einschneiderichtung $\tilde{p}'$ für den Grundriss muss senkrecht auf der Spurgeraden $\overline{S_xS_y}$ stehen.
- Der Ursprung $\tilde{O}'$ des Grundrisses liegt auf der Höhe des Spurdreiecks durch S_z.
- Die Achsenrichtungen x', y' des Grundrisses sind parallel zu $\tilde{O}'S_x$ und $\tilde{O}'S_y$. Die Punkte $\tilde{O}', S_x, S_y$ bilden also ein rechtwinkliges Dreieck, und $\tilde{O}'$ liegt auf einem Thaleskreis durch S_x, S_y.

Entsprechendes muss für den Aufriss gelten. Wir halten fest: Wenn es ein Spurdreieck gibt, so dass die Einschneidedaten die vorgenannten drei Bedingungen erfüllen, liefert das Einschneideverfahren eine senkrechte Axonometrie, siehe Abb. 3.30.

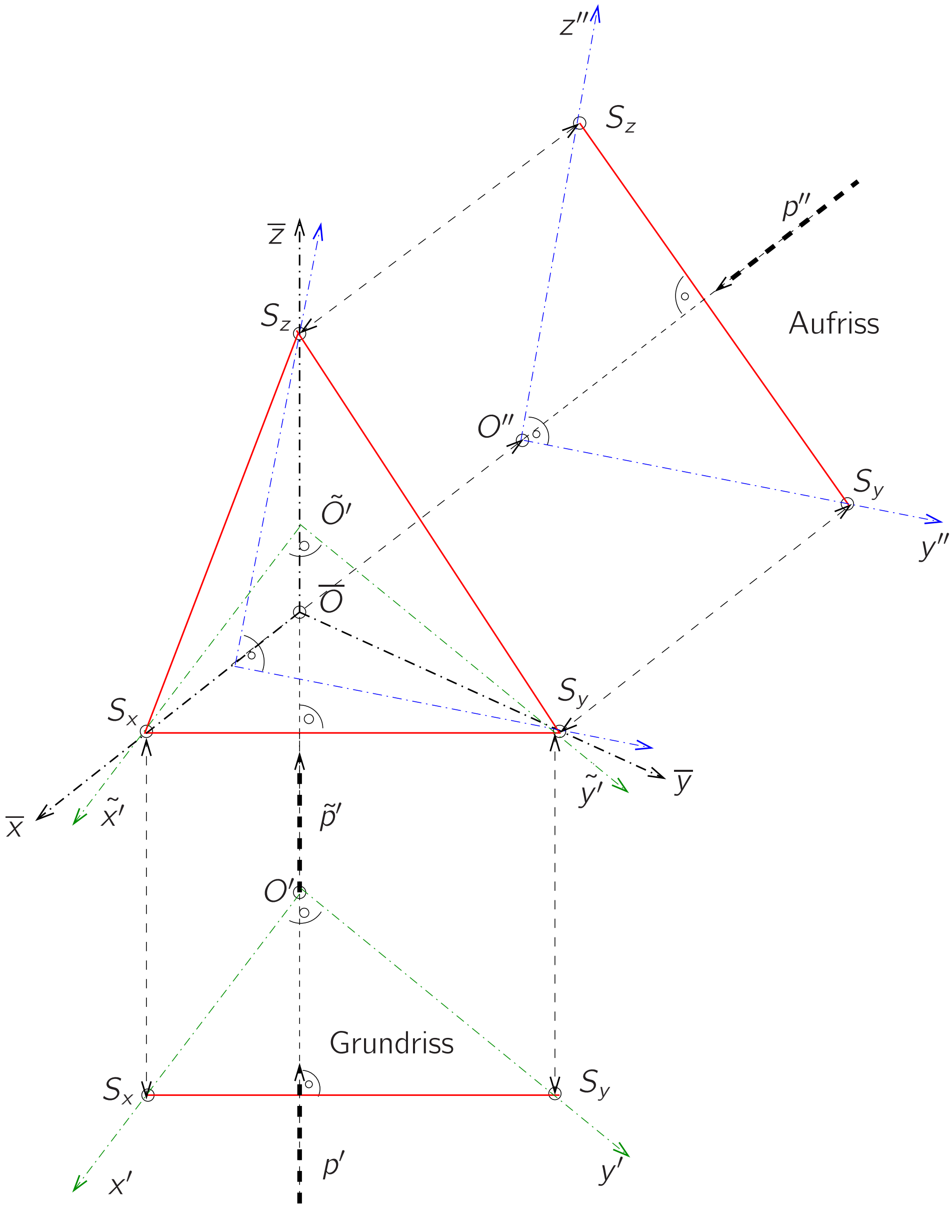


Abbildung 3.30: Senkrechte Axonometrie: Einschneideverfahren

Es gibt daher folgende **Möglichkeiten**, um die Lage von Grund- und Aufriss und der Einschneiderichtungen so zu wählen, dass eine Axonometrie entsteht, die einer senkrechten Parallelprojektion entspricht:

a) Im Einschneidebild ist ein **Spurdreieck** S_x, S_y, S_z gegeben, dessen Höhenschnittpunkt $\overline{O}$ ist.
   • Die Höhen des Spurdreiecks sind dann die Einschneiderichtungen und ihre Verlängerung enthält den Ursprung von Grund- bzw. Aufriss.
   • Nullpunkt und Achsenrichtungen des Grundrisses ermittelt man durch den Schnitt der Höhe durch S_z mit einem Thaleskreis über $\overline{S_xS_y}$ (s. Fig. 3.29). Analog verfährt man mit dem Aufriss.

b) Im Einschneidebild ist das **Koordinatendreibein** gegeben.
   Dann wählt man ein Dreieck, dessen Höhen die Achsen sind; dieses Spurdreieck wird bereits durch die Wahl eines Punktes auf den Achsen, z.B. S_x, eindeutig festgelegt. Der Rest verläuft wie in a).

c) In Grund– und Aufriss sind Projektions– bzw. **Einschneiderichtungen** gegeben.
   • Man wählt zuerst einen Spurpunkt, z.B. S_x.
   • Weil die Grundrissspur senkrecht auf der Projektionsrichtung p' steht, legt dies S_y in Grund- und Aufriss fest, siehe Fig. 3.31 links.
   • Die Aufrissspur muss ihrerseits senkrecht zum Aufriss p'' der Projektionsrichtung sein; damit findet man S_z, siehe Fig. 3.31 Mitte.
   • Um das Spurdreieck im Einschneidebild zu ermitteln, entnimmt man dem Grundriss den Höhenfußpunkt auf der Seite S_xS_y und findet S_z im Schnitt dieser Höhe mit einem Kreis um S_y vom Radius $|S_yS_z|$, siehe Fig. 3.31 rechts. (Alternativ kann man statt der Höhe auch die dritte Länge $|S_xS_z|$ verwenden, um das Dreieck zu konstruieren.)
   • Der Rest verläuft wie bei a).

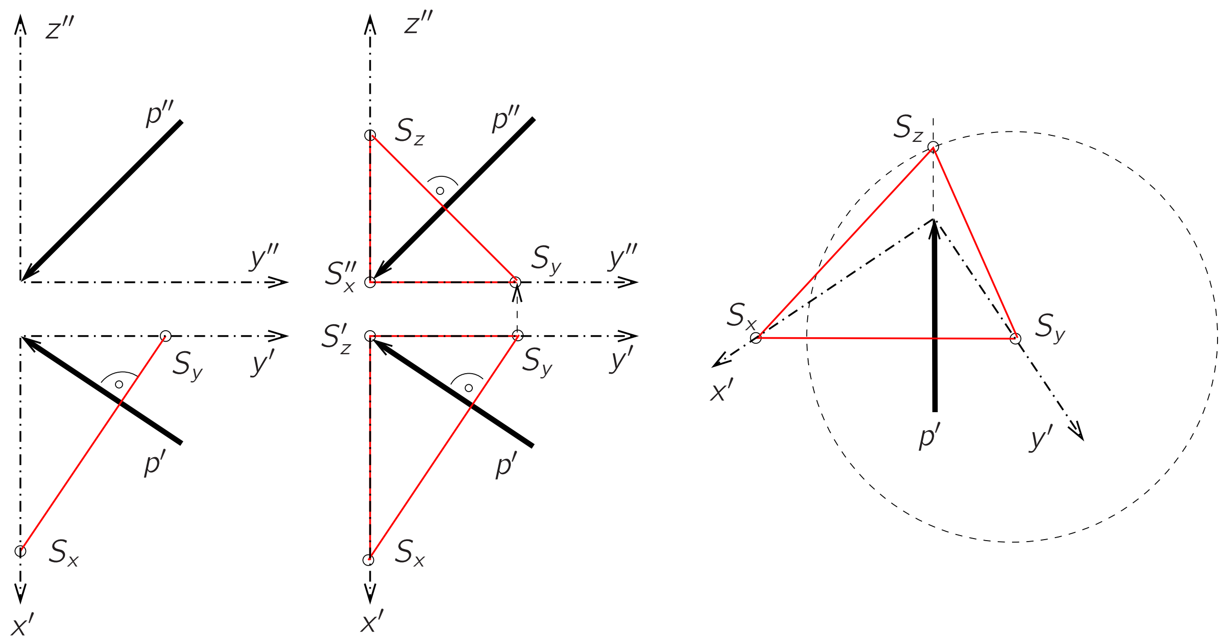


Abbildung 3.31: Konstruktion des Spurdreiecks aus den Projektions- bzw. Einschneiderichtungen p', p''

Die Vorgabe von b) Koordinatenachsen und c) Einschneiderichtungen demonstrieren wir nun an zwei Beispielen.

Aufgabe 3.15 *Gegeben: Grund– und Aufriss eines angeschnittenen Würfels und die Bilder der Koordinatenachsen. Gesucht: Ein anschauliches Bild in senkrechter Axonometrie mit Hilfe des Einschneideverfahrens. Gib die Projektionsrichtung in Grund– und Aufriss an.*

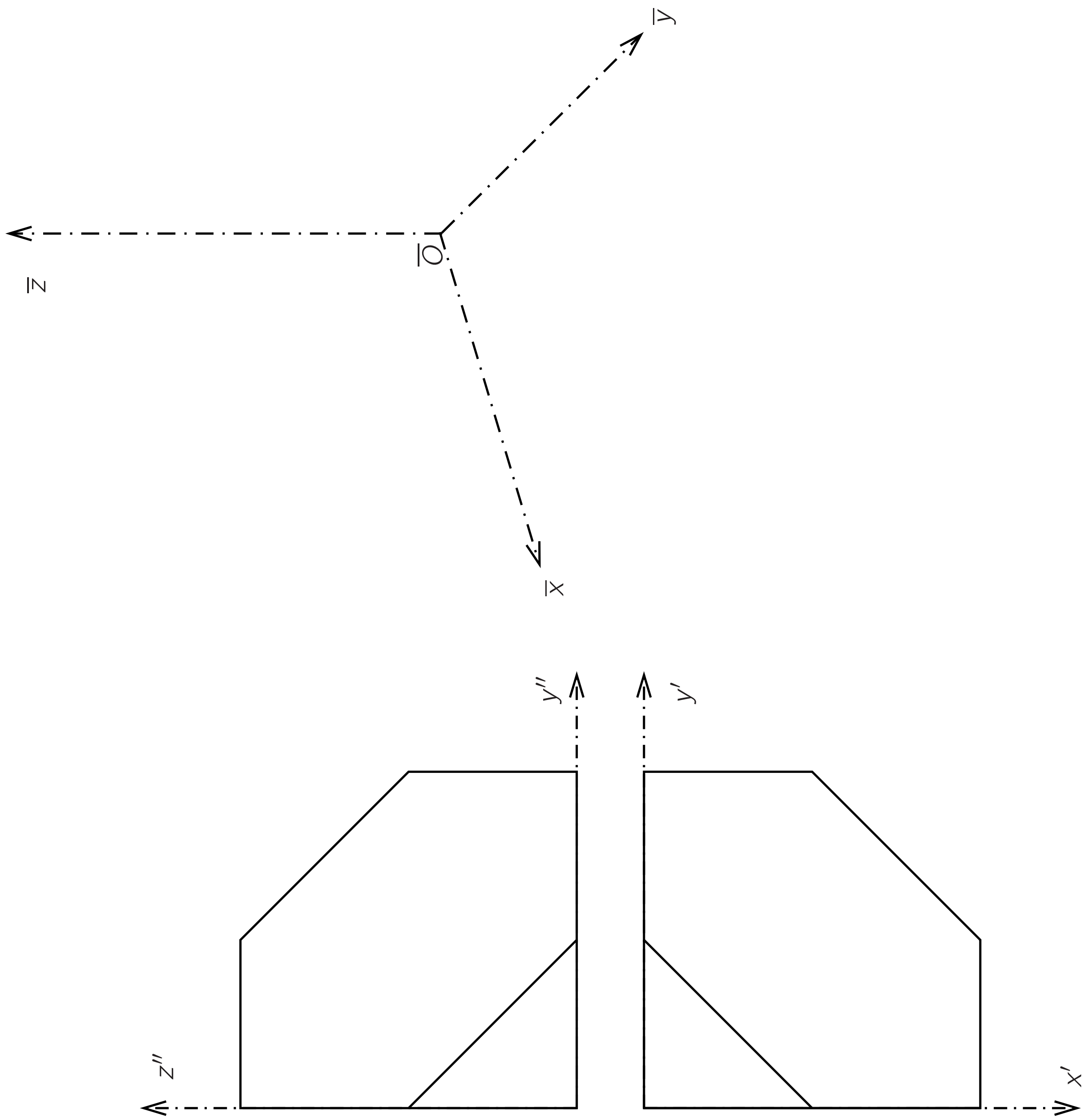


Abbildung 3.32: Senkrechte Parallelprojektion durch Einschneiden: Beispiel angeschnittener Würfel

Aufgabe 3.16 *Gegeben: Grund– und Aufriss eines Hauses und die Projektionsrichtung für eine senkrechte Axonometrie. Gesucht: Das zugehörige senkrechte axonometrische Bild mit Hilfe des Einschneideverfahrens.*

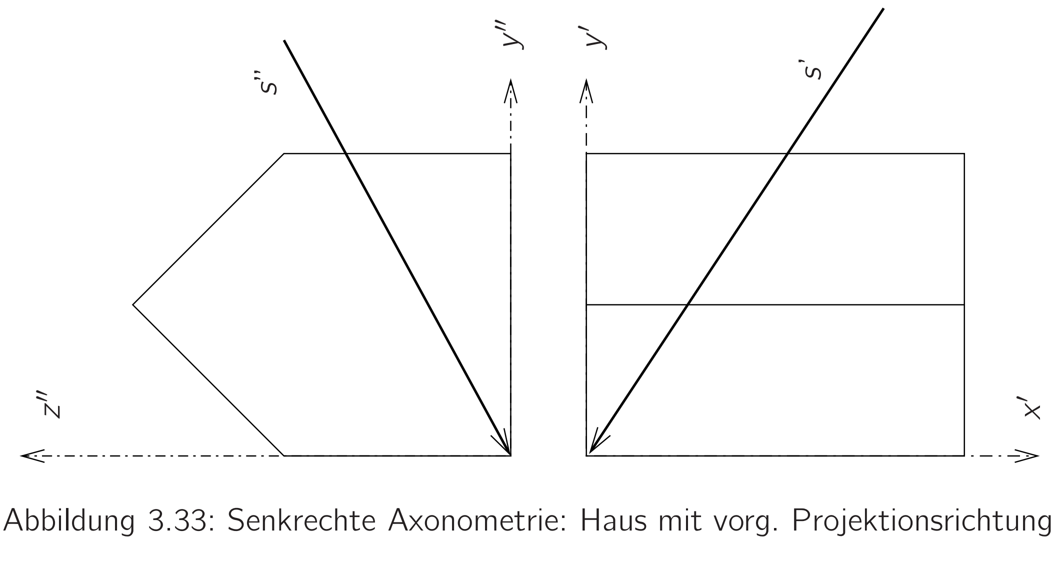


Abbildung 3.33: Senkrechte Axonometrie: Haus mit vorg. Projektionsrichtung

3.9 Dachausmittelung

(s. LEO S.195,197)

Ein Dach besteht i.A. aus ebenen geradlinig begrenzten Flächenstücken. Wir nehmen an, dass die unteren Begrenzungsstrecken, die **Traufkanten**, horizontal sind und auf **gleicher Höhe** liegen. Wir nennen zwei sich auf der Traufkante schneidende Dachflächen *benachbart*. Eine Schnittgerade benachbarter Dachebenen heißt **Grat-** oder **Kehllinie**, je nachdem ob sie von einer “ausspringenden” oder “einspringenden” Ecke der Traufe ausgeht. Die Schnittgerade zweier nicht benachbarter Dachebenen heißt **First**.

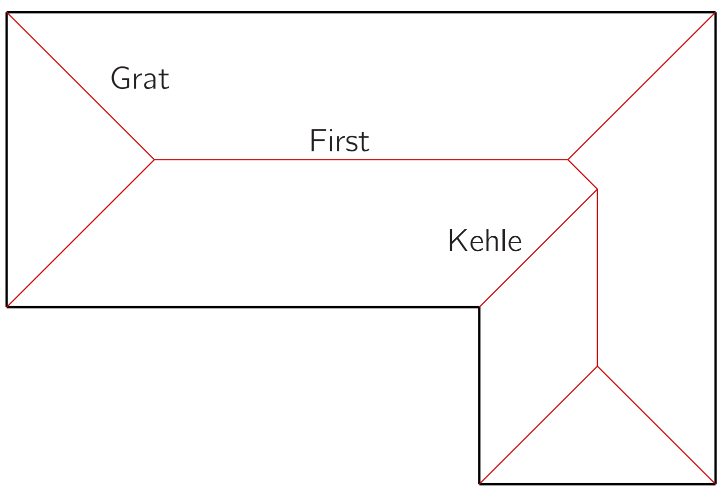


Abbildung 3.34: First, Grat- und Kehllinien eines Daches (Dachausmittelung)

Die **Aufgabe** der Dachausmittelung besteht darin, First, Grat- und Kehllinien sowie die wahre Gestalt der einzelnen Dachflächen zu bestimmen.

Lösungsprinzip:

Eine horizontale Hilfsebene ε wird in geeigneter Höhe durch das Dach gelegt. ε schneidet das Dach in Höhenlinien. Die Höhenlinien schneiden sich in Grat- und Kehllinien. Und Grat- und Kehllinien schneiden sich in Firstlinien.

Durchführung:

(1) Wähle die Höhe der Ebene ε so, dass die Höhenlinien im Grundriss einen Abstand von wenigstens 1-2 cm von der Traufkante haben.
Bei *gleicher Dachneigung* haben Höhenlinien überall den gleichen Abstand von der Traufkante!

(2) Zeichne die Höhenlinien für jede Dachebene in den Grundriss.

(3) Schneide die Höhenlinien benachbarter Dachflächen und verbinde die Schnittpunkte mit den entsprechenden Ecken des Traufpolygons. Dadurch erhält man die Grat- und Kehllinien.
Bei *gleicher Dachneigung* sind Grat– und Kehllinien Winkelhalbierenden der zugehörigen Traufkanten!

(4) Schnitt von „entsprechenden“ Grat- oder Kehllinien ergeben Punkte von Firstlinien.

(5) Fehlende Firstlinien ergeben sich, indem man die entsprechenden (nicht benachbarten) Dachebenen (mit Hilfe der Höhenlinien) schneidet.

(6) Die wahre Gestalt einer bestimmten Dachfläche erhält man durch Drehen der Ebene um die Traufkante in die Zeichenebene.

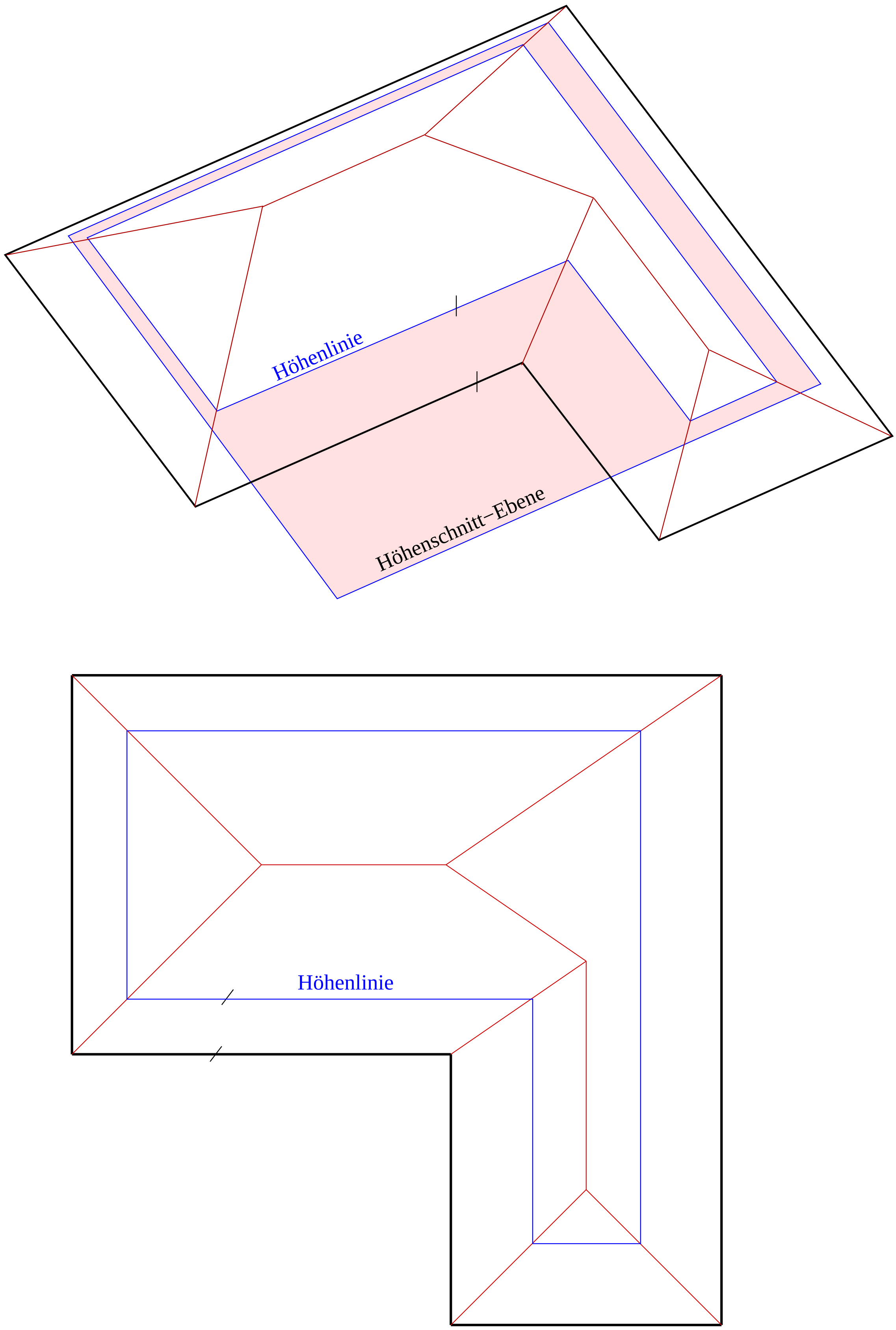


Abbildung 3.35: Höhenschnitt und Höhenlinien

Aufgabe 3.17 :

Gegeben: *Grundriss der Traufkanten eines Daches mit Dachneigungen* α, β *(Abb. 3.36).*

Gesucht: *a) Grat-, First- und Kehllinien,*

b) die wahre Gestalt der Dachfläche, die an der Traufkante $\overline{AB}$ *anliegt.*

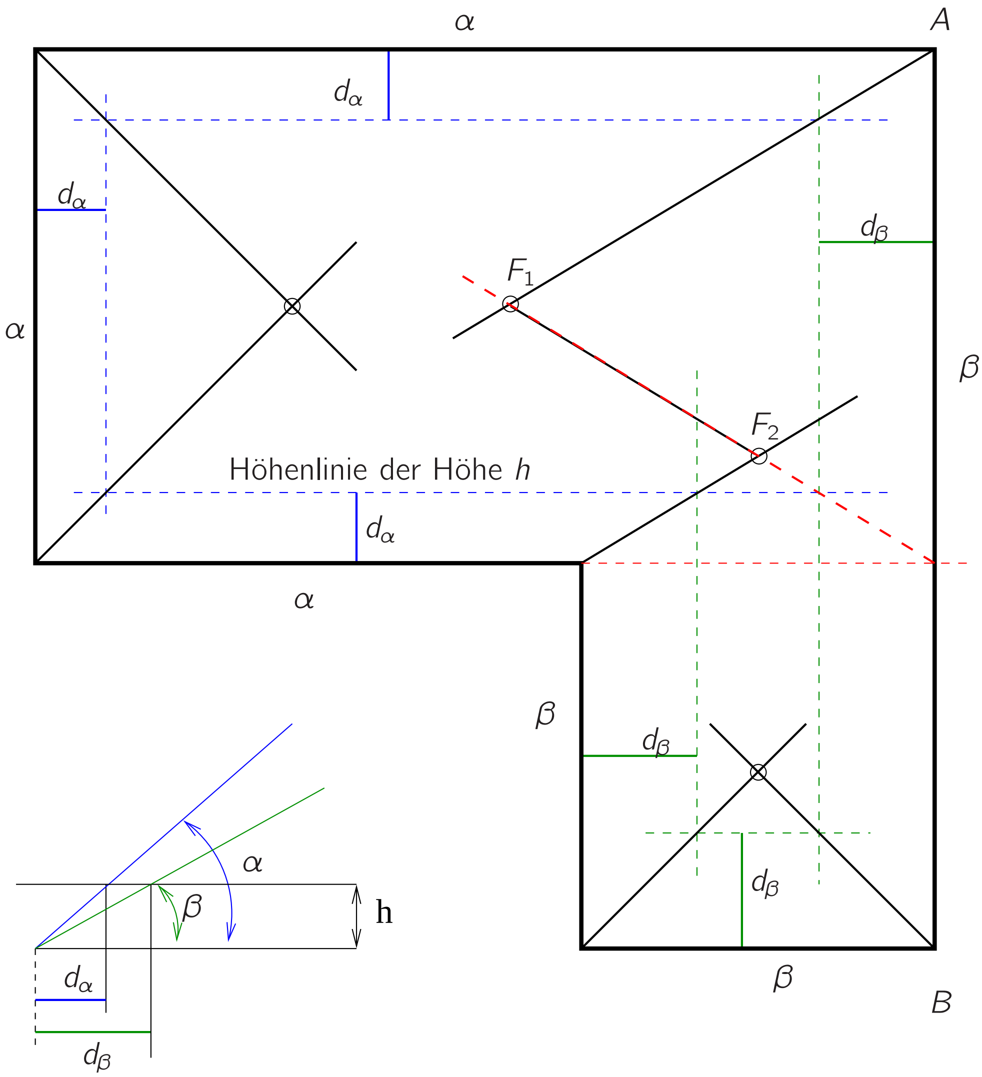


Abbildung 3.36: Grat– und Kehllinien zu Aufgabe 3.17

Beachte die Konstruktion der Strecke F_1F_2 als Grat zweier **nicht benachbarter** Dachflächen!

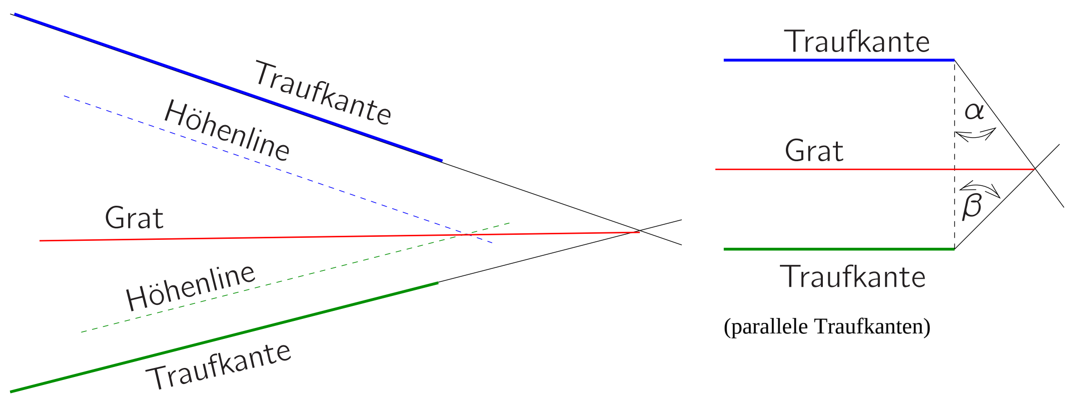


Abbildung 3.37: Konstruktionsprinzip einer Grat/Kehl–linie

Aufgabe 3.18 *:*

Gegeben: *Grundriss der Traufkanten eines Daches mit Dachneigungen* $\alpha = 30^\circ,\ \beta = 40^\circ,\ \gamma = 50^\circ$ *(Abb. 3.38).*

Gesucht: *Grat–, First– und Kehllinien.*

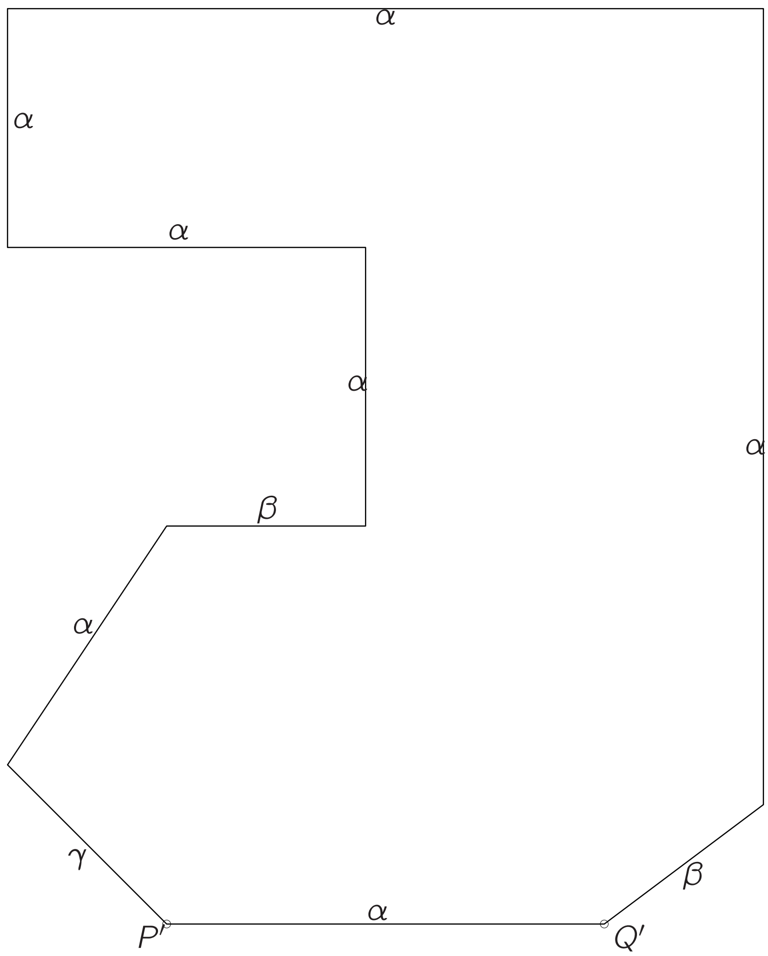


Abbildung 3.38: Aufgabe 2 zur Dachausmittelung

Kapitel 4

Gekrümmte Flächen in Parallelprojektion

Während wir bisher die Projektion ebener Flächen behandelt haben, widmen wir uns nun gekrümmten Flächen. Rotationsflächen und Regelflächen sind spezielle Beispiele dafür, die jeweils auf eine bestimmte Art aus Kurven erzeugt werden. Abwickelbare Flächen sind solche, die sich aus ebenem (ungekrümmten) Material herstellen lassen.
Für all diese Flächen ist die einfachste gekrümmte Kurve, der Kreis, wichtig, beziehungsweise seine Parallelprojektion, die Ellipse. Wir beginnen daher das Kapitel mit diesen Kurven.
Wir kommen dann zu Böschungsflächen, also Flächen mit einer konstanten Neigung. Wie ihr Name andeutet, sind sie im Straßenbau wichtig. Hierzu führen wir die von Karten bekannte kotierte Projektion ein, bei der ein Grundriss mit Höhenlinien versehen wird.
Abschließend befassen wir uns damit, wie sich zwei Flächen durchschneiden. Die Aufgabe, die Durchschnittskurve festzustellen, trainiert besonders gut das räumliche Vorstellungsvermögen.

4.1 Gekrümmte Kurven: Kreis und Ellipse (s. LEO S.55)

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem hat ein **Kreis** mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius r die

implizite (gleichungsdefinierte) *Darstellung* $\qquad x^2 + y^2 = r^2.$

Andererseits hat man die

parametrische Darstellung $\qquad x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$

mit dem Parameter $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Tatsächlich erfüllt jeder Punkt der Parameterdarstellung die implizite Gleichung, denn $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$.

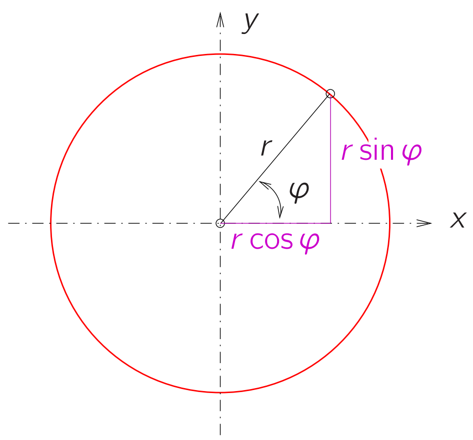


Abbildung 4.1: Parameterdarstellung eines Kreises

Die **Ellipse** verallgemeinert den Kreis. Gegeben zwei Zahlen $a, b > 0$, wird die Ellipse mit **Mittelpunkt** $(0, 0)$ folgendermaßen gegeben:

$$\textit{implizite Darstellung} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\textit{parametrische Darstellung} \qquad x = a\cos\varphi,\ y = b\sin\varphi \quad \text{mit} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\,.$$

Im Fall $a \neq b$ sind die x-Achse und die y-Achse die einzigen Symmetriegeraden der Ellipse, d.h., nur die Spiegelungen an x- und y-Achse bilden die Ellipse auf sich ab. Man nennt diese Symmetrieachsen auch die **Hauptachsen** der Ellipse. Stimmen a und b überein, so erhält man einen Kreis.

In den Punkten $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ ist die Krümmung der Ellipse extremal. Man nennt solche Punkte einer ebenen Kurve **Scheitel**.

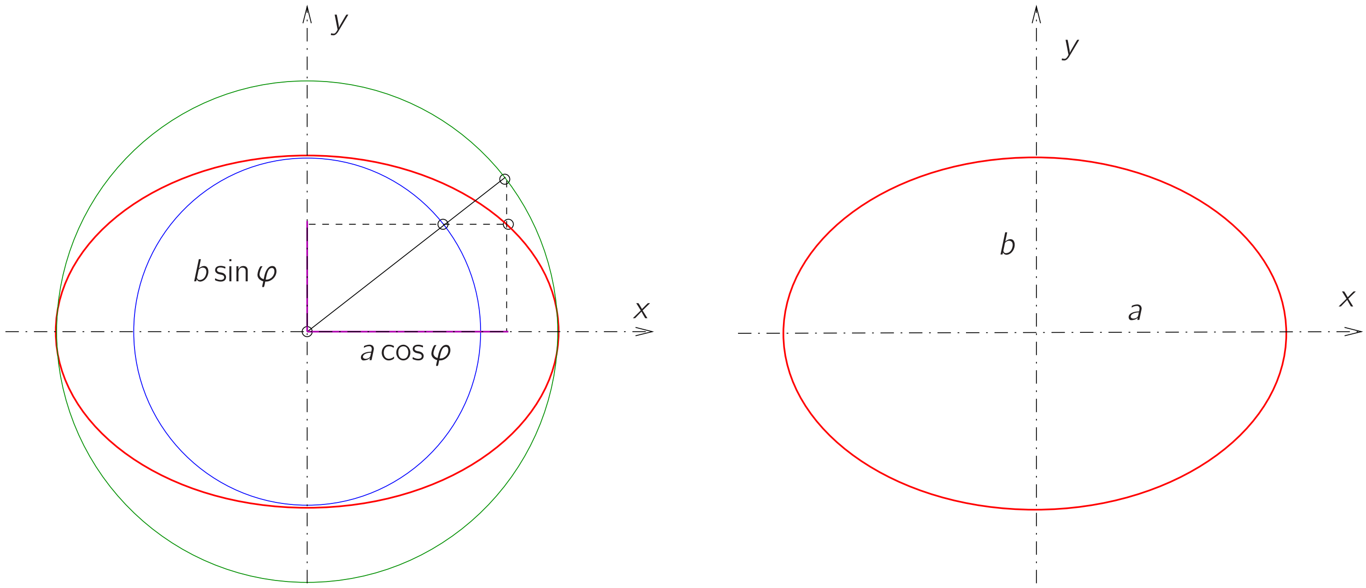


Abbildung 4.2: Parameterdarstellung einer Ellipse

Wie Abb. 4.2 links zeigt, kann man einzelne Punkte auf einer Ellipse folgendermaßen konstruieren.

(1) Zeichne zwei konzentrische Kreise mit Radien a und b. In Koordinaten sind dies $K_a(\varphi) = (a\cos\varphi, a\sin\varphi)$ und $K_b(\varphi) = (b\cos\varphi, b\sin\varphi)$.

(2) Wähle einen Strahl durch den Mittelpunkt der Kreise mit Winkel φ gegenüber der x-Richtung. Er schneidet die Kreise in $K_a(\varphi)$ und $K_b(\varphi)$.

(3) Den Ellipsenpunkt $E(\varphi) = (a\cos\varphi, b\sin\varphi)$ erhält man, indem man die x-Koordinate von $K_a(\varphi)$ nimmt und die y-Koordinate von $K_b(\varphi)$ d.h. als Schnitt von achsenparallelen Geraden durch die beiden Kreispunkte.

Wir behandeln nun zwei Konstruktionen, mit deren Hilfe man die ganze Ellipse zeichnen kann.

4.1.1 Ellipsenkonstruktionen

a) **Gärtner- oder Fadenkonstruktion.** (Abb. 4.3, links)

Voraussetzung: Die „Brennpunkte“ F_1 , F_2 und die große Halbachse a der Ellipse sind bekannt.

(1) Schneide einen Faden der Länge $2a$ zurecht.
(2) Befestige die Enden des Fadens in den Punkten F_1, F_2.
(3) Ziehe den Faden wie in der Skizze straff. Der Punkt, an dem sich die Bleistiftspitze befindet, ist ein Ellipsenpunkt.
(4) Für die Brennweite $e = \frac{1}{2}|F_1F_2|$ gilt: $e^2 = a^2 - b^2$.

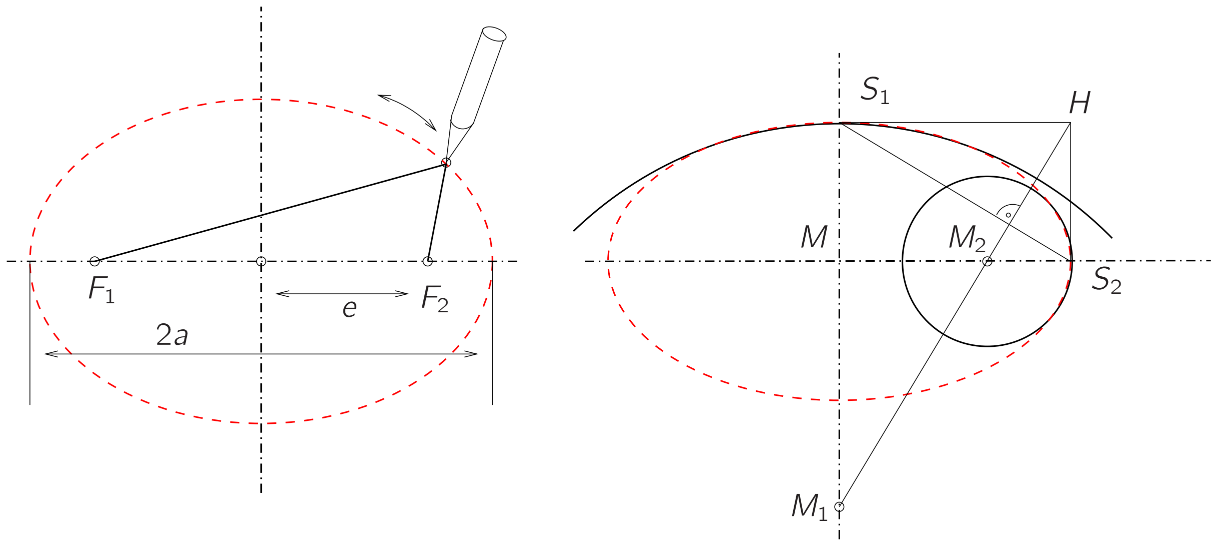


Abbildung 4.3: Gärtnerkonstruktion und Scheitel-Krümmungskreise einer Ellipse

b) **Scheitelkrümmungskreismethode.** (Abb. 4.3, rechts) (s. LEO S.64)

Wir geben nun eine Näherungsmethode zum Zeichnen einer Ellipse an. Die folgende Konstruktion bestimmt zuerst die vier Scheitelkrümmungskreise einer Ellipse exakt. Mit deren Hilfe lässt sich die Ellipse leicht annäherungsweise zeichnen.

Voraussetzung: Mittelpunkt M und Scheitel sind bekannt.

(1) Wähle zwei nicht auf einem Durchmesser liegende Scheitel S_1, S_2.
(2) Ergänze das rechtwinklige Dreieck M, S_1, S_2 durch den Punkt H zu einem Rechteck.
(3) Fälle das Lot von H auf die Gerade durch S_1, S_2.
(4) Die Schnittpunkte M_1, M_2 des Lotes mit den Achsengeraden sind die Mittelpunkte der Scheitelkrümmungskreise für die Scheitel S_1, S_2.
(5) Zeichne die Scheitelkrümmungskreise in allen Scheiteln.
(6) Zeichne eine Kurve durch die Scheitel, die die Krümmungskreise von innen bzw. von außen berührt.

4.1.2 Parallelprojektion von Kreis und Ellipse

Behauptung: Der Normalriss eines Kreises ist i.a. eine Ellipse, deren Mittelpunkt das Bild des Kreismittelpunktes ist. Die große Halbachse der Ellipse ist gleich dem Kreisradius.
(Falls der Kreis in einer projizierenden Ebene liegt, ist das Bild eine Strecke.)

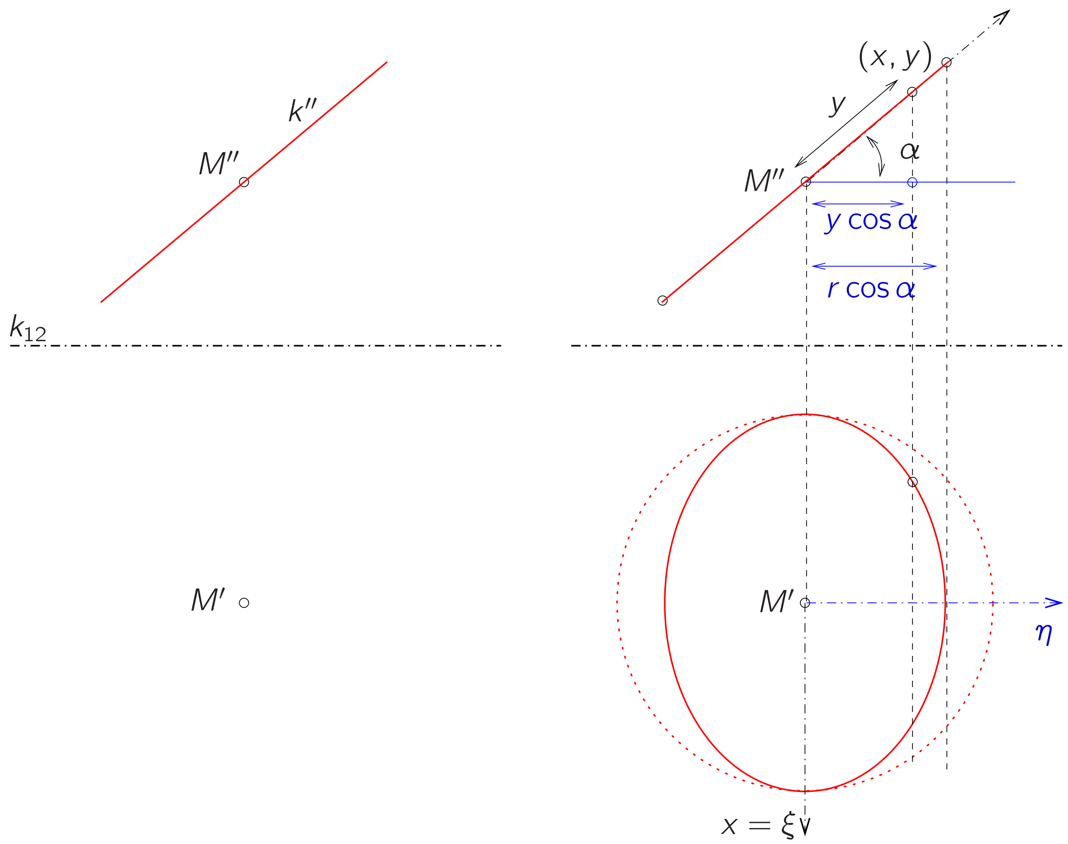


Abbildung 4.4: Projektion eines Kreises

Um unsere Behauptung nachzuprüfen, betrachten wir die Zweitafelprojektion eines Kreises aus Abb. 4.4:
Gegeben: Kreis $k \perp \pi_2$ durch seinen Aufriss k''.
Gesucht: Grundriss k' des Kreises.

Zur Lösung führen wir x-y-Koordinaten in der Kreisebene und ξ-η-Koordinaten im Grundriss ein (s. Abb. 4.4, rechts). Die Kreisgleichung ist dann $x^2 + y^2 = r^2$. In der Skizze erkennt man, dass ein Punkt (x, y) der Kreisebene den Grundriss (ξ, η) mit $\xi = x$ und $\eta = y \cos \alpha$ hat. Wegen $x^2 + y^2 = r^2$ gilt

$$\xi^2 + (\eta / \cos \alpha)^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad \xi^2 / r^2 + \eta^2 / (r \cos \alpha)^2 = 1 .$$

Dies ist tatsächlich die Gleichung einer Ellipse mit Halbachsen r und $r \cos \alpha$.

Aufgabe 4.1 *Zeichne den Grundriss des obigen Kreises mit Hilfe der Scheitelkrümmungskreismethode.*

Wie sieht das Bild einer Ellipse unter Parallelprojektion aus? Man kann zeigen, dass sie wiederum auf eine Ellipse oder eine Strecke führt. Dabei wird der Mittelpunkt auf den Mittelpunkt abgebildet. Allerdings sind die Bilder der Achsen nicht unbedingt die Achsen der Bildellipse. Dies erklärt sich bereits daraus, dass rechte Winkel i.a. nicht auf rechte Winkel abgebildet werden, siehe Abb. 4.5.

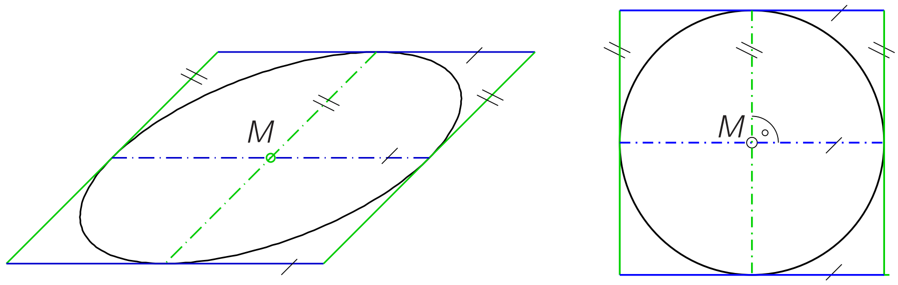


Abbildung 4.5: Parallelprojektion einer Ellipse

4.2 Zylinder und Kegel

(s. LEO S.137,140)

Durch Parallelverschieben einer Geraden g **(Erzeugende)** längs einer ebenen Kurve c **(Leitkurve)** entsteht eine **allgemeine Zylinderfläche** wie in Abb. 4.6 a).

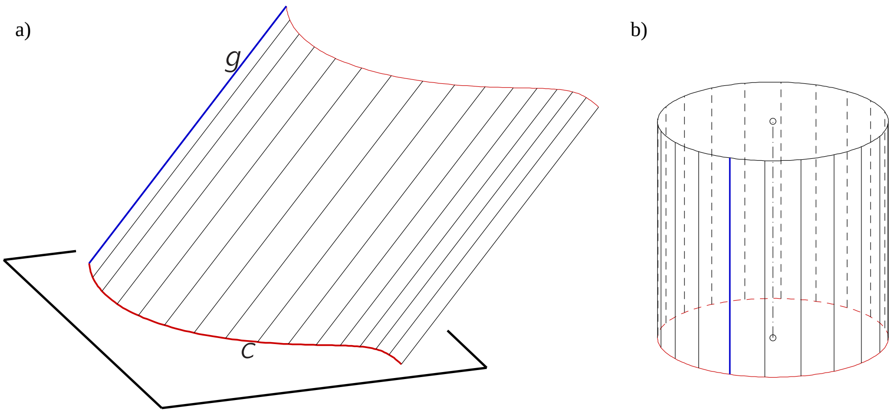


Abbildung 4.6: Erzeugung eines a) allgemeinen Zylinders b) senkrechten Kreiszylinders

Ist c speziell ein **Kreis** und stehen die Erzeugenden **senkrecht** zur Kreisebene, entsteht ein **senkrechter Kreiszylinder**, Abb. 4.6 b). Da der senkrechte Kreiszylinder auch durch Drehung einer Geraden um eine parallele Gerade erzeugt werden kann, nennt man diese Fläche auch **Dreh-** oder **Rotationszylinder**.

Eine **Ebene schneidet** einen senkrechten Kreiszylinder in einem Kreis, in einer Ellipse, oder in ein oder zwei Mantellinien (Abb. 4.7).

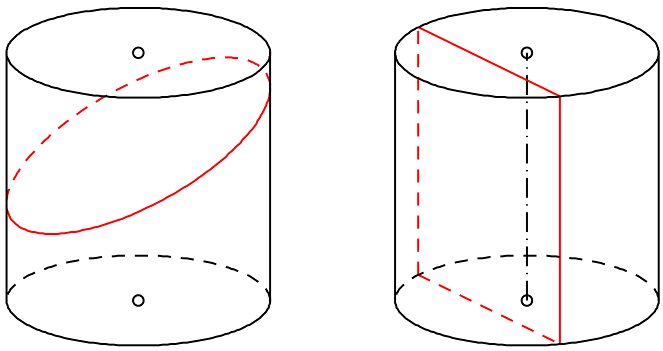


Abbildung 4.7: Ebene Schnitte eines Kreiszylinders

Gleitet eine Gerade g auf einer ebenen Kurve c und geht g stets durch einen festen Punkt S (Kegel**scheitel** oder **-spitze**), so entsteht eine **allgemeine Kegelfläche**, Abb. 4.8 a).
Ist c speziell ein **Kreis** und liegt S auf einer Senkrechten zur Kreisebene durch den Kreismittelpunkt M, so entsteht ein **senkrechter Kreiskegel** (Abb. 4.8 b)). Die Gerade a durch M, S steht senkrecht auf der Kreisebene und heißt **Kegelachse**. Da der senkrechte Kreiskegel auch durch Rotation einer Geraden durch S um a erzeugt werden kann, nennt man ihn auch **Dreh-** oder **Rotationskegel**.

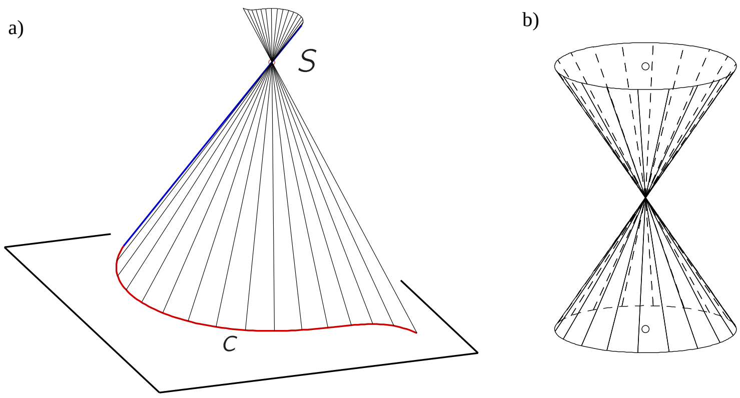


Abbildung 4.8: Erzeugung eines a) allgemeinen Kegels b) senkrechten Kreiskegels

Den Schnitt einer **Ebene** ε mit einem Drehkegel nennt man **Kegelschnitt**:

Falls die Kegelspitze S nicht in der Ebene ε liegt, so sind je nach Steilheit von ε folgende Kegelschnitte möglich:

(a)	Kreis	($\varepsilon \perp a$)	(b)	Ellipse	(ε flacher als Mantellinie)
(c)	Parabel	($\varepsilon \parallel$ Mantellinie)	(d)	Hyperbel	(ε steiler als Mantellinie)

Ebenen durch S schneiden den Kegel in zwei, einer oder keiner Geraden.

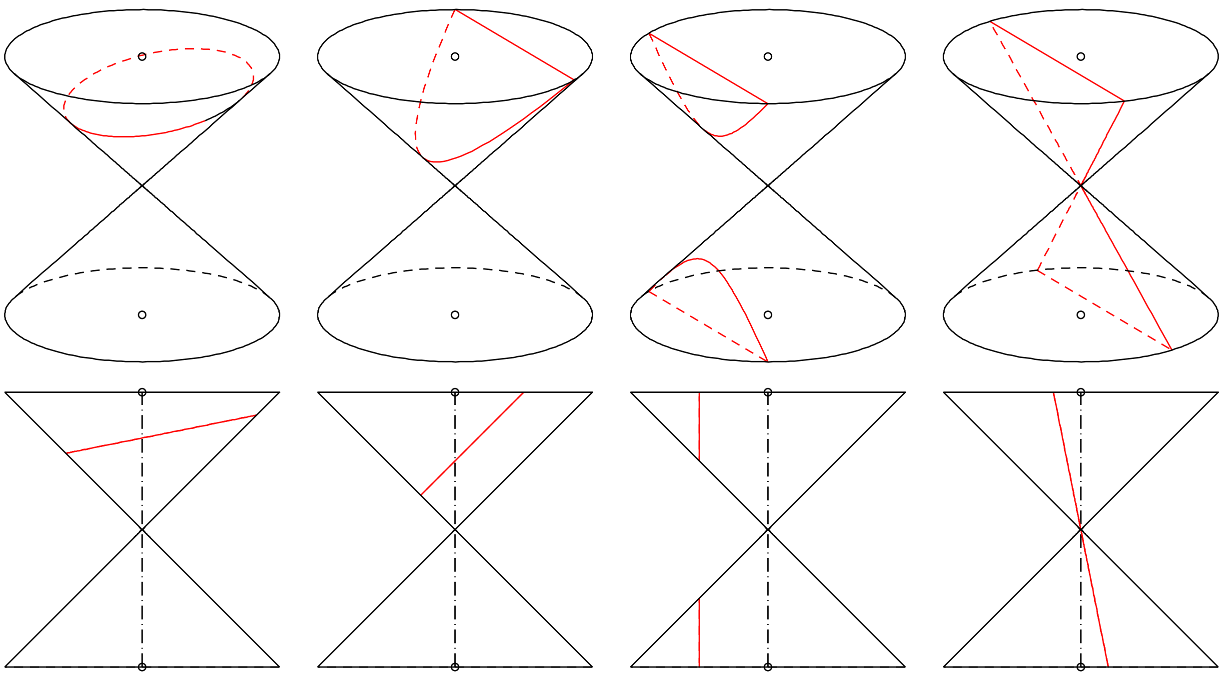


Abbildung 4.9: Ebene Schnitte eines Kreiskegels: Ellipse, Parabel, Hyperbel, Geradenpaar

4.3 Rotationsflächen

Weil sie einfach hergestellt werden können, sind viele Körper **Rotationsflächen**.

Mathematisch wird eine Rotationsfläche durch die Drehung einer Kurve k um eine *Rotationsachse* a erzeugt. Jeder Punkt der Kurve k beschreibt bei der Drehung einen Kreis, dessen Mittelpunkt auf a liegt und der senkrecht auf a steht. Wenn die Kurve k und die Achse a in derselben Ebene liegen, so nennt man k auch einen **Meridian**. Liegt die Achse einer Rotationsfläche parallel zu einer Risstafel, so ist die Umrisskurve in dieser Risstafel ein Meridian.

Zylinder und Kegel sind Beispiele von Rotationsflächen. Ihre Meridiane sind Geraden. Die Abbildungen 4.10 und 4.11 zeigen weitere Beispiele.

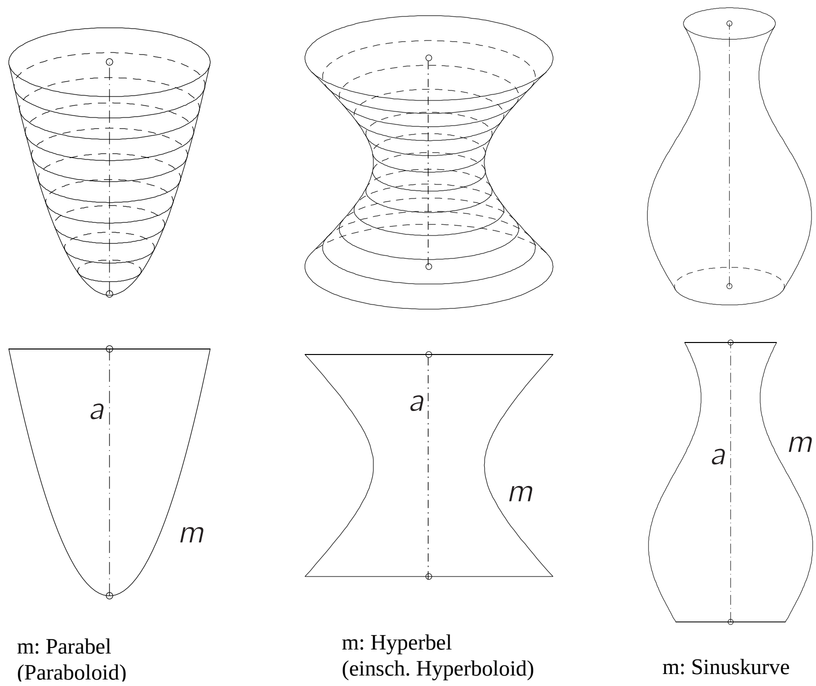


Abbildung 4.10: Rotationsflächen und ihre Meridiankurven

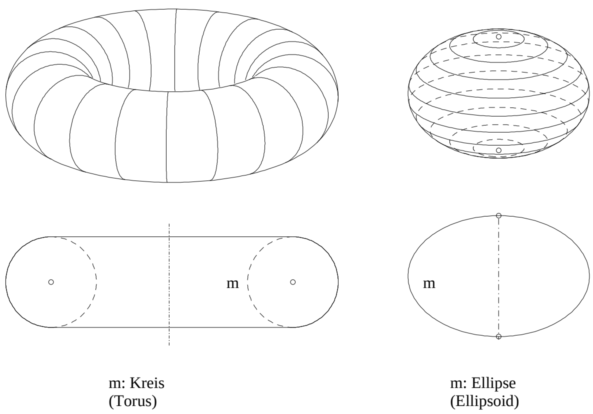


Abbildung 4.11: Torus und Rotationsellipsoid

4.4 Regelflächen

Als **Regelfläche** wird eine Fläche bezeichnet, die durch Bewegung einer Geraden im Raum erzeugt wird. Einfache Beispiele sind **Zylinder** und **Kegel**, nicht nur über dem Kreis, sondern auch in den allgemeinen Varianten.
Bei der **Wendelfläche** wird eine Gerade in einer Schraubbewegung um eine dazu senkrechte Achse gedreht. Das Ergebnis kann man sich als eine doppelte Wendeltreppe vorstellen, siehe Abb. 4.12 links. Je nach Drehrichtung kann eine Wendelfläche eine Rechtsschraube oder Linksschraube darstellen. Als Sonderfälle ergibt sich die Ebene, falls entweder der Drehanteil oder der Translationsanteil der Schraubung verschwindet. Man kann auch eine Gerade, die nicht senkrecht auf der Achse steht, verschrauben; ein Beispiel dafür zeigt Abb. 4.12 rechts.

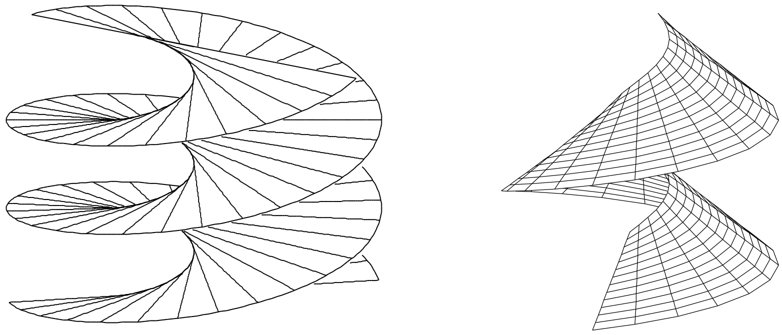


Abbildung 4.12: Wendelfläche (links), Verschraubung einer geneigten Geraden um eine Achse (rechts)

Wir stellen noch zwei weitere Flächen vor, siehe Abb. 4.13.
a) Das **einschalige Hyperboloid** ist von Kühltürmen bekannt und entsteht durch Rotation einer zur Achse windschiefen Geraden. Die Spiegelbilder dieser Geraden ergeben eine weitere Geradenschar auf der Fläche.
b) Das **hyperbolische Paraboloid** ist eine Sattelfläche, die gern für Dächer verwendet wird. Man kann ein beliebiges berandendes Viereck im Raum vorschreiben. Geraden verbinden jeweils gegenüberliegende Strecken dieses Vierecks, wobei diese Strecken mit konstanter Geschwindigkeit durchfahren werden.

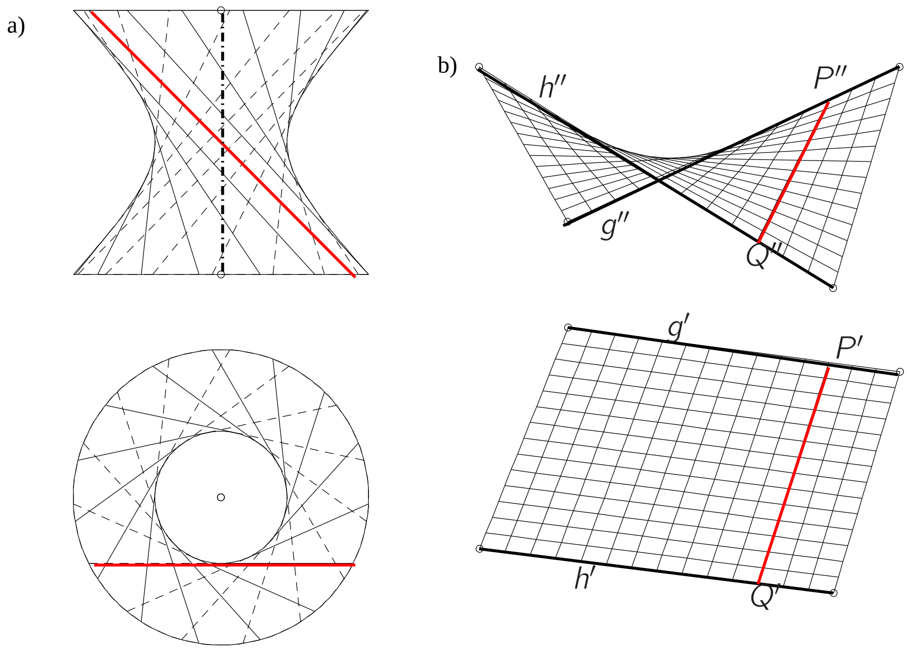


Abbildung 4.13: a) einschaliges Hyperboloid b) hyperbolisches Paraboloid

Diese beiden Flächen sind **doppelte Regelflächen**: Sie enthalten zwei verschiedene Geradenscharen und sind daher auf zwei verschiedene Weisen Regelflächen. Sie werden in der Praxis gern verwendet, weil sie konstruktiv einfach herzustellen sind: Aus geraden Trägern oder Tragkonstruktionen entsteht eine gekrümmte Fläche.

Aufgabe 4.2 *a) Gegeben ist in Grund– und Aufriss eine erzeugende Strecke und die Rotationsachse eines einschaligen Hyperboloids. Zeichnen Sie den Umriss in Grund– und Aufriss.*
b) Zeichen Sie das hyperbolische Paraboloid, das das in Grund– und Aufriss gegebene Viereck berandet.

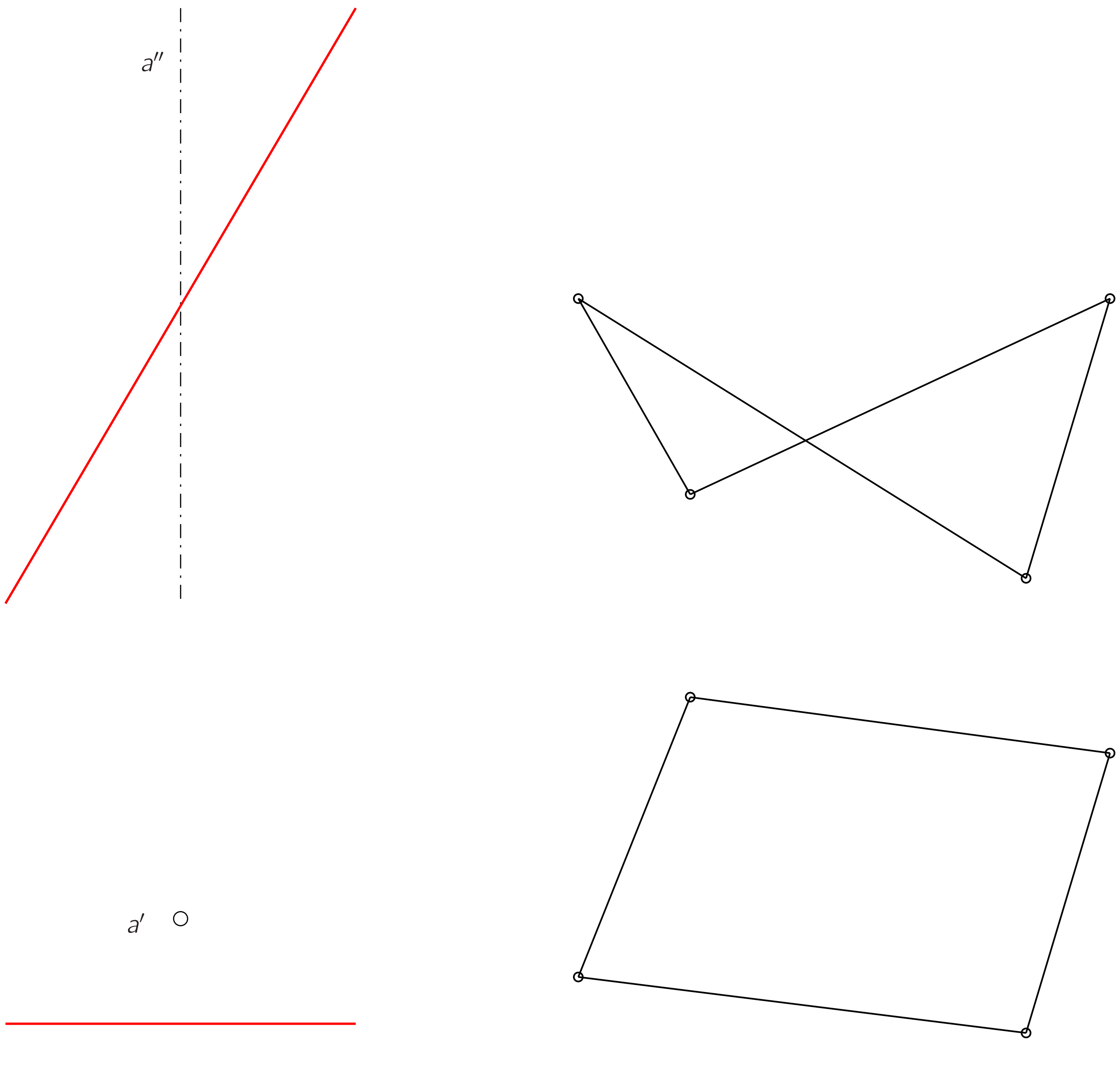


Abbildung 4.14: Regelflächen: a) einschaliges Hyperboloid b) hyperbolisches Paraboloid

4.5 Abwickelbare Flächen (s. LEO S.162,164)

Eine Fläche nennt man **abwickelbar**, wenn sie sich **längentreu** in die Ebene abbilden lässt, d.h. man kann sie unter Erhaltung der Längen sämtlicher auf ihr liegender Kurven in die Ebene ausbreiten. Beispielsweise sind beliebige Zylinder und Kegel abwickelbar. Es ist ein bekanntes Ergebnis der Kartographie, dass die Kugel nicht abwickelbar ist: Es gibt keine längentreuen Karten der Erde. Tatsächlich ist außer Zylinder und Kegel (sowie natürlich der Ebene selbst) keine weitere Rotationsfläche abwickelbar.

Abwicklung eines Drehzylinders

Gegeben: Ein Drehzylinder und ein Punkt darauf in Grund- und Aufriss.
Gesucht: Die Abwicklung des Drehzylinders und des Punktes P.

Lösungs**idee:** Man nähert den Zylinder durch ein **Prisma** (Querschnitt ist ein regelmäßiges n-Eck) an, „schneidet" das Prisma längs einer Kante auf und wickelt es in die Ebene ab.

Durchführung: (Abb. 4.15)

(1) Teile den Basiskreis in n (≥ 12) Teile und zeichne das n-Eck.
(2) Nimm die Länge d einer Seite des n-Ecks in den Zirkel und zeichne ein Rechteck der Höhe h (Zylinderhöhe) und Breite $n \cdot d$.
(3) Der Punkt P liegt auf oder zwischen zwei Kanten des Prismas. Zeichne diese zwei Kanten in der Abwicklung, nimm den kleineren Abstand von P zu einer dieser Kanten und zeichne die entsprechende „Zwischenkante" k in die Abwicklung.
(4) Übertrage P in die Abwicklung auf die Zwischenkante. Die Höhe des Punktes P ergibt sich aus dem Aufriss.

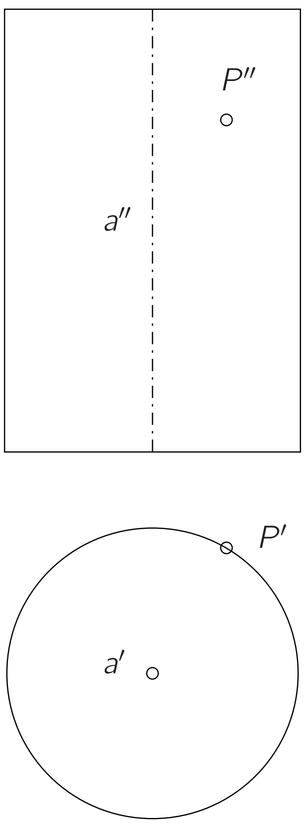


Abbildung 4.15: Abwicklung eines Zylinders

Abwicklung eines Drehkegels

Gegeben: Ein Drehkegel und ein Punkt darauf in Grund– und Aufriss (Abb. 4.16).
Gesucht: Die Abwicklung des Kegels und des Punktes P.

Lösungs**idee:** Annäherung des Kegels durch eine n-kantige **Pyramide**. Die Abwicklung des Kegels ist ein Kreissektor, dessen Öffnungswinkel $\alpha = 2\pi r/l$ durch den entsprechenden Winkel der abgewickelten Pyramide angenähert wird. Die Abwicklung des Punktes P erhält man durch eine zur Zylinderabwicklung analogen Näherungskonstruktion. Die notwendige wahre Länge der Strecke $\overline{SP}$ erhält man durch Paralleldrehen zu π_2.

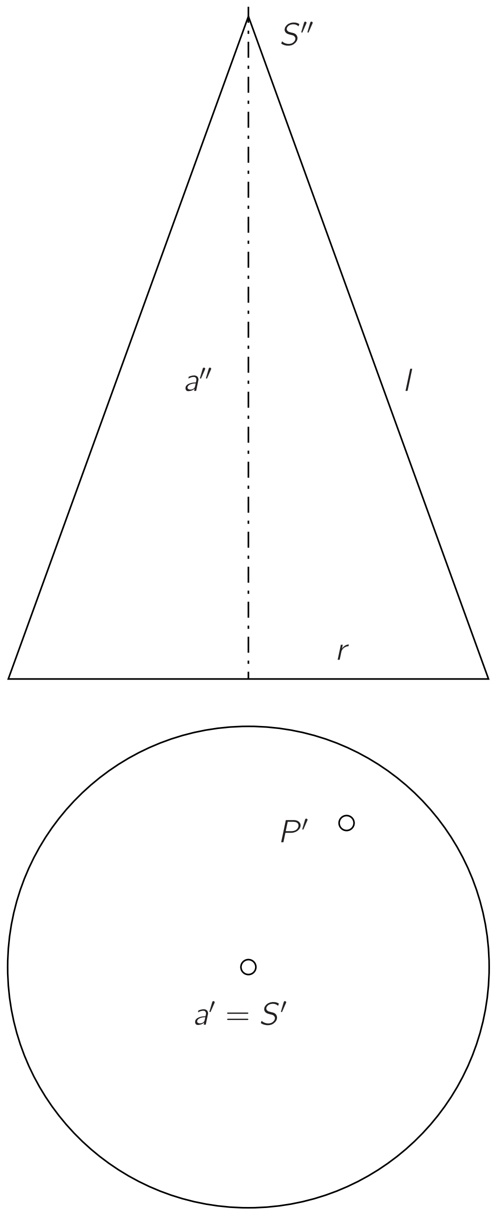


Abbildung 4.16: Abwicklung eines Kegels

Interessant sind auch **Auf**wicklungen:

Aufgabe 4.3 *Wickle das Plakat in Abb. 4.17 auf die Reklamesäule (Zylinder) auf.*

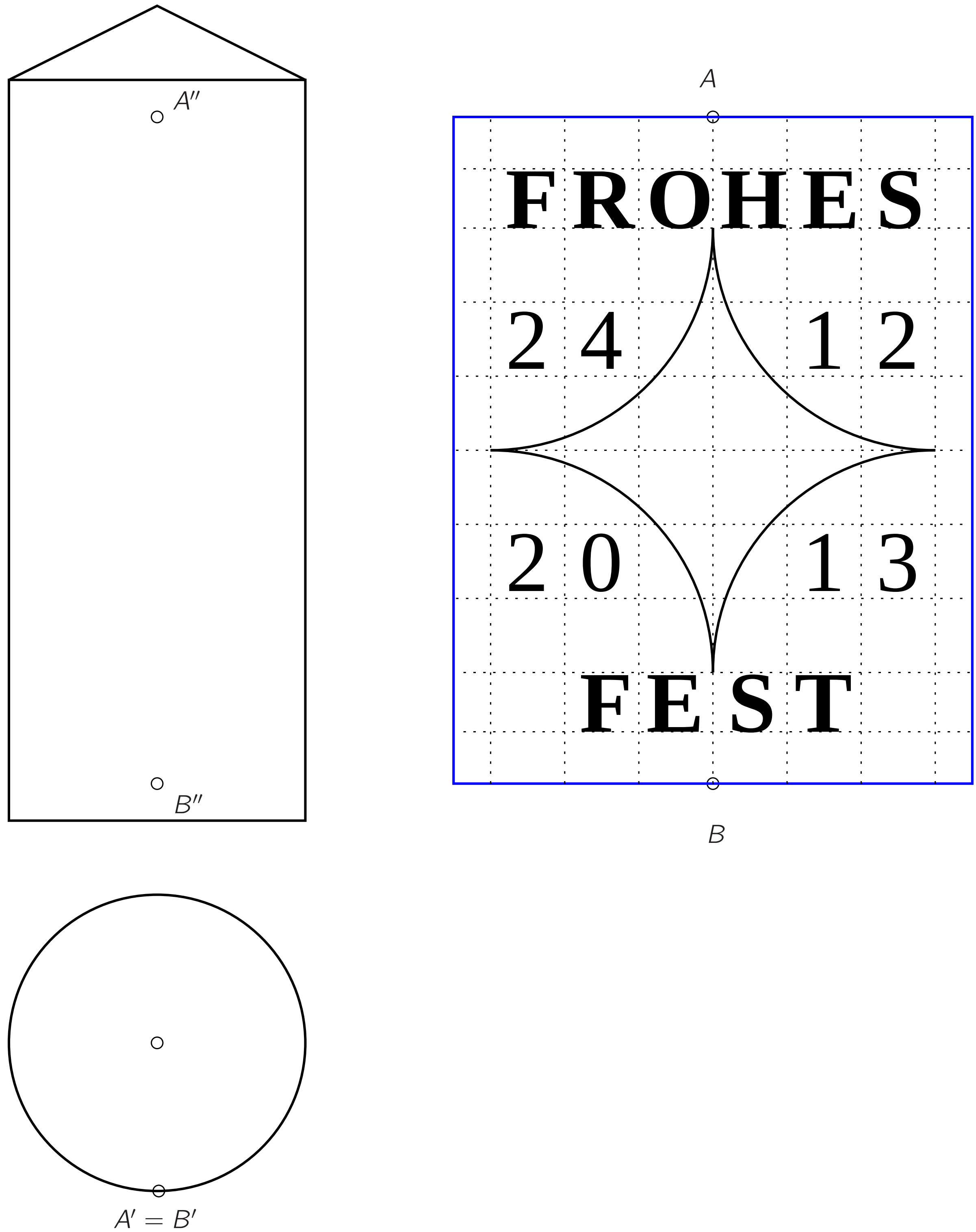


Abbildung 4.17: Aufwicklung auf einen Zylinder

4.6 Kotierte Projektion

(s. LEO S.183)

Um im nächsten Abschnitt Böschungsflächen zu behandeln, wollen wir kurz eine aus der Kartographie und von Geländedarstellungen gut bekannte Projektionsform einführen: die **kotierte Projektion**. Dies ist ein Grundriss, in den man *Höhenlinien* projiziert und sie mit *Höhenangaben* (Kote) versieht, siehe Figur 4.18 unten. Auf diese Weise reicht bereits eine Projektion, um ein Gelände zu beschreiben.

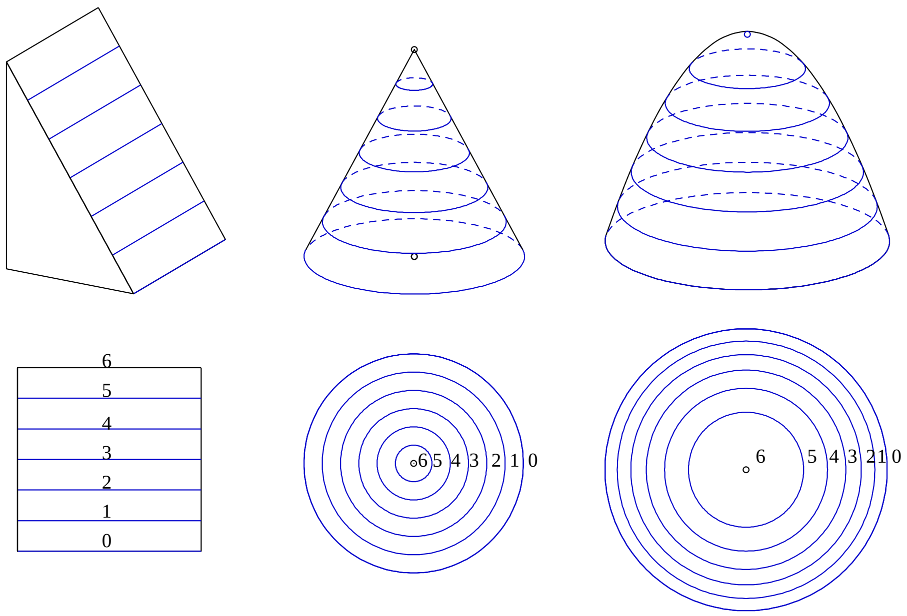


Abbildung 4.18: Ebene, Kegels und Paraboloid in Parallelprojektion (oben) und kotierter Projektion (unten)

Der Schnitt zweier in kotierter Projektion gegebener Flächen läßt sich leicht ermitteln: Man muss nur die Schnittpunkte von Höhenlinien zu gleichen Höhen der beiden Flächen bestimmen. Die Verbindungskurve dieser Punkte ergibt dann (näherungsweise) die Schnittkurve. Dort wo die Höhenlinien der Schnittfläche die Schnittkurven kreuzen, machen sie einen Winkel.

Aufgabe 4.4 *Bestimme in Abb. 4.19 die Schnittkurven in kotierter Projektion zwischen*
a) Ebene und Kegel b) Ebene und Paraboloid.

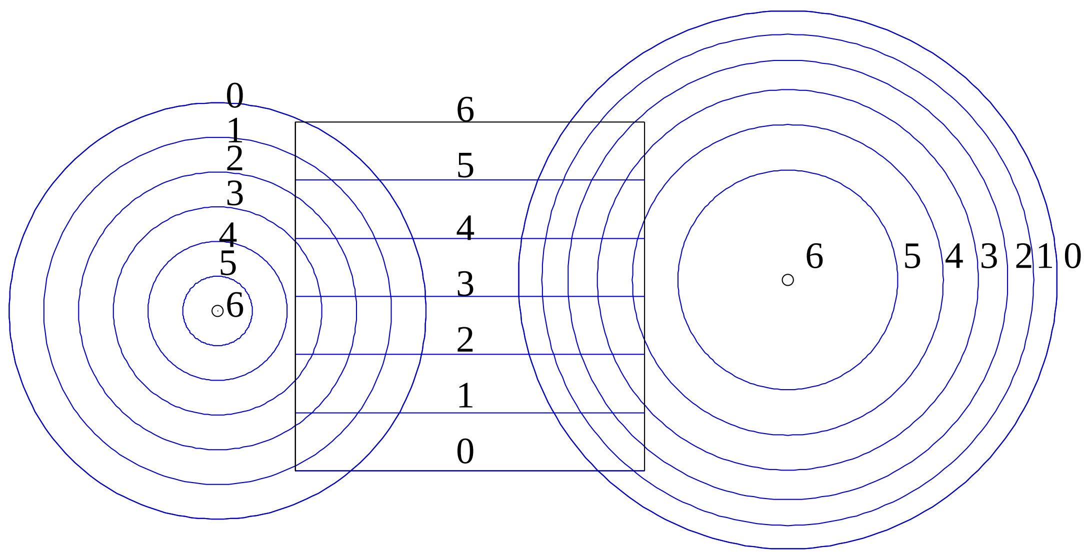


Abbildung 4.19: Schnittkurven in kotierter Projektion zwischen Kegel, Ebene und Paraboloid

4.7 Böschungsflächen

(s. LEO S.193)

Schüttet man entlang eines sich über einer Grundebene π erhebenden Straßenrandes Erde, so entsteht ein sogenannter **Böschungskörper**, dessen Oberfläche **Böschungsfläche** genannt wird. Dabei ist die Neigung einer Fläche gerade die Steilheit ihrer **Falllinien**, also der Linien des steilsten Anstiegs bzw. Abfalls.

Böschungsflächen haben eine *konstante Neigung*, die durch das Schüttmaterial vorgegeben ist: Sand z.B. hat maximal eine Neigung von $1 : 2$ oder etwa $26°$. Mit gröberen Materialen lassen sich bei Anschüttung maximal $30°$ oder $1 : 1,7$ erreichen.

Geometrisch kann man sich eine Böschungsfläche als *Einhüllende* einer Schar von (Schütt-)Kegeln vorstellen, deren Spitzen sich auf einer vorgegebenen Kurve (Straßenrand) befinden, siehe Abbildung 4.20. Die Falllinien der Böschungsfläche sind Geraden, in denen jeweils ein Kegel sie berührt (Abb. 4.20 oben Mitte). Daher sind Böschungsflächen auch solche Regelflächen, bei denen alle Regelgeraden dieselbe "Steilheit" besitzen. Die Höhenlinien der Böschungsfläche ergeben sich als Einhüllende der Schar von Kreisen, die Höhenkreisen der Schüttkegel sind (Abb. 4.20 rechts). Abtragungen kann man entsprechend deuten, wobei man Kegel benutzt, die sich nach oben öffnen.

In der Praxis sind meist Kurven wie Straßenränder kotiert gegeben und eine Böschungsfläche vorgegebener Steilheit ist ebenfalls in kotierter Projektion gesucht. Wir bestimmen diese Fläche zeichnerisch:

1. Markiere diejenigen Punkte auf der gegebenen Randkurve, wo Randkurve und Gelände genau die gleiche Höhe besitzen. Diese Punkte begrenzen Aufschüttungs- und Abtragungszonen.
2. Bestimme die Abstände zwischen Höhenkreisen von Kegeln aus der vorgegebenen Neigung, z.B. durch ein Steigungsdreieck.
3. Zu ausgewählten Randpunkten zeichne Kreise als Höhenlinien gedachter Schütt- oder Abtragungskegel und versehe sie mit Höhenangaben.
4. Für eine gegebene Höhe verbinde mit einer Einhüllenden passende Kreise, sowie Randpunkte. Das ergibt die Höhenlinien der Böschungsfläche.
5. Bestimme die Schnittkurve der Böschungsfläche mit dem Gelände (oder zwischen zwei verschiedenen Böschungsflächen) über die Schnittpunkte der jeweiligen Höhenlinien (vgle. Abb. 4.22).
6. Trage die entstehenden Höhenlinien von Gelände mit Aufböschung/Abtragung an. In Punkten der Schnittkurve bilden die Höhenlinien einen Winkel.

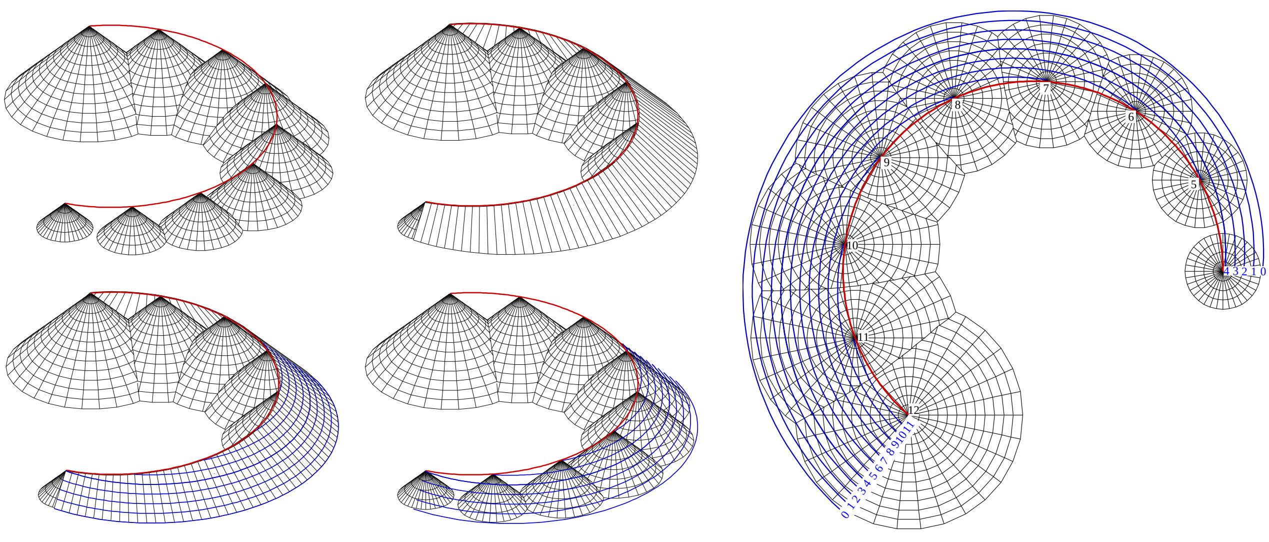


Abbildung 4.20: Erzeugung und kotierte Darstellung einer Böschungsfläche entlang einer Schraublinie

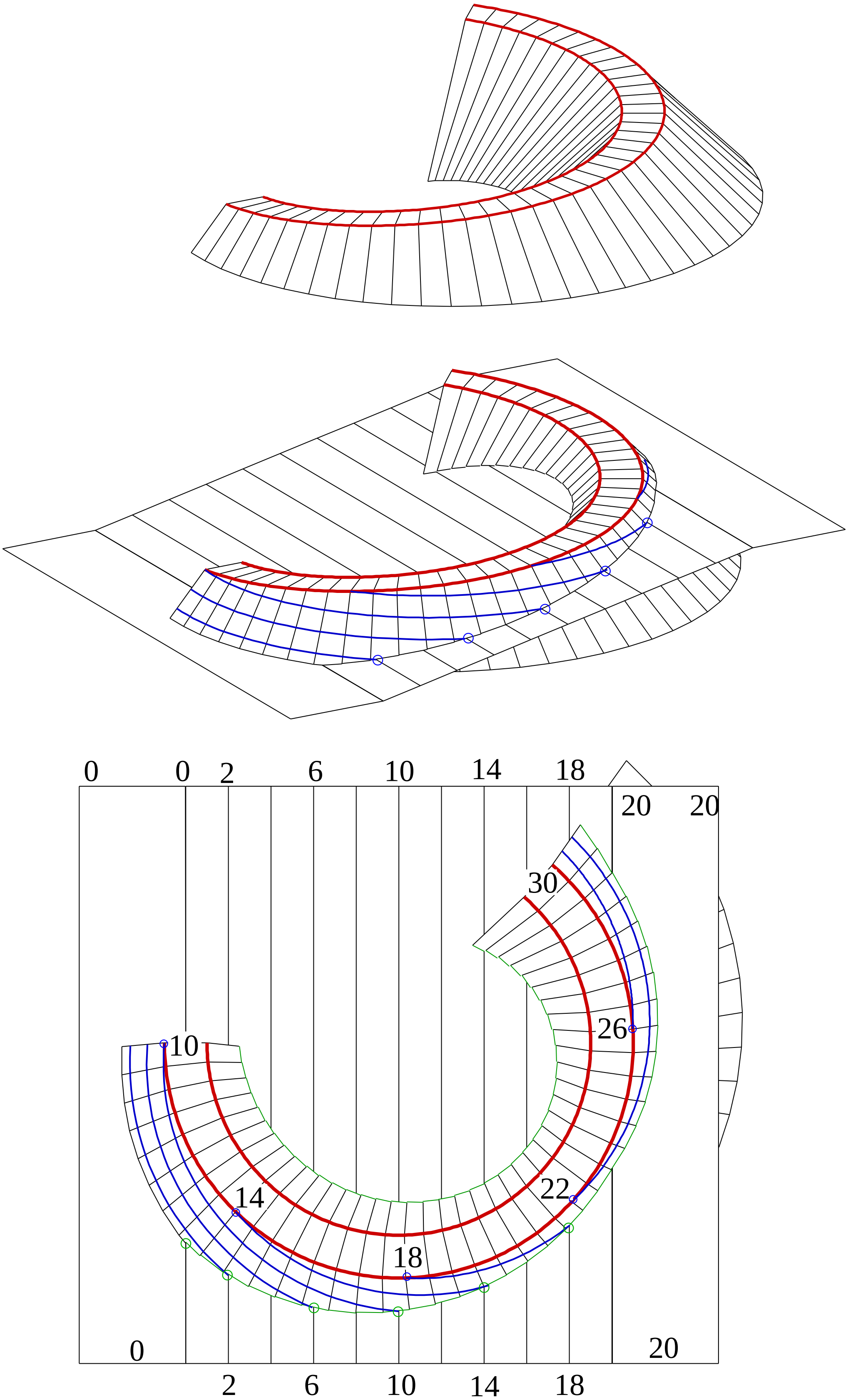


Abbildung 4.21: Böschungsfläche einer Strasse und deren Schnitt mit einem Gelände (Ebenenstücke)

Aufgabe 4.5 *In kotierter Projektion ist eine Straße und eine Runde Plattform in einem horizontalen ebenen Gelände (Höhe 0) gegeben (Abb. 4.22). Konstruiere den Böschungskörper mit Steilheit 1 für die Straße und Steilheit 2/3 für die Plattform sowie den Schnitt mit dem Gelände. Schneiden sich beide Böschungskörper?*

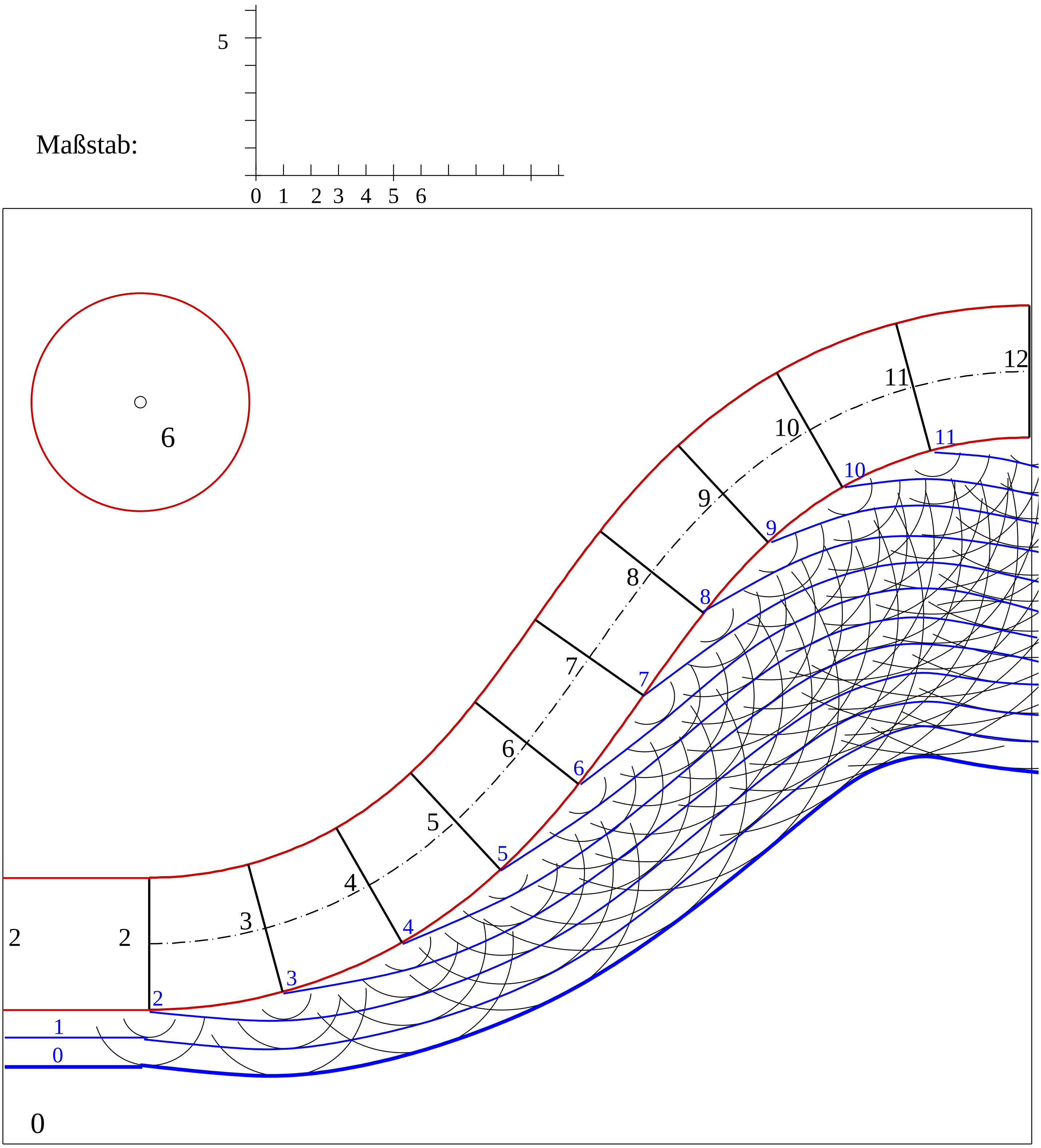


Abbildung 4.22: Aufgabe: Böschungsfläche einer Straße und einer Plattform

4.8 Durchdringungen einer Kurve und einer Fläche

Gegeben: Kurve k und Fläche Φ.
Gesucht: Durchstoßpunkte $S = k \cap \Phi$.
Lösungsidee: Die Kurve wird in eine Hilfsfläche Ψ (meistens: Ebene oder Kugel) so eingebettet, dass die Schnittkurve $h := \Psi \cap \Phi$ einfach zu konstruieren ist. Die Durchstoßpunkte ergeben sich dann aus $k \cap h$.

Beispiel 1: Gerade und Kugel

Gegeben: Gerade g, Kugel Φ mit Mittelpunkt M in Grund– und Aufriss.

Durchführung:

1. Wir wählen als **Hilfsfläche** eine Ebene ε, die g enthält und vertikal ist, d.h. $\varepsilon' = g'$. Der Schnitt von ε und Kugel ist ein **Kreis** h mit Mittelpunkt M_h. Wir müssen $h \cap g$ bestimmen.
2. **Umprojektion**: Führe eine neue Risstafel π_3 parallel zu ε ein.
   Bestimme $M_h''' = M'''$ und h''', sowie g'''. Dann liefert $h''' \cap g'''$ die Durchstoßpunkte D_1''', D_2'''.
3. Konstruiere D_1', D_2' und D_1'', D_2''.

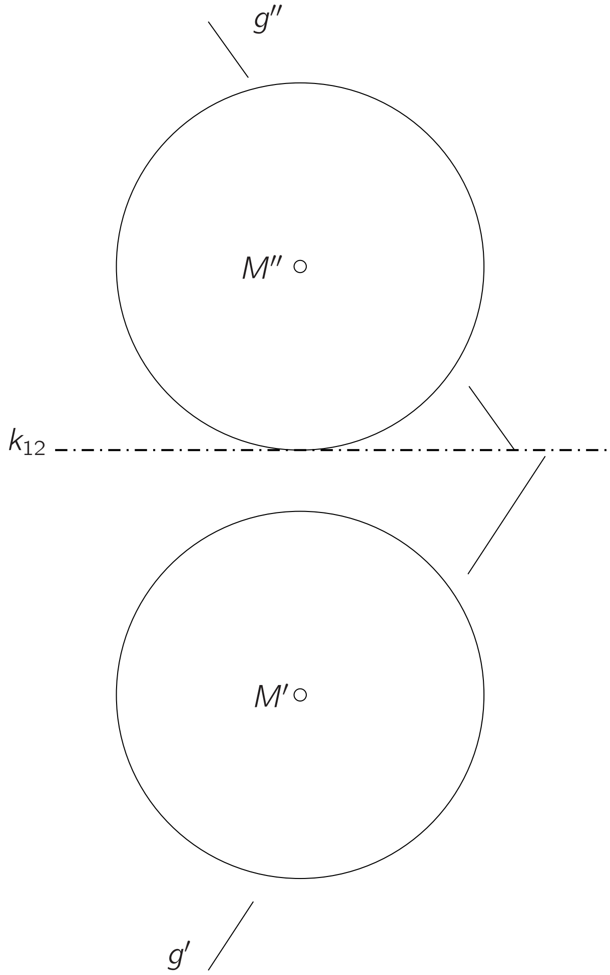


Abbildung 4.23: Schnitt von Kugel und Gerade

Beispiel 2: Gerade und Kegel

Gegeben: Gerade g, Kegel Φ mit Spitze S, Achse a, Basiskreis c in Grund– und Aufriss.

Durchführung:

1. Als **Hilfsfläche** wählen wir die Ebene ε durch die Kegelspitze S und g. Sie schneidet den Kegel in zwei Mantellinien h_1, h_2.
2. Wir bestimmen die Spurgerade s'_ε der Ebene ε. Ein Spurpunkt P_1 liegt auf g. Eine Gerade $\ell \subset \varepsilon$, die z.B. durch S und einen Punkt $Q \in g$ läuft, ergibt einen weiteren Spurpunkt P_2, und damit s_ε.
3. Der Schnitt $s'_\varepsilon \cap c'$ liefert zwei Punkte H_1, H_2, und damit die Mantelgeraden h_1, h_2.
4. Die gesuchten Durchstoßpunkte sind dann $D_1 := h_1 \cap g$ und $D_2 := h_2 \cap g$.

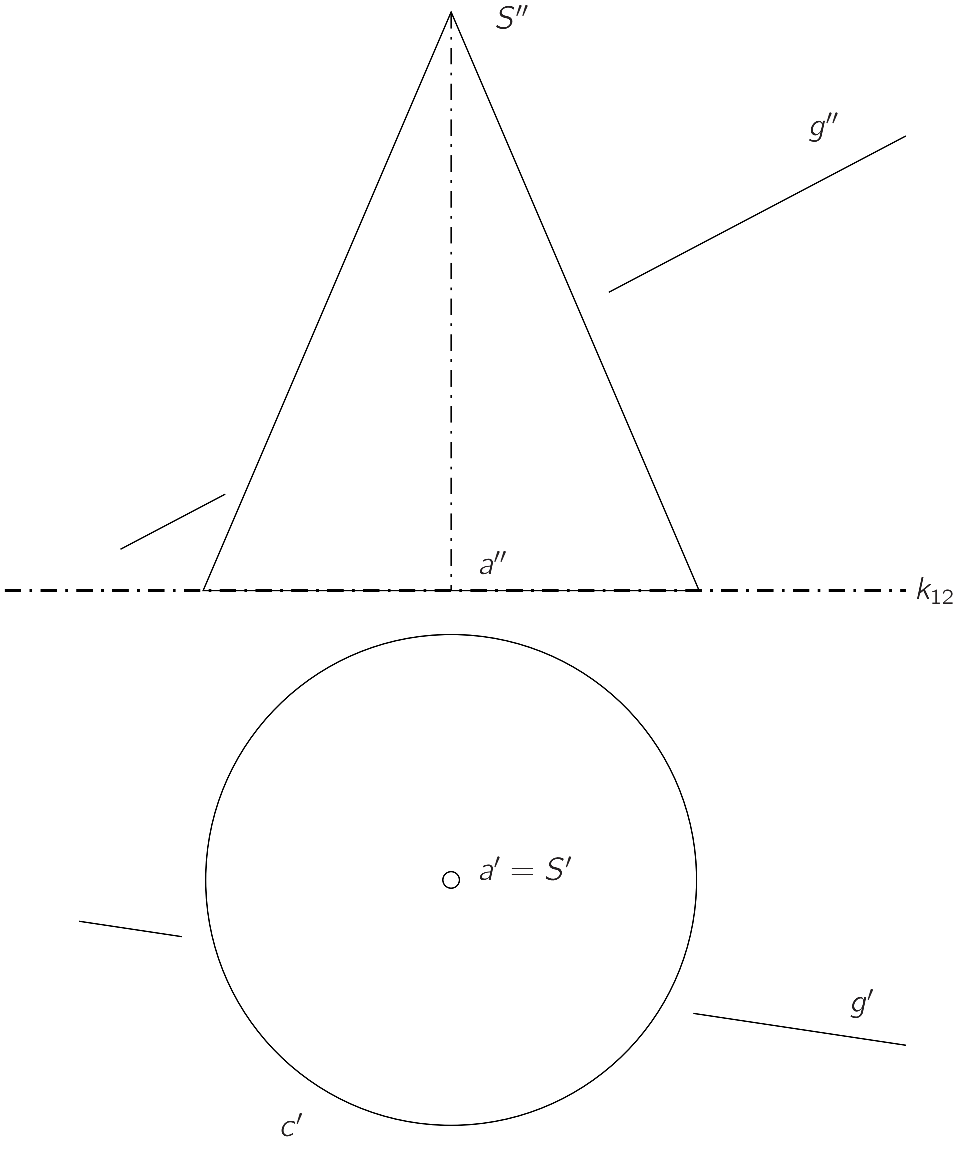


Abbildung 4.24: Schnitt: Kegel–Gerade

4.9 Durchdringungskurven zweier Flächen

Die *Durchdringungs*– oder *Verschneidungskurven* zweier Flächen Φ_1, Φ_2 konstruiert man punktweise wie folgt. Man wählt eine **Hilfsfläche** Ψ, die die gegebenen Flächen Φ_1, Φ_2 in einfachen Kurven (z.B. Geraden, Kreise) k_1 und k_2 schneidet. Jeder Schnitt $k_1 \cap k_2$ liefert einen oder mehrere Punkte von Φ_1 und Φ_2. Das Verfahren wird so lange wiederholt, bis man eine "genügende" Anzahl von gemeinsamen Punkten gefunden hat.

4.9.1 Hilfsebenenverfahren

(s. LEO S.152)

Gegeben: Kegel Φ_1 (Achse a_1), Zylinder Φ_2 (Achse a_2) (Abb. 4.25).
Gesucht: Durchdringungskurve $k = \Phi_1 \cap \Phi_2$.
Lösungs**idee**: Hilfs**ebene** $\varepsilon \perp a_1$ schneidet den Kegel in einem Kreis und den Zylinder in einem Geradenpaar.

Durchführung:

1. Wähle eine geeignete Ebene ε und zeichne ε''.
2. Zeichne den Grundriss c' des Schnittkreises $\varepsilon \cap \Phi_1$ (Radius r) .
3. Ziehe im Grundriss die Parallelen g', h' zu a_2' im Abstand d.
4. Die (max. vier) Schnittpunkte P', Q' des Kreises c' mit g', h' sind die Grundrisse von Punkten der Durchdringungskurve.
5. Auf ε'' erhält man dann P'', Q''.
6. Wiederhole 1.–5. genügend oft.
7. Verbinde die gefundenen Punkte mit einer Kurve.

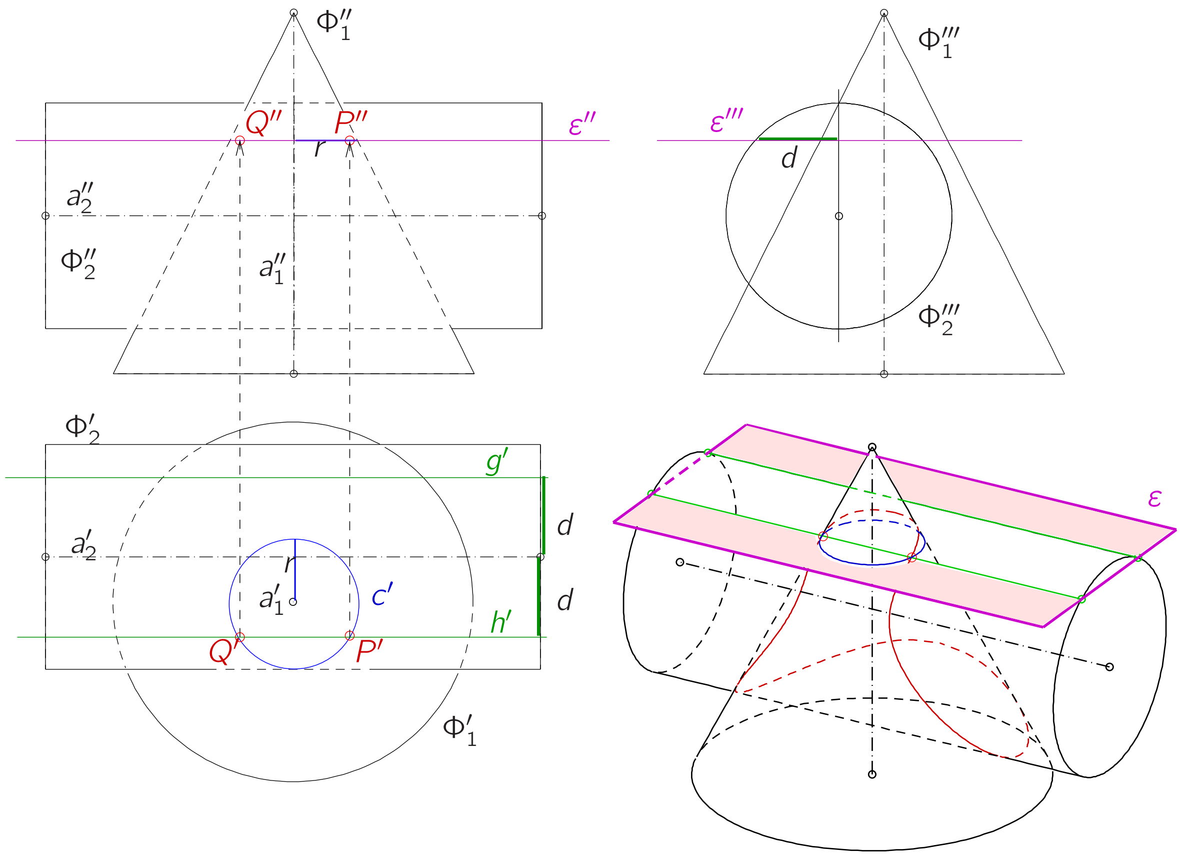
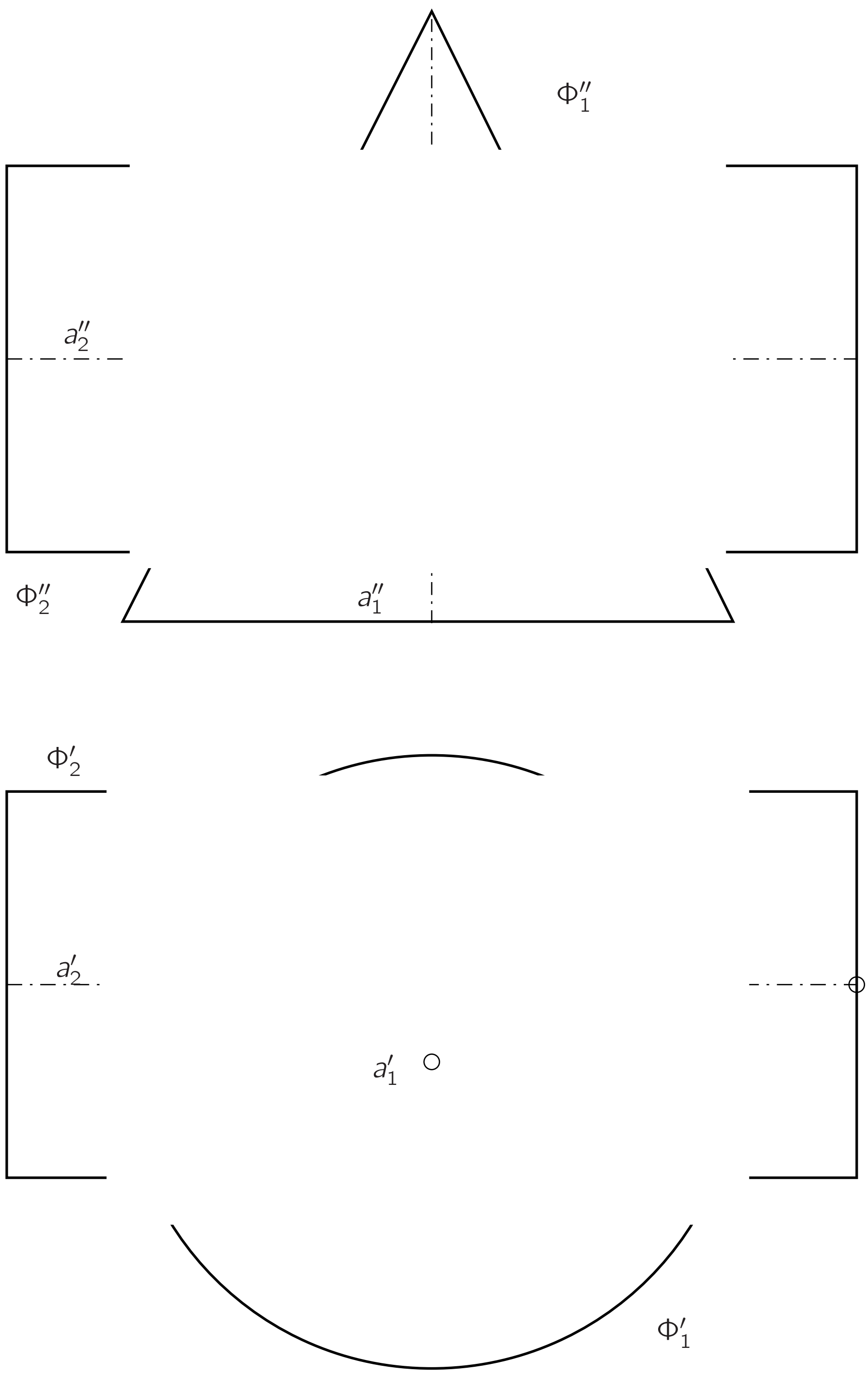


Abbildung 4.25: Veranschaulichung des Hilfsebenenverfahrens

Aufgabe 4.6 :
Gegeben: Kegel und Zylinder in Grund– und Aufriss (Abb. 4.26).
Gesucht: Durchdringungskurve in Grund– und Aufriss.



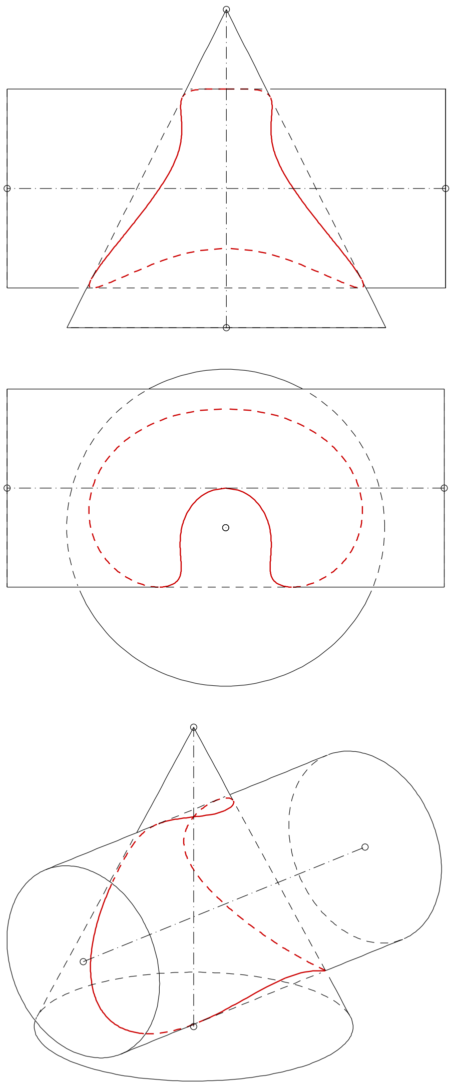


Abbildung 4.26: Schnitt: Kegel–Zylinder (Hilfsebenenverfahren)

4.9.2 Hilfskugelverfahren

(s. LEO S.155)

Gegeben: Kegel Φ_1 (Achse a_1), Zylinder Φ_2 (Achse a_2). Die Achsen schneiden sich! (Abb. 4.25).
Gesucht: Durchdringungskurve $k = \Phi_1 \cap \Phi_2$.
Lösungs**idee**: In diesem Beispiel liefern horizontale Schnitte mit dem Zylinder Ellipsen, d.h. nicht einfach zu zeichnende Kurven. Deshalb benutzen wir eine andere Idee: Wir wählen als Hilfsflächen **Kugeln** mit dem Schnittpunkt $M = a_1 \cap a_2$ der Achsen als Mittelpunkt. Solche Kugeln mit geeigneten Radien schneiden sowohl den Kegel als auch den Zylinder in **Kreisen** als Hilfskurven. Diese Kreise sind alle senkrecht zur Aufrisstafel.

Durchführung:

1. Wähle eine Kugel Ψ mit Mittelpunkt M, die beide Flächen schneidet.
2. Bestimme im Aufriss die Schnittkreise k_1, l_1 der Kugel mit dem Kegel Φ_1 und k_2, l_2 der Kugel mit dem Zylinder Φ_2. Wir verwenden hier nur k_2.
   $k_1'', l_1'', k_2'', l_2''$ sind Strecken, da alle Kreise zu π_2 senkrecht sind.
3. $k_1'' \cap k_2''$ und $l_1'' \cap k_2''$ liefern den Aufriss von max. vier Punkten P, Q, R, S der Durchdringungskurve. Es ist $P'' = Q''$, $R'' = S''$.
4. Zeichne k_1', l_1' und übertrage P, Q, R, S in den Grundriss. P', Q', R', S' liegen auf k_1', l_1'.
5. Wiederhole 1.–4. genügend oft.
6. Verbinde die gefundenen Punkte mit einer Kurve.

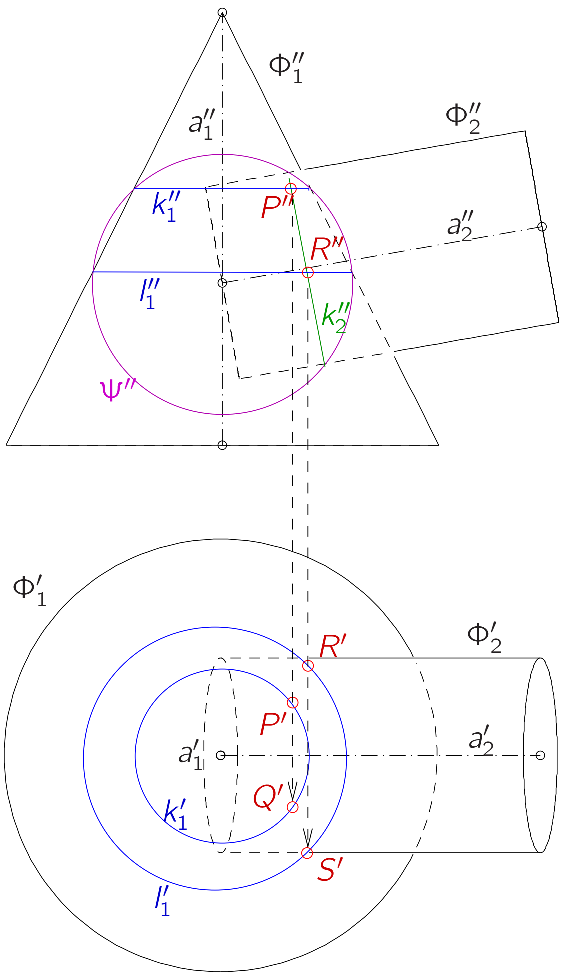


Abbildung 4.27: Veranschaulichung des Hilfskugelverfahrens

Aufgabe 4.7 :
Gegeben: Kegel und Zylinder in Grund– und Aufriss (Abb. 4.28).
Gesucht: Durchdringungskurve in Grund– und Aufriss.

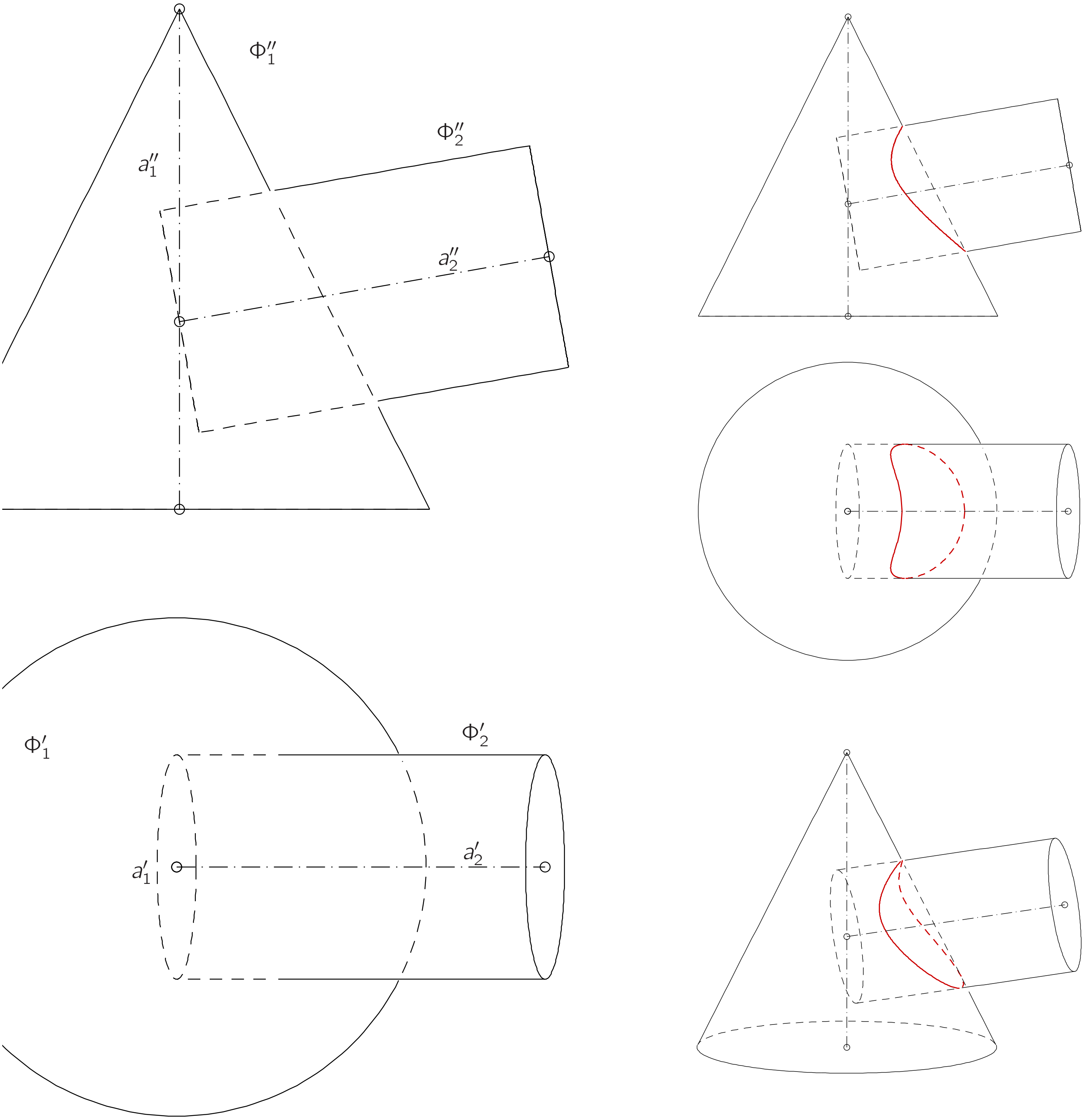


Abbildung 4.28: Schnitt: Kegel–Zylinder (Hilfskugelverfahren)

Wann ist welches Verfahren sinnvoll?
a) Das **Hilfskugelverfahren** ist auf alle Rotationsflächen mit sich **schneidenden Achsen** anwendbar. Hilfskurven sind dann immer Kreise.
b) Die Voraussetzung für das **Hilfsebenenverfahren** ist: Der Schnitten mit geeigneten Ebenen ergibt **einfach** zu zeichnende **Hilfskurven**. Meistens werden die Hilfsebenen senkrecht zu einer Risstafel gewählt.

4.9.3 Wie sehen Schnittkurven von Flächen aus?

Grundsätzlich schneiden sich zwei Flächen in einer oder mehreren Schnittkurven. Diese Kurven können sich in Punkten treffen. Nehmen wir an, zwei Flächen schneiden sich in einem Schnittpunkt P, so gilt:

- Haben die beiden Flächen in einem Schnittpunkt P **unterschiedliche Tangentialebenen**, so läuft die Schnittkurve der Flächen glatt (ohne Spitzen) durch P.
- Bei **übereinstimmender Tangentialebene** beider Flächen im Punkt P können sich aber mehrere Schnittkurven in P schneiden, siehe Abb. 4.29, Mitte, oder Abb. 4.30.

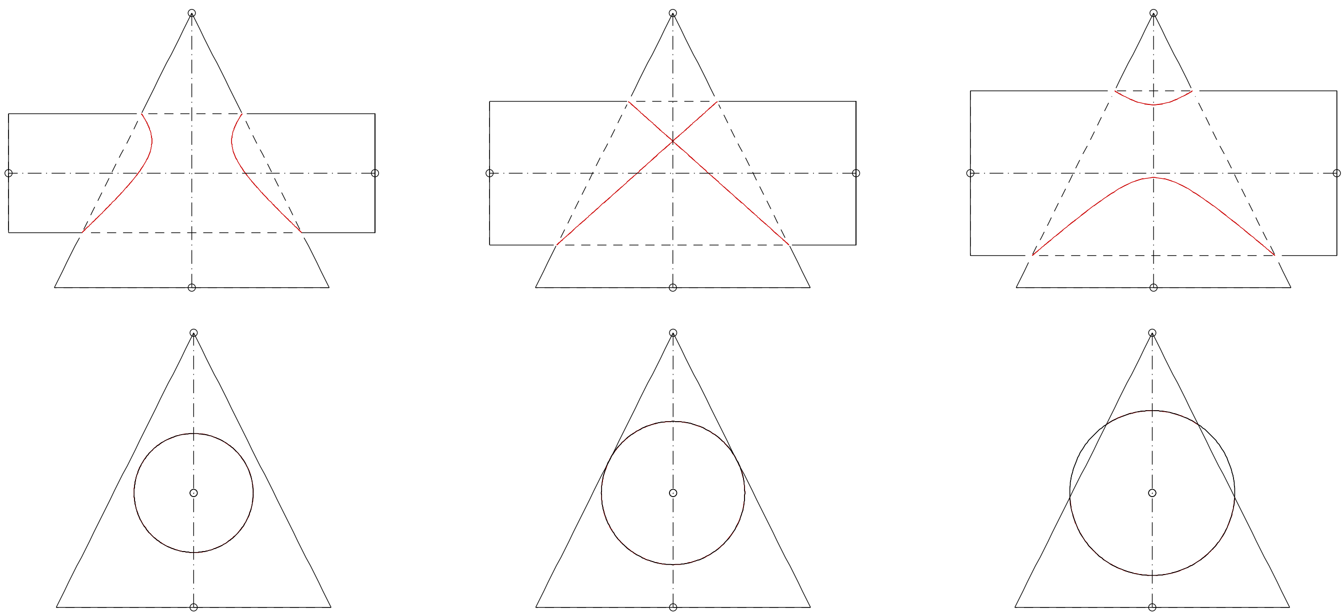


Abbildung 4.29: Veränderung der Schnittkurven von Kegel und Zylinder bei wachsendem Zylinderradius

Schneiden sich speziell zwei **Drehzylinder** oder **Drehkegel** in einem Punkt, für den beide Flächen eine gemeinsame, in diesem Punkt tangentiale Kugel besitzen, so zerfällt die Durchdringungskurve in zwei **Ellipsen**: Beispiele sind das Kreuzgewölbe, Abb. 4.30, und der in der Mitte dargestellte Schnitt von Abb. 4.29.

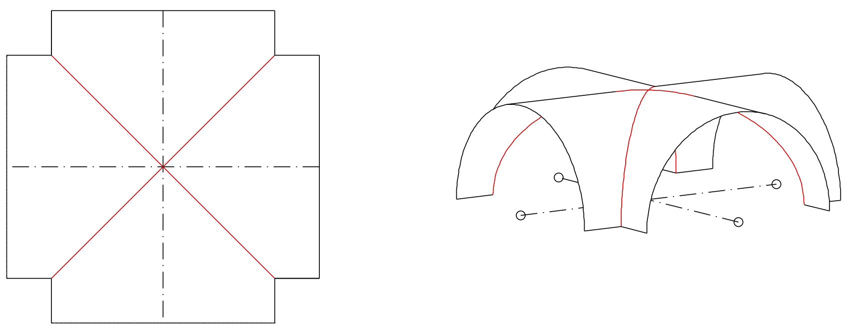


Abbildung 4.30: Kreuzgewölbe (Schnitt zweier Zylinder mit gleichen Radien und sich schneidenden Achsen)

Kapitel 5

Zentralprojektion

In diesem Abschnitt werden wir zunächst die Zentralprojektion beschreiben und verstehen. Als zweites wollen wir sehen, wie man eine Zentralprojektion aus Grund- und Aufriss gewinnen kann. In Architekturdarstellungen benutzt man gern Schatten zur Verbesserung der räumlichen Eindrucks; daher befassen wir uns mit Schatten in der Zentralprojektion in einem Abschnitt. Danach behandeln wir, wie man aus einer Zentralprojektion, z.B. Photographie, Grund- und Aufriss gewinnen kann. Diese Aufgabe nennt man auch *Rekonstruktion*. Abschließend befassen wir uns mit der Darstellung von Kurven und Umrissen in der Zentralprojektion.

5.1 Zentralprojektion als Abbildung (s. LEO S.213)

In Kapitel 1 wurden bereits wesentliche Eigenschaften einer Zentralprojektion erwähnt und auf die wichtigsten Unterschiede zur Parallelprojektion hingewiesen. Zur Erinnerung: Räumliche Gegenstände (Punkte, Strecken, Kurven,...) werden von einem Punkt (*Zentrum oder Augpunkt*) aus auf eine Ebene projiziert, siehe Abbildung 5.1. Man nennt das durch Zentralprojektion entstandene Bild auch **perspektives Bild**. Auch eine **Photographie** ist eine Zentralprojektion.

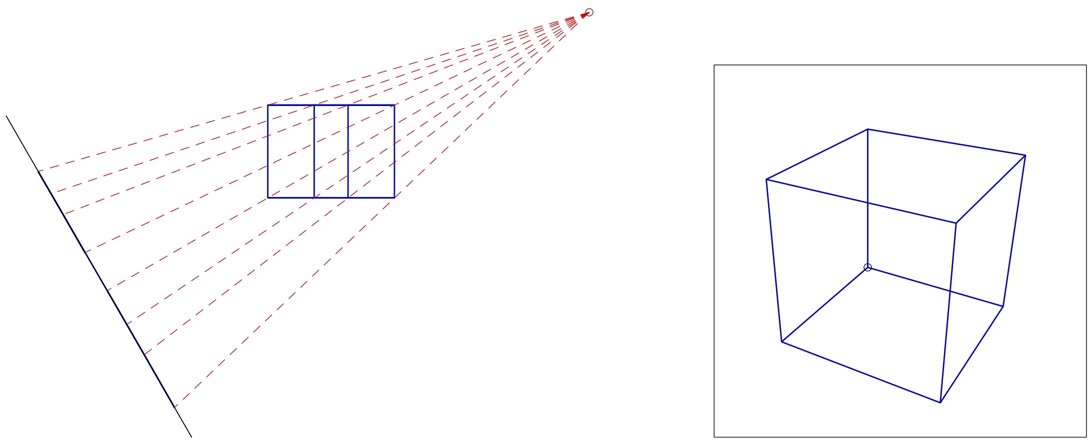


Abbildung 5.1: Quader in Zentralprojektion

Betrachtet man eine Zentralprojektion mit nur einem Auge, und zwar mit dem Auge im Zentrum, so lässt sich kein Unterschied zum Betrachten des Gegenstandes selbst feststellen. Diese Tatsache ist ein Grund für die große Bedeutung der Zentralprojektion. Beachten Sie aber, dass die Betrachtung von jedem anderen Punkt aus zu einem nicht mehr korrekten räumlichen Eindruck führt. Es gibt also für jede Photographie nur einen einzigen idealen Betrachtungspunkt!

5.2 Bezeichnungen und Konventionen

O	:	**Augpunkt**: Projektionszentrum, alle Sehstrahlen laufen durch O
π	:	**Bildtafel**: Die Ebene, die das Bild enthält.
H	:	**Hauptpunkt** : Fußpunkt des Lotes vom Augpunkt auf die Bildtafel. Bei Photographien ist H der Mittelpunkt des Bildes.
π_v	:	**Verschwindungsebene**: Ebene durch O, die parallel zur Bildtafel ist.
d	:	**Distanz**: Abstand Augpunkt – Hauptpunkt oder Bildtafel – Verschwindungsebene.

Die Zentralprojektion eines Punktes P erhält man, indem man den Sehstrahl durch O mit π schneidet. Punkte in der Verschwindungsebene besitzen kein Bild, da die zugehörigen Projektionsstrahlen die Bildtafel nicht treffen. Es ist üblich, nur solche Teile von Gegenständen abzubilden, die **vor** der Verschwindungsebene liegen.

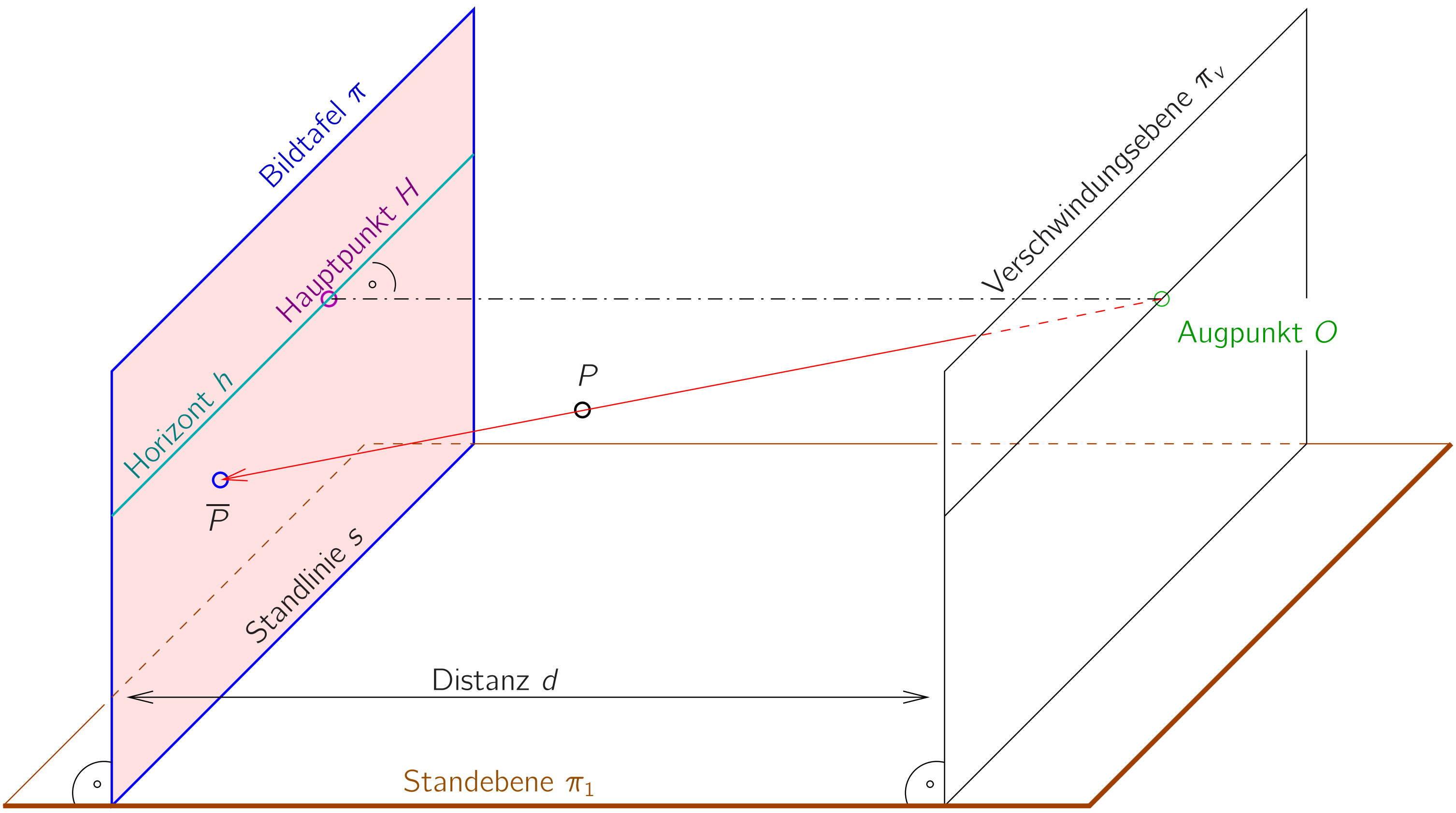


Abbildung 5.2: Definitionen zur Zentralprojektion

Die folgenden Begriffe sind sinnvoll, wenn wir eine horizontale Bezugsebene wie die Erdoberfläche haben. Wir nehmen, jedenfalls zu Beginn, immer an, dass die Bildebene π senkrecht zu dieser Bezugsebene gewählt ist, also vertikal steht. Im Falle der Fotographie machen wir dann eine Aufnahme mit senkrecht gehaltener Kamera.

π_1	:	**Standebene**: Eine Ebene senkrecht zu π, die die Erdoberfläche oder die Grundrissebene eines Objekts darstellt.
s	:	**Standlinie**: Schnittgerade der Standebene mit der Bildtafel
h	:	**Horizont**: Schnittgerade der horizontalen Ebene durch O mit der Bildtafel. Bei senkrechter Bildtafel geht h immer durch H.

5.3 Fluchtpunkte

Zwei **parallele Geraden** werden unter Zentralprojektion auf zwei Bildgeraden abgebildet. Die Bildgeraden sind jedoch im allgemeinen *nicht* mehr parallel, sondern schneiden sich in einem Punkt, dem **Fluchtpunkt**.
Um den Fluchtpunkt zu bestimmen, benutzen wir folgende Bezeichnung: Der Durchstoßpunkt S_g einer Geraden g mit der Bildtafel π heißt **Spurpunkt** von g. Man erhält den Fluchtpunkt F von g als Spurpunkt derjenigen zu g parallelen Geraden g_0, die durch den Augpunkt O geht. Daher besitzen sämtliche parallele Geraden denselben Fluchtpunkt. Man sagt: *Jede Schar paralleler Geraden bestimmt einen Fluchtpunkt.*

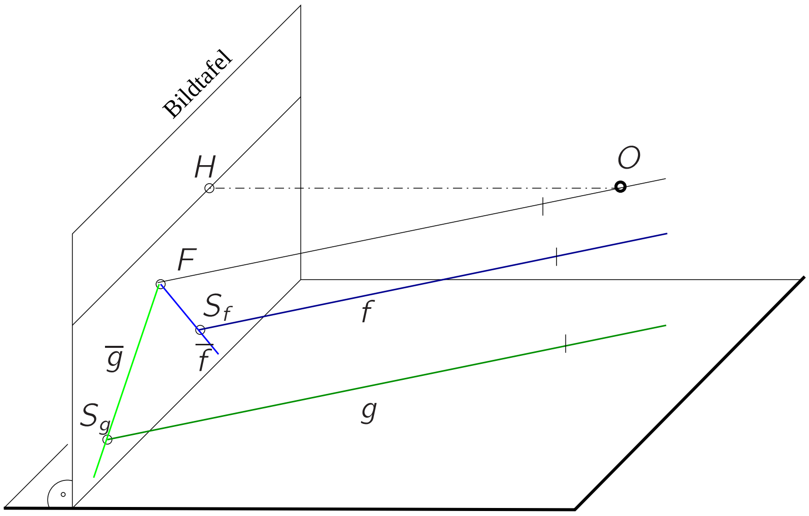


Abbildung 5.3: Flucht– und Spurpunkt paralleler Geraden

Es gibt folgende Sonderlagen von Geradenscharen:

1. Fluchtpunkte **horizontaler Geraden** liegen auf dem Horizont h.
2. Sind horizontale Geraden speziell senkrecht zur Bildtafel so heißen sie **Tiefenlinien**. Ihr Fluchtpunkt ist der Hauptpunkt H.
3. Sind Geraden **zur Bildtafel parallel**, so sind die Bildgeraden parallel. Sie besitzen als einzige Geradenschar keinen Fluchtpunkt.

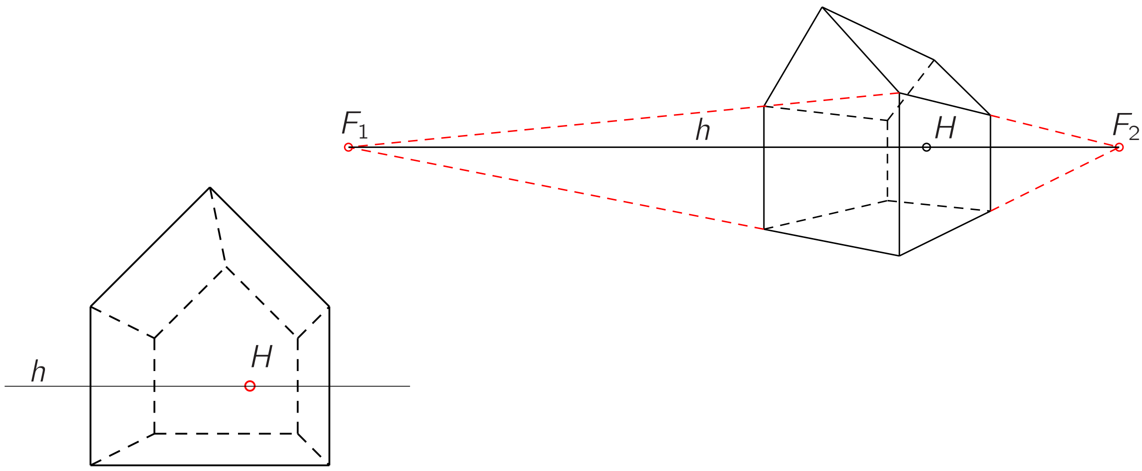


Abbildung 5.4: Fluchtpunkte eines Hauses

So wie parallele Geraden einen Fluchtpunkt bestimmen, so definieren parallele Ebenen eine *Fluchtgerade*. Beispielsweise hat die Schar horizontaler Ebenen den Horizont als Fluchtgerade.

5.4 Subjektive Aspekte der Perspektive

Wir hatten schon erwähnt, dass eine Perspektive eigentlich nur von einem Punkt aus betrachtet den korrekten räumlichen Eindruck ergibt. Wir befassen uns hier mit der Frage, wann die mathematische Abbildungsvorschrift ein für das menschliche Auge gutes Bild ergibt.

5.4.1 Sehkegel und -kreis

Das Auge sieht nur solche Dinge gut, die innerhalb des **Sehkegels** (Kegel mit Spitze in O und Achse OH, dessen halber Öffnungswinkel $\approx 30°$ ist) liegen.

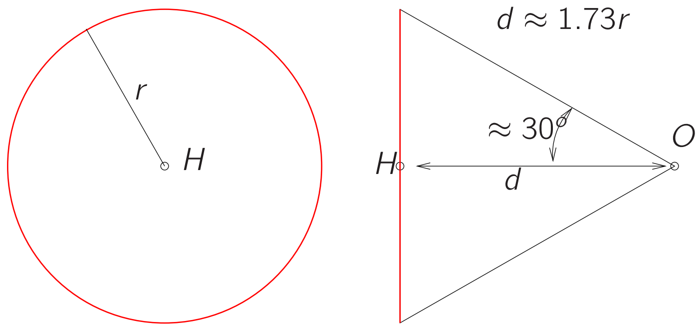


Abbildung 5.5: Sehkreis

Nur innerhalb des Sehkreises liefert die Perspektive daher ein als zutreffend empfundenes Bild. Die folgende Abbildung belegt dies:

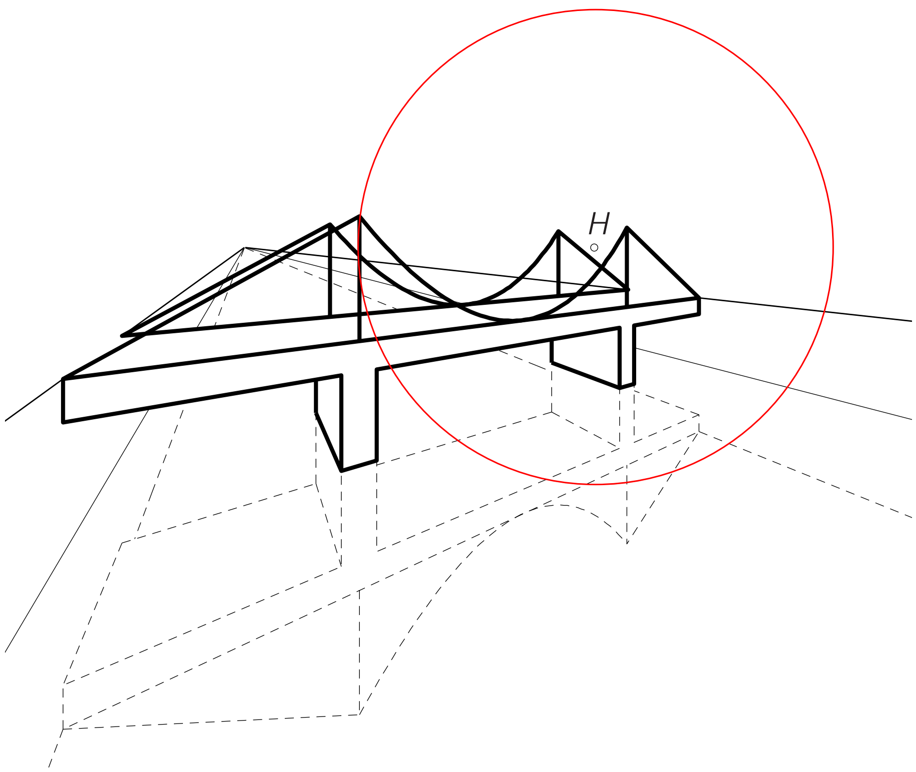


Abbildung 5.6: Zentralprojektion mit Sehkreis

5.4.2 Wahl von Hauptpunkt und Distanz

Wir untersuchen an einem Beispiel, wie verschiedene Wahlen von Distanz und Bildebene das perspektivische Bild beeinflussen.
Bei festem Augpunkt führt die Verschiebung der Bildtafel nur zu einer Vergrößerung oder Verkleinerung des perspektivischen Bildes. Dies macht man sich aus Abbildungsgesetz und Strahlensatz klar.
Verschiebt man das Objekt relativ zu festem Augpunkt und Bildebene, so verändert sich neben der Größe auch die Stärke des perspektivischen Eindrucks. Kommt man dem Objekt zu nahe, so wird der Sehkegel überschritten und das Bild wirkt überrissen.

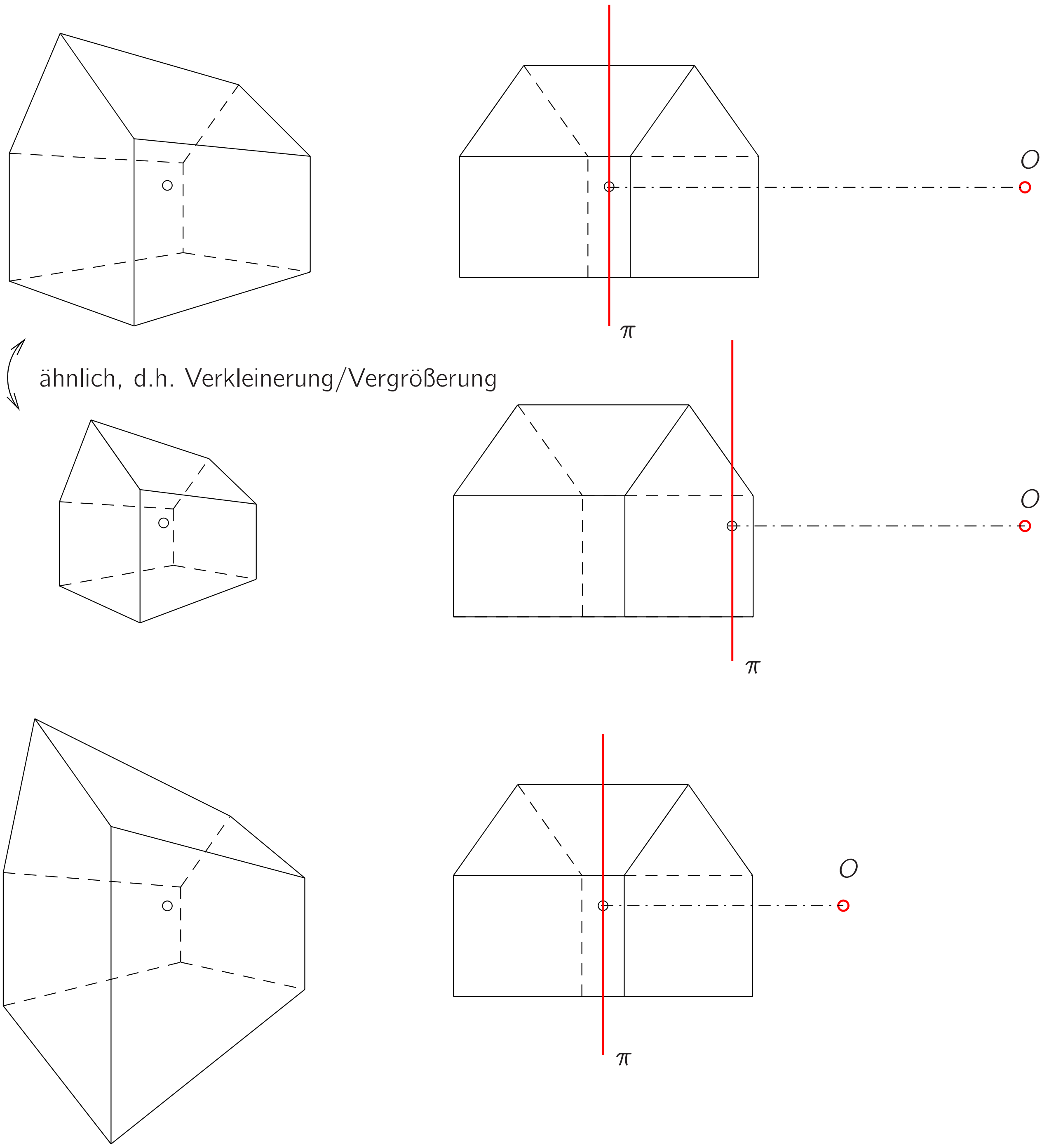


Abbildung 5.7: Wirkung der Wahl von Hauptpunkt und Distanz bei Zentralprojektion

Die Höhe des Augpunktes über der Standebene entspricht unterschiedlichen Betrachtshöhen eines Objekts. Die im ersten Bild gezeigte Froschperspektive ist sprichwörtlich; auch eine zu große Höhe wie im zweiten Bild ist unnatürlich. Im dritten Bild wird eine schräge Zentralprojektion gezeigt, bei der die Bildtafel nicht vertikal ist. Das Ergebnis entspricht einem Luftbild.

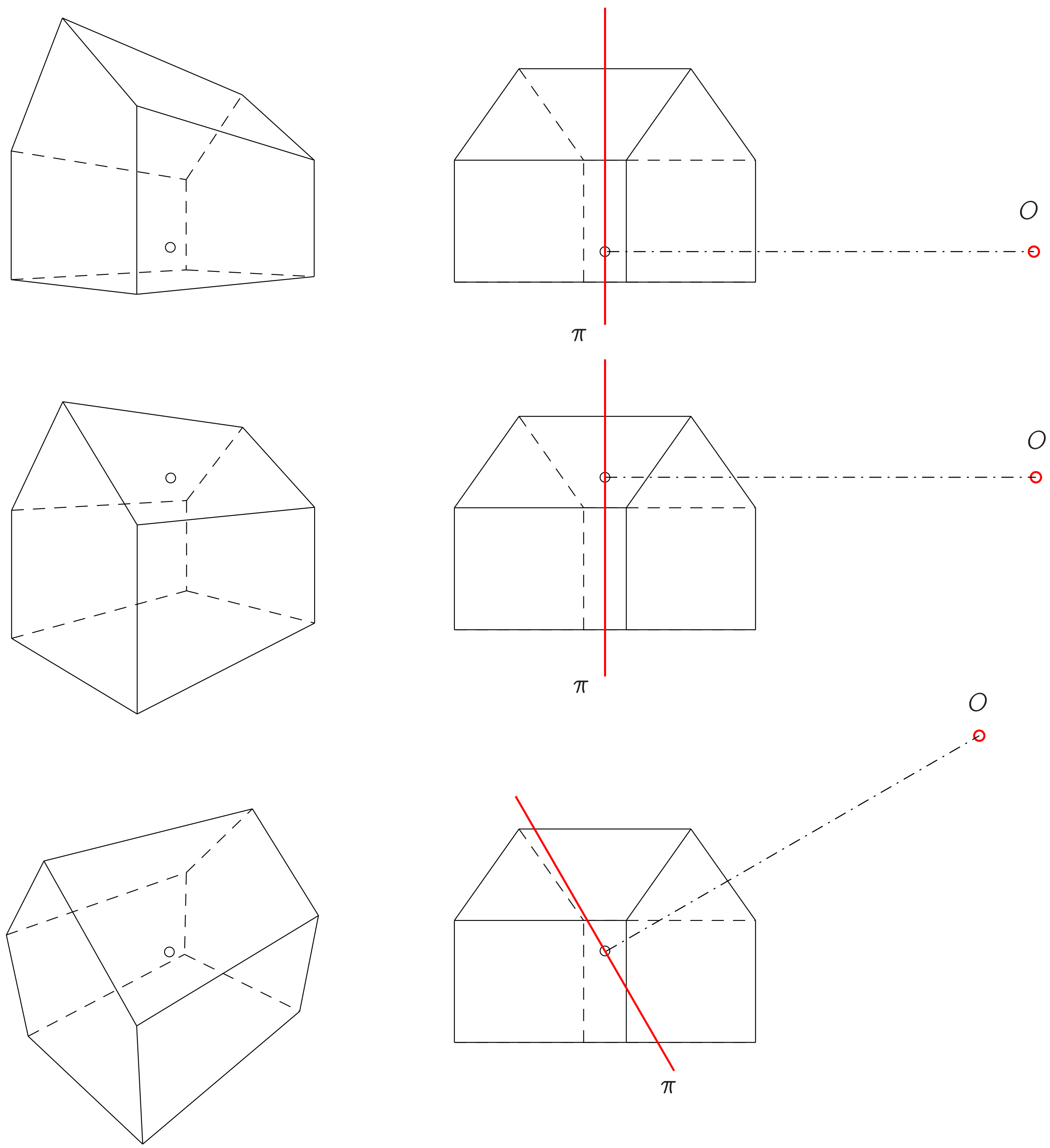


Abbildung 5.8: Wirkung der Wahl von Hauptpunkt und Distanz bei Zentralprojektion

5.5 Konstruktion perspektivischer Bilder aus Grund- und Aufriss

5.5.1 Durchstoßpunktmethode

Wir beschränken uns auf den Fall einer vertikalen Bildtafel π bzw. einer horizontalen Grundrissebene π_1. Wir erinnern daran, dass der Schnitt der Bildebene mit derjenigen horizontalen Ebene, die O und H enthält, gerade der Horizont h ist. Der Horizont enthält also die Fluchtpunkte aller horizontalen Geraden, und man kann ihn auch als Fluchtgerade der horizontalen Ebenen verstehen.

Vorgabe	:	a) Bildtafel π und der Augpunkt O in Grund– und Aufriss.
		b) Objekt in Grund– und Aufriss.
Gesucht	:	Das perspektive Bild des Objekts.

Verfahren: (s. LEO S.217)

(0) Bestimmung des **Hauptpunktes** H (Lot von O' auf π') und des **Horizonts** h (Höhenlinie durch O in π) in Grund– und Aufriss. "Festmachen" des Bildes auf der Zeichenfläche durch Wahl des Hauptpunktes H. Zeichnen des Horizonts h durch H.

(1) Abbildung einer **Geraden** g:
Fluchtpunkt F_g und Spurpunkt S_g oder zwei andere Punkte der Bildgeraden $\overline{g}$ in Grund– und Aufriss bestimmen. (F_g ist der Spurpunkt der zu g parallelen Gerade durch O.)
Übertragen dieser Punkte in die Zeichenfläche für das perspektive Bild:
- Der horizontale Abstand eines Bildpunktes zu H wird aus dem Grundriss,
- der vertikale Abstand zum Horizont h dem Aufriss entnommen.

(2) Abbildung eines **Punktes** P:

I) **1. Methode** (Durchstoßpunktmethode):
a) Zeichnen des Projektionsstrahls p in Grund– und Aufriss.
b) Bestimmung des Schnittpunktes $\overline{P} = p \cap \pi$ (Bildpunkt) in Grund– und Aufriss.
c) Zeichnen des Bildpunktes $\overline{P}$ (horizontaler Abstand von H aus Grundriss, Abstand vom Horizont h aus Aufriss).

II) **2. Methode**:
Man bestimmt das Bild $\overline{P}$ als Schnitt zweier "leicht" zu zeichnenden **Hilfsgeraden**. Als Hilfsgeraden kann man z.B.
a) Tiefenlinien (ihre Bilder gehen durch H),
b) Geraden, deren Fluchtpunkte schon bekannt sind, verwenden.

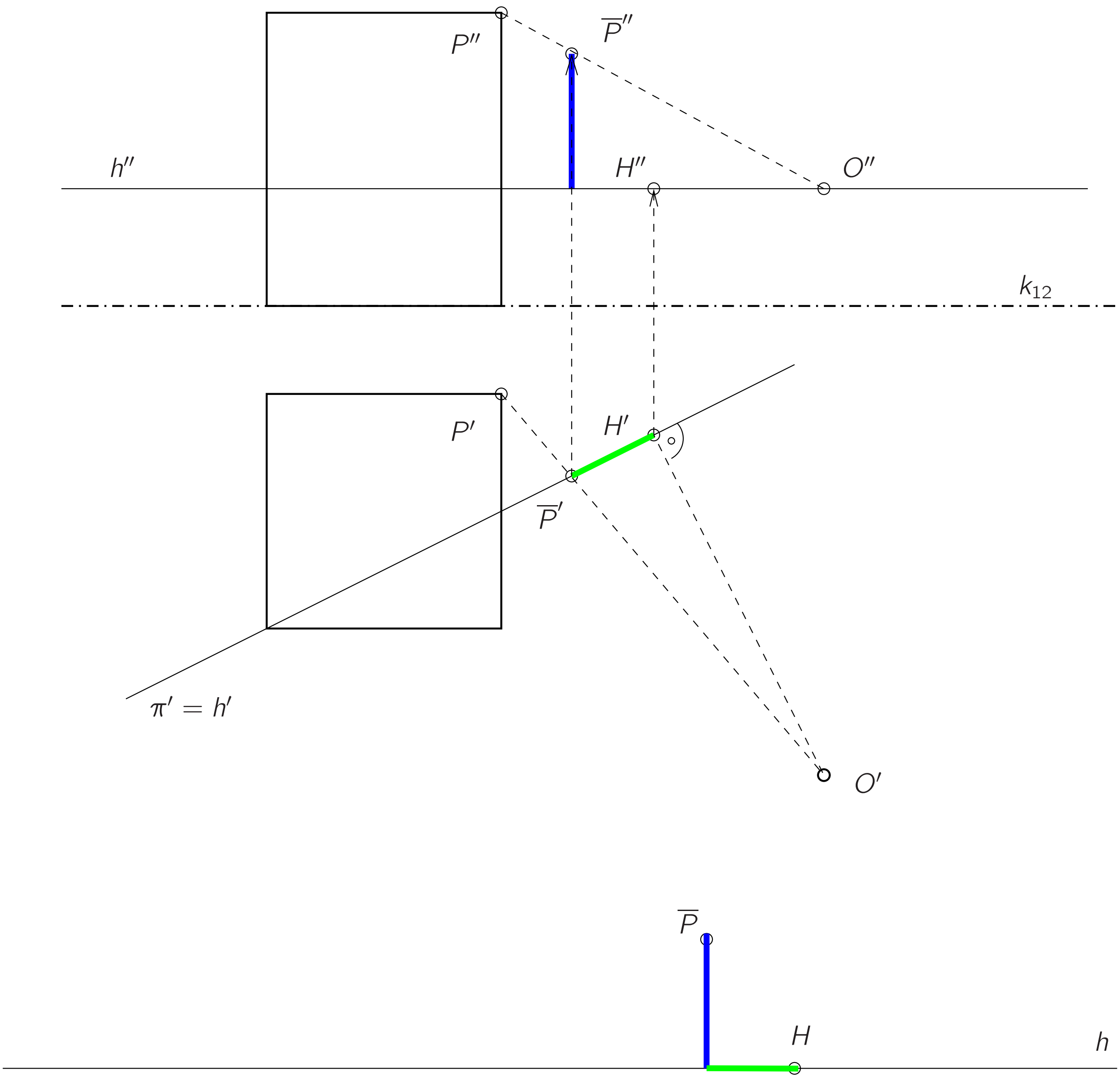


Abbildung 5.9: Zentralprojektion eines Quaders mit der Durchstoßpunktmethode

5.5.2 Architektenanordnung

(s. LEO S.221)

Um das Übertragen der in Grund– und Aufriss konstruierten Punkte in das perspektive Bild zu erleichtern, wird gern die Architektenanordnung gewählt:

1. Der **Grundriss** wird so gedreht, dass der Horizont h parallel zu π' liegt. Dann wird er so verschoben, dass er unterhalb (oder oberhalb) des perspektiven Bild liegt, mit dem Augpunkt H auf der Geraden $\overline{O'H'}$.
2. Der **Aufriss** wird so neben das perspektive Bild gelegt, dass h'' mit h übereinstimmt.

Das perspektive Bild eines Punktes liegt dann auf dem Lot zu π' (“Ordner”) im Grundriss des Bildpunktes. Die Höhe eines Spurpunktes über dem Horizont h kann dann direkt aus dem Aufriss in das perspektive Bild übertragen werden.

Aufgabe 5.1 *Zeichne ein perspektives Bild eines Quaders in Architektenanordnung (Abb. 5.10).*

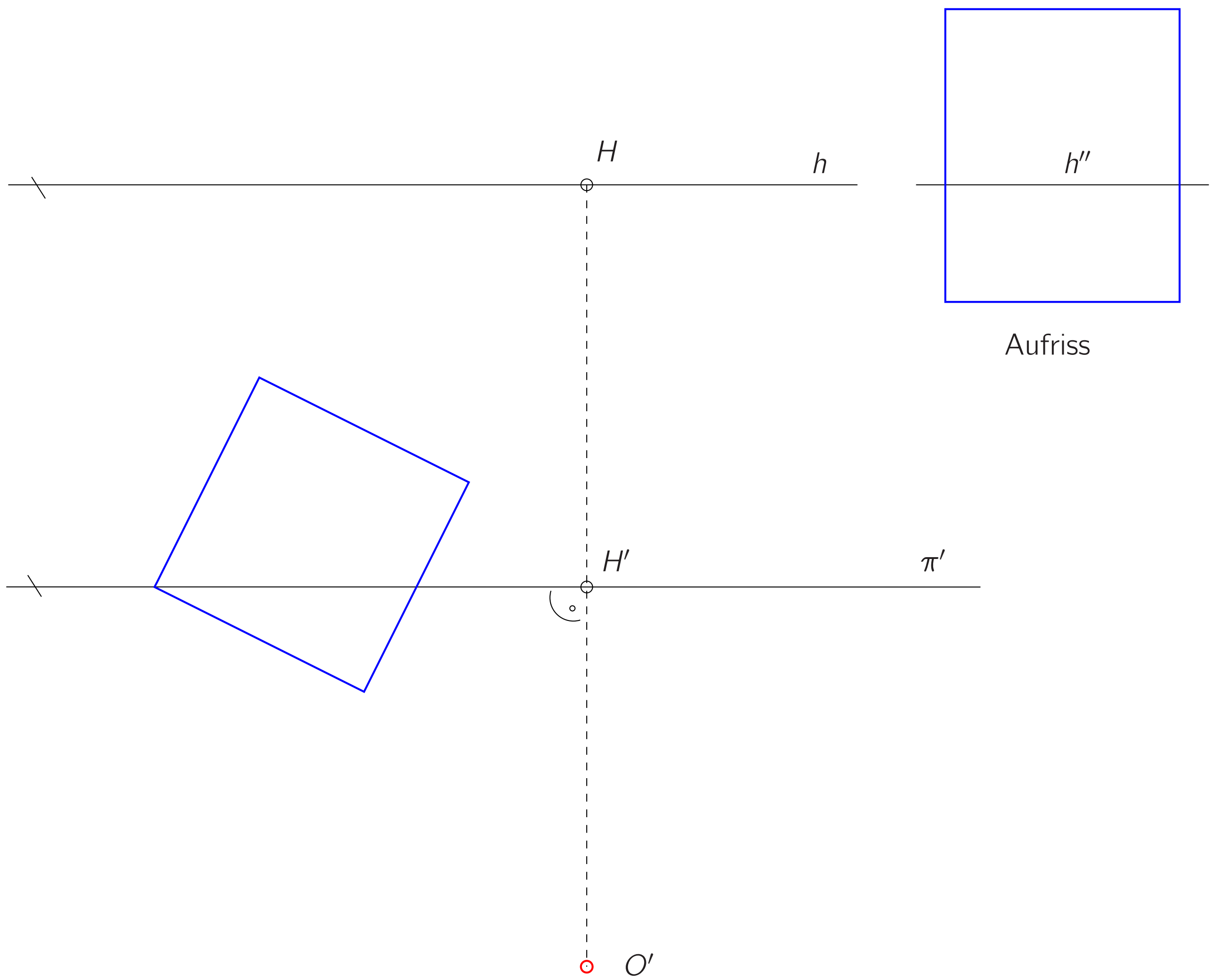


Abbildung 5.10: Zentralprojektion eines Quaders in Architektenanordnung

Aufgabe 5.2 *Zeichne ein perspektives Bild eines Hauses mit Fahnenstange a in Architektenanordnung (Abb. 5.11). Verwende* Tiefenlinien *zur Konstruktion der Fahnenstange.*

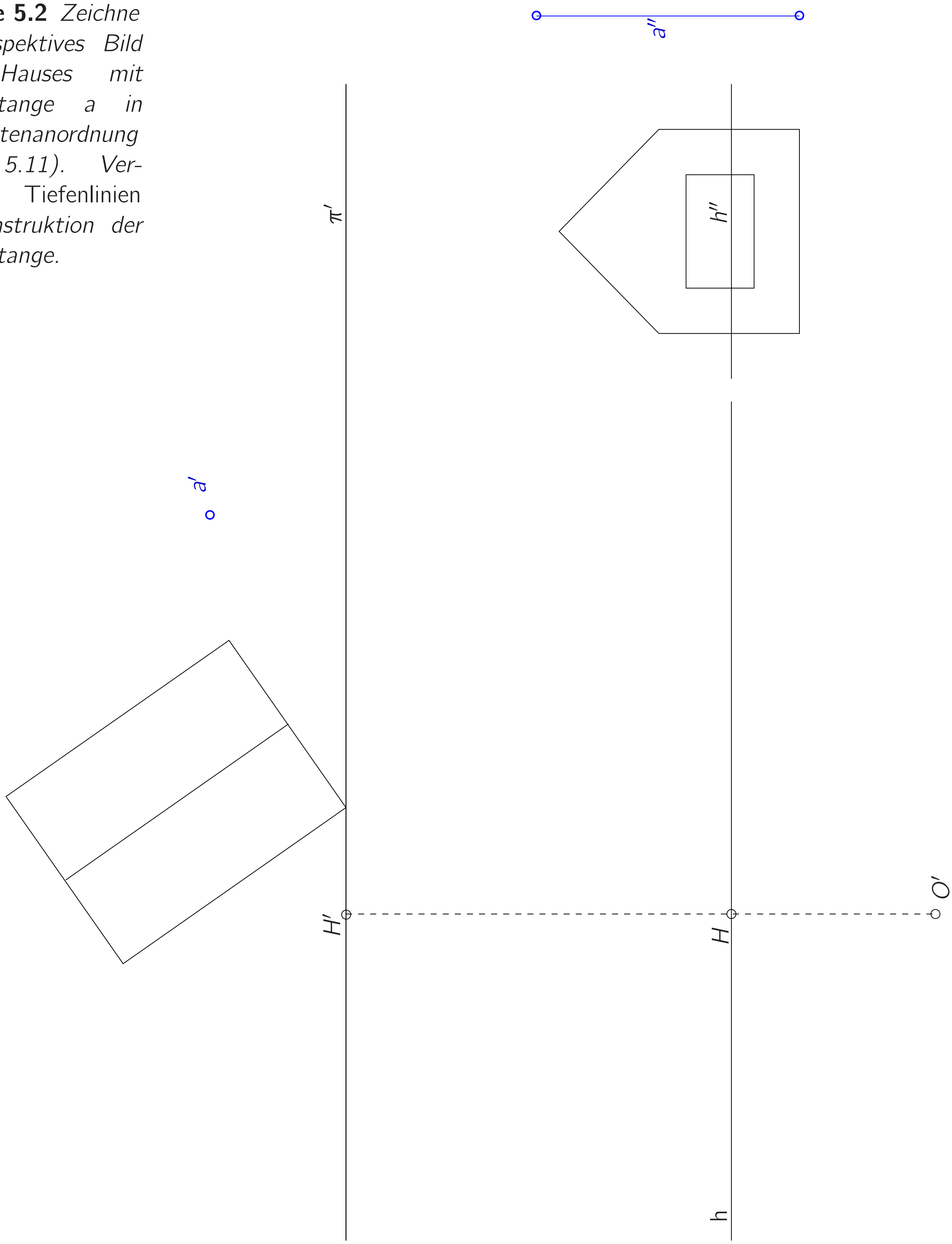


Abbildung 5.11: Zentralprojektion eines Hauses in Architektenanordnung

5.6 Schatten

(s. LEO S.237, FKN S.251)

5.6.1 Parallelbeleuchtung

Die Parallelbeleuchtung zeichnet sich durch parallele Lichtstrahlen aus. Den Schattenwurf eines Punktes P konstruieren wir als Schnitt eines Lichtstrahles l durch P mit seiner Grundrissprojektion l'.

Wir nehmen zuerst den Fall von **Gegenlicht** an: Die Lichtstrahlen kommen dann von jenseits (hinter) der Bildebene und reichen bis zur Verschwindungsebene. Im perspektivischen Bild besitzen diese parallelen Strahlen einen Fluchtpunkt S, den wir erreichen, wenn wir die Strahlen *gegen die Lichtrichtung* zu ihrer (unendlich weit entfernten) Quelle zurückverfolgen. Da die Lichtquelle (z.B. die Sonne) normalerweise oberhalb des Horizonts steht, liegt auch der Fluchtpunkt S *oberhalb des Horizonts*.

Wir betrachten nun den Schattwurf verschiedener vertikalen Linien auf eine horizontale Stand- oder Grundrissebene s. Die Schattenwürfe müssen parallele Geraden in s sein. Diese Geraden haben einen Fluchtpunkt S_F, der auf dem Horizont liegt.

Diese Beobachtungen kann man zur Konstruktion des Schattens verwenden:

1. Falls eine Lichtstrahlrichtung in Grund- und Aufriss gegeben ist: Konstruiere zuerst im Grundriss $S_F = S'$ als Durchstoßpunkt, daraus im Aufriss S'' und hiermit in der Perspektive $S_F \in h$ und S.
2. Der Schattenwurf eines Punktes P auf die Standebene π_1 ist der Schnitt der Geraden SP (Lichtstrahl) mit seiner Grundrissprojektion $S_F P'$ (Schattenwurf von PP').
3. Man kann ausnutzen, dass eine horizontale Gerade g und ihr Schattenwurf $\tilde{g}$ auf die Standebene parallel sind. Daher besitzen ihre perspektivischen Bilder denselben Fluchtpunkt.

Wir betrachten andererseits den Fall von **Rückenlicht**. Zwar befindet sich dann die Lichtquelle hinter der Verschwindungsebene und ist damit in der Perspektive nicht sichtbar. Allerdings kann man nun die parallelen Strahlen *in Lichtrichtung* weiterverfolgen. Das perspektivische Bild sämtlicher Lichtstrahlen trifft sich wiederum in einem Fluchtpunkt S. Wenn, wie bei Sonnenlicht, die Lichtstrahlen abwärts laufen, muss der Punkt S *unterhalb des Horizonts* liegen.

Den seltenen Grenzfall von **Seitenlicht**, bei dem die Lichtstrahlen parallel zur Bildebene verlaufen, wollen wir hier nicht behandeln.

Wie in den bisherigen Schattenkonstruktionen auch, wollen wir in den folgenden Beispielen jeweils konstruieren:

- **Schlagschatten**: auf die Grundrissebene oder Objekte geworfener Schatten
- **Eigenschatten**: Seiten des Objekts, die im Schatten liegen.
- **Schattengrenze**: Grenzlinie am Objekt, die beleuchtete von beschatteten Teilen trennt (besteht im einfachsten Fall nur aus Objektkanten).

Aufgabe 5.3 *Konstruiere den Schattenwurf eines Hauses auf die Standebene bei Gegenlicht in Richtung l.* Tipp: *Die Schattengrenze ist aus dem Grundriss ablesbar.*

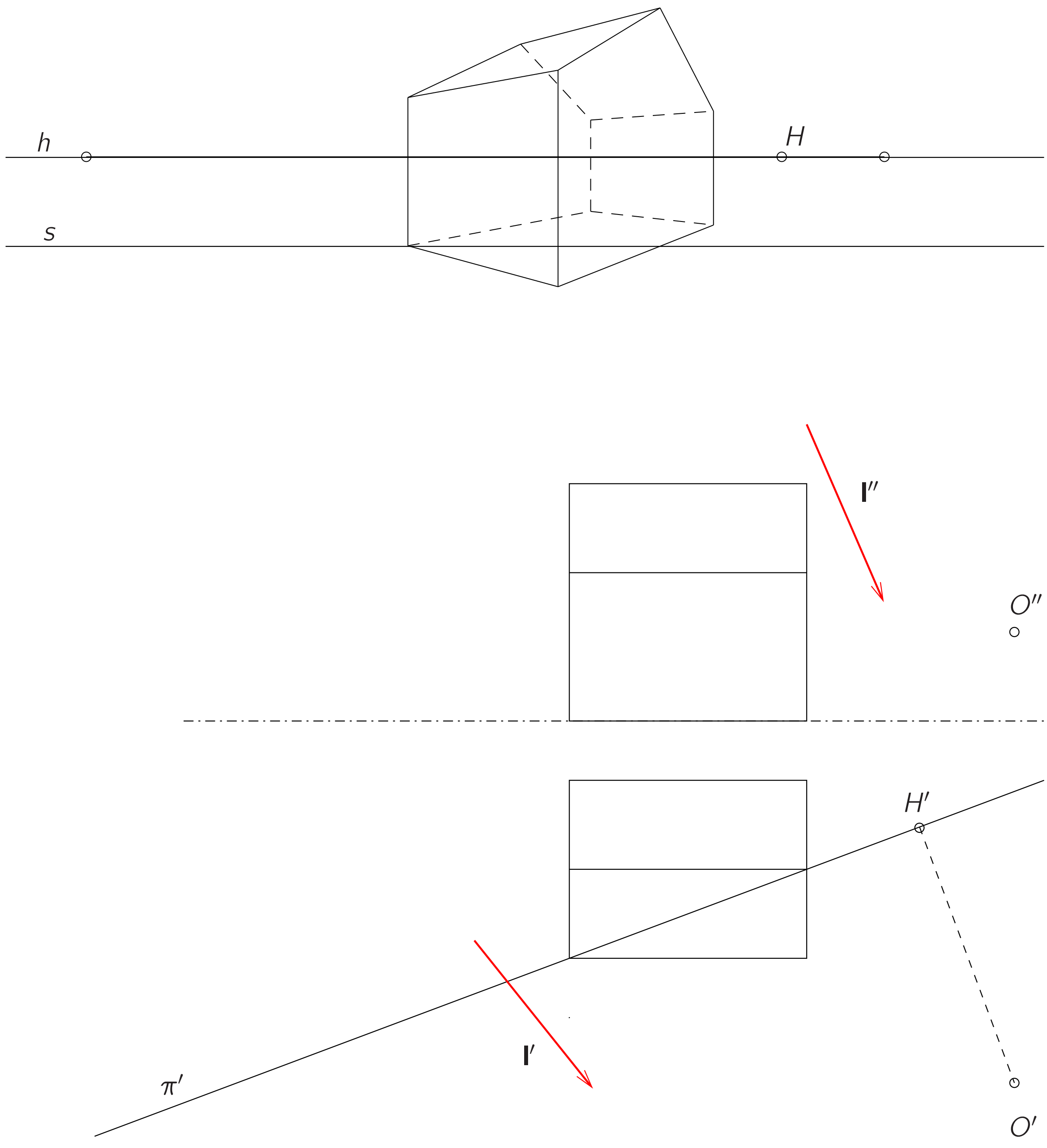


Abbildung 5.12: Schatten eines Hauses bei Gegenlicht

Aufgabe 5.4 *Konstruiere den Schatten eines Hauses und einer Reklametafel (Rechteck) auf Haus und Standebene bei parallelem Licht, gegeben durch S und S_F.*
Bei der Konstruktion des **Schlagschattens** *der Reklametafel auf Hauswand/Dach schneide man die senkrechte Ebene durch P, P' und Lichtrichtung mit Hauswand/Dach.*

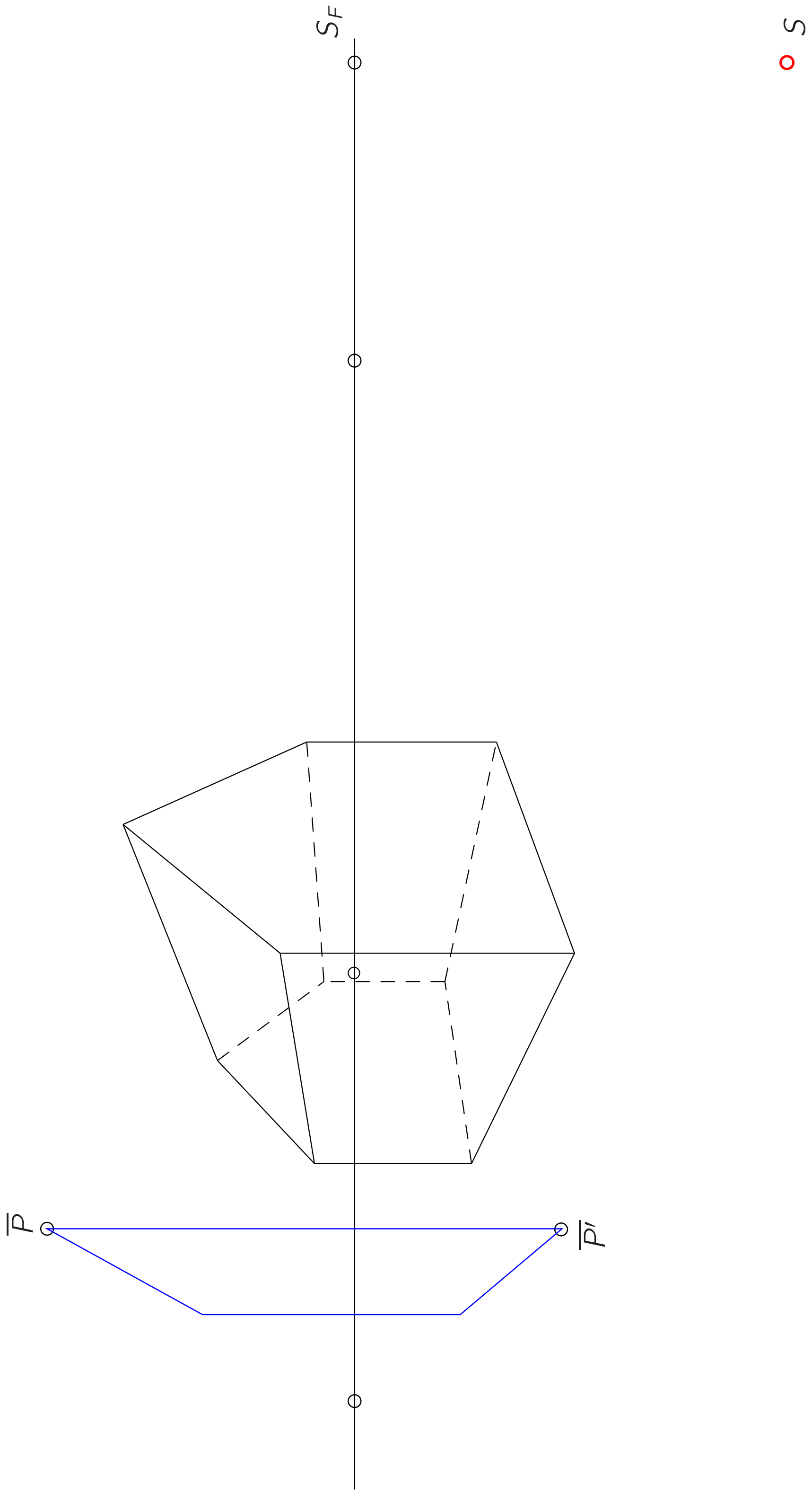


Abbildung 5.13: Schattenwurf einer vertikalen Reklametafel auf ein Haus bei Rückenlicht

5.6.2 Zentralbeleuchtung

Es werden Geraden durch die Lichtquelle L und ihre Grundrissprojektion L' geschnitten, das heißt die Rolle von S und S_F bei parallelem Licht wird durch L und L' ersetzt.

Aufgabe 5.5 *Konstruiere den Schatten eines Hauses auf der Standebene bei zentralem Licht L.*

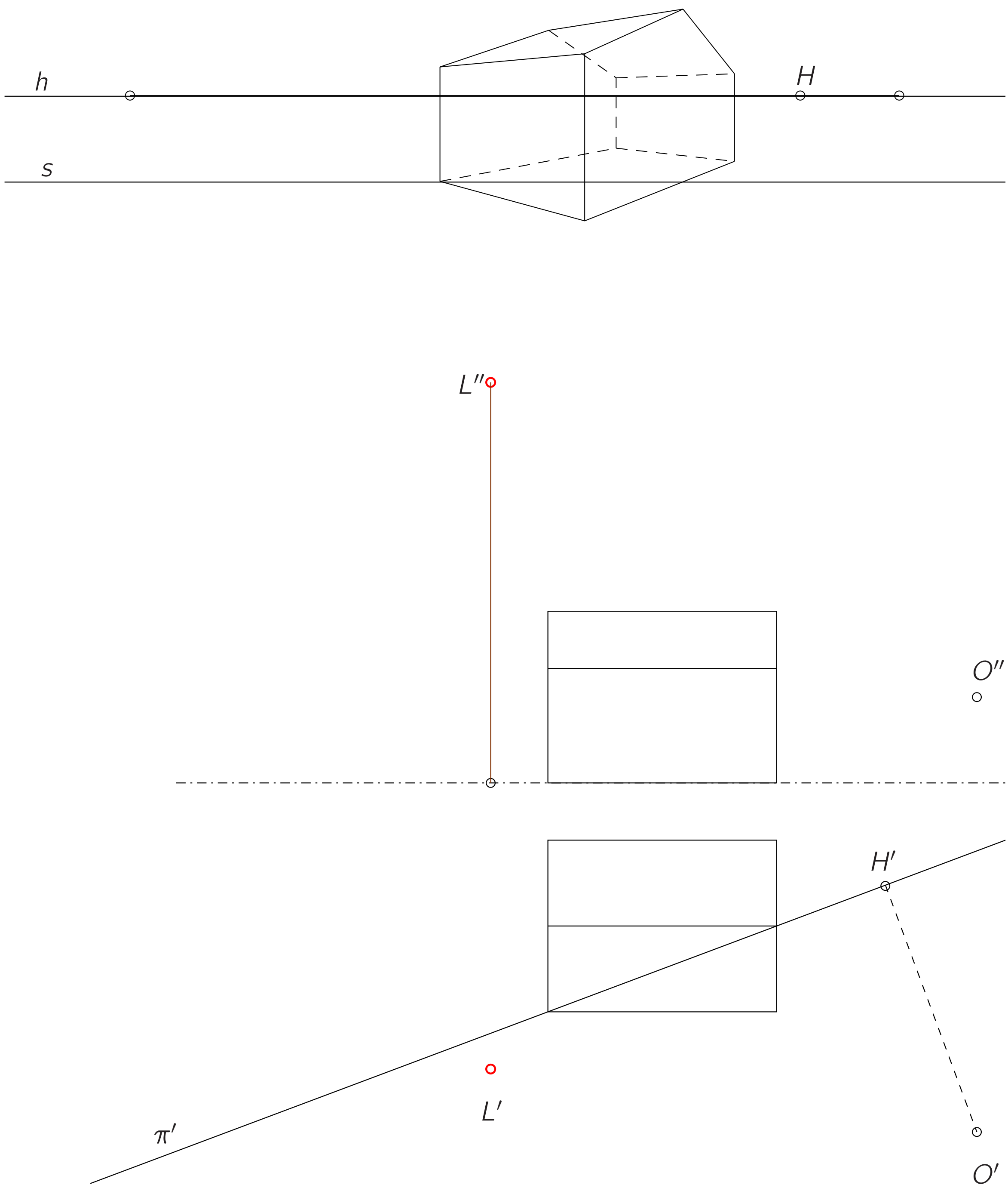


Abbildung 5.14: Schatten eines Hauses bei zentralem Licht

5.7 Rekonstruktion von Grund- und Aufriss

Man kann aus einer Perspektive auch Grund- und Aufriss gewinnen. Bei gegebener Perspektive ist insbesondere die Lage des Augpunktes und der Bildtafel relativ zu dem Objekt, das abgebildet wird, gesucht. Daher spricht man bei dieser Aufgabe auch davon, die **äußere Orientierung** einer Zentralprojektion zu bestimmen.

Die Idee zur Lösung ist einfach: Man kehrt die in Abschnitt 5.5 beschriebene Architektenanordnung um.

Durchführung:

1. Zeichne unter– oder oberhalb des perspektiven Bildes eine Parallele π' zum Horizont h. Betrachte π' als Grundriss der **Bildtafel** bei Architektenanordnung.
2. Übertrage den **Hauptpunkt** H und alle notwendigen **Fluchtpunkte** in den Grundriss. Der Grundriss O' des **Augpunkt**es liegt auf dem Lot zu π' in H' im Abstand d, der **Distanz**. Bei einem rechtwinkligen Objekt mit zwei Fluchtpunkten kann man O' (und damit d) durch einen Thaleskreis über den Fluchtpunkten ermitteln.
3. **Rekonstruktion** einer **Geraden** g, die in der Standebene liegt:
   Ermittele Flucht- und Spurpunkt F'_g, S'_g. Dann ist g' die Parallele zu $O'F'_g$ durch S'_g.
4. **Rekonstruktion** eines **Punktes** P, der in der Standebene liegt:
   In Umkehrung der Architektenanordnung bestimme den Schnitt von π' mit einem Ordner durch $\overline{P}$. Das Bild P' muss auf dem Projektionsstrahl von O' durch diesen Punkt liegen. Erst durch eine weitere Gerade durch P (Tiefenlinie, Hauskante,...) wird P' bestimmt.
5. Ein Punkt, der nicht in der Standebene liegt, lässt sich analog rekonstruieren, falls sein Grundriss im perspektiven Bild bekannt oder konstruierbar ist. Die Höhe eines solchen Punktes erhält man über deren "wahre Länge" (s. Anfang dieses Abschnitts).

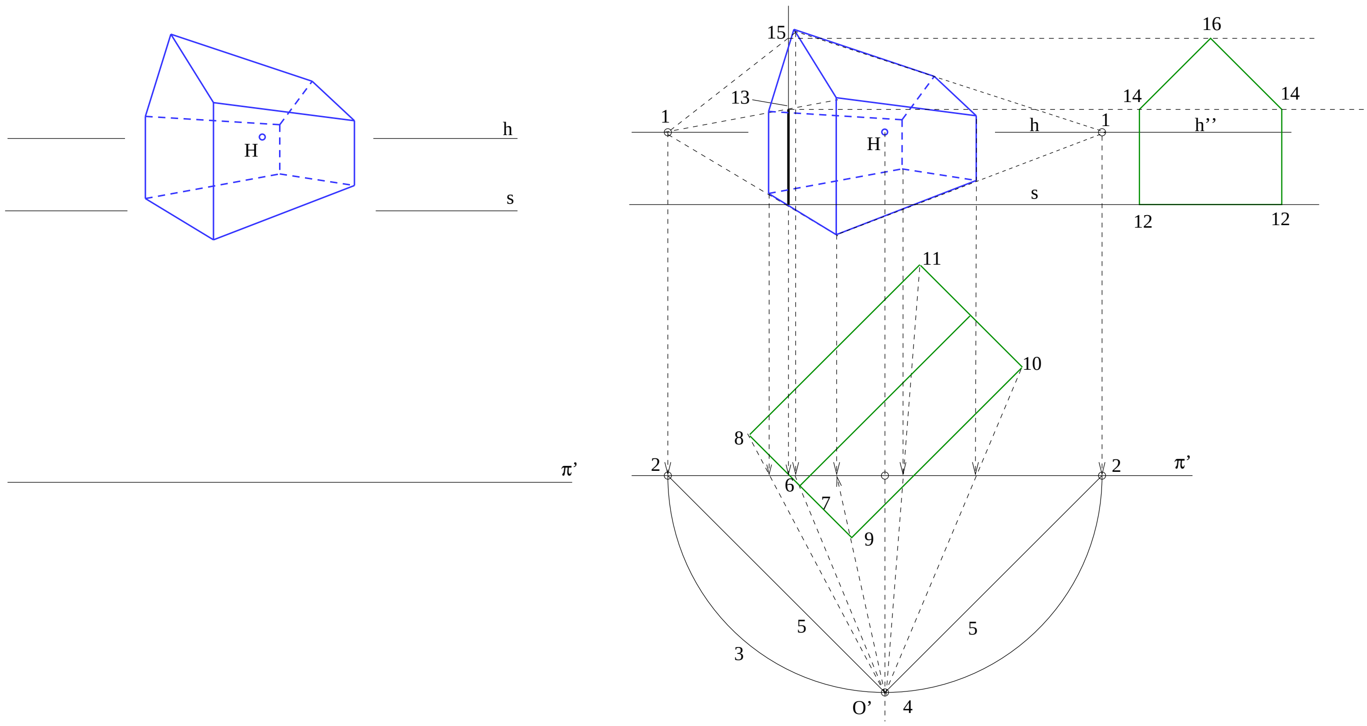


Abbildung 5.15: Rekonstruktion von Grund– und Aufriss eines Hauses: Lösungsschritte 1–16

Aufgabe 5.6 *Rekonstruiere Grund- und Aufriss eines Hauses und* konstruiere *einen Anbau der Breite 3cm und Länge 2cm, Traufhöhe wie das gegebene Haus, und der Firsthöhe 4cm.*

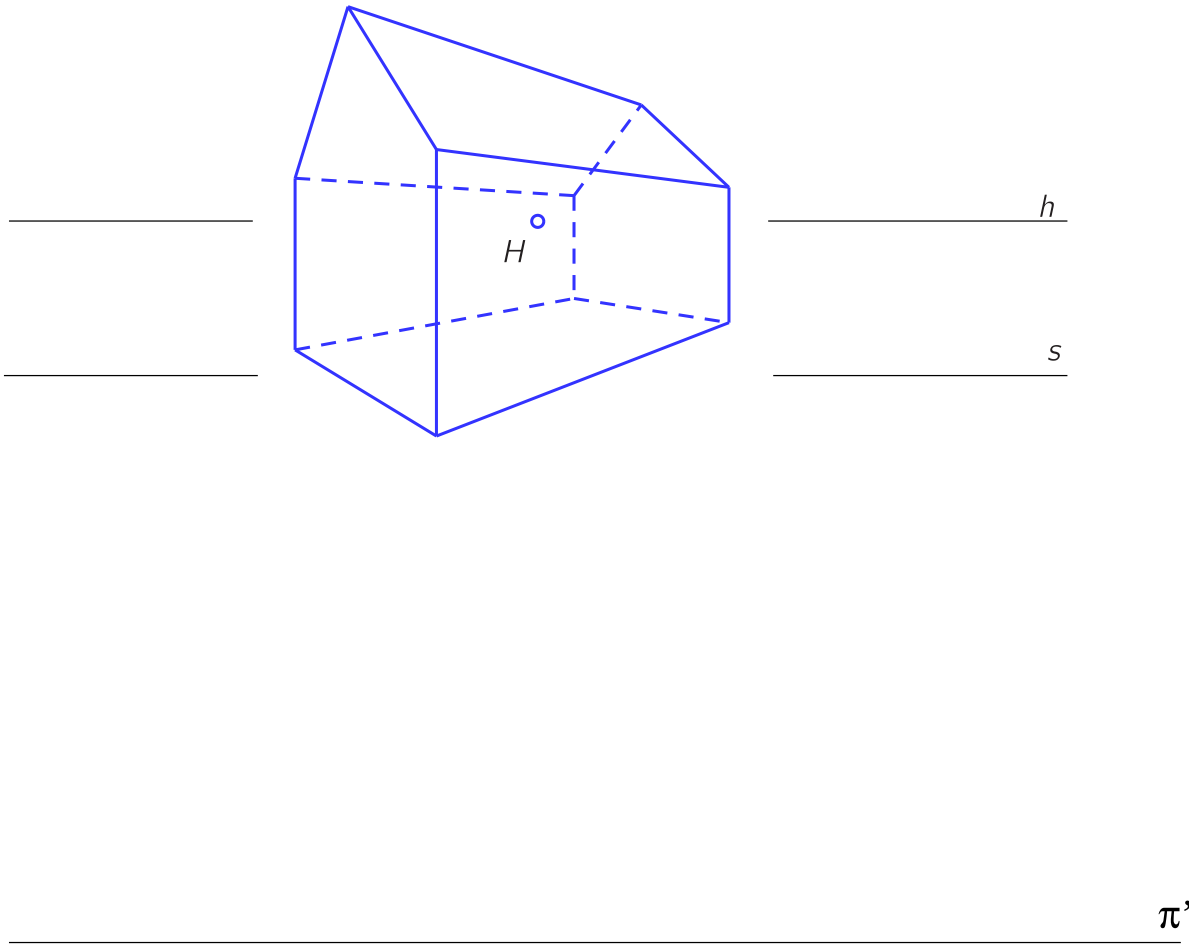


Abbildung 5.16: Rekonstruktion von Grund– und Aufriss eines Hauses

Rekonstruktion einer Frontalperspektive

Wir wollen den Grundriss des in Abb. 5.17 in Frontalperspektive dargestellten *U*-förmigen Gebäudes bestimmen. Dabei nehmen wir wieder an, dass das Gebäude nur rechte Winkel besitzt. Die Rekonstruktion kann natürlich nur bis auf den Maßstab möglich sein; tatsächlich benötigt man sogar zwei Maßstäbe, die nicht aus dem Bild ersichtlich sind.

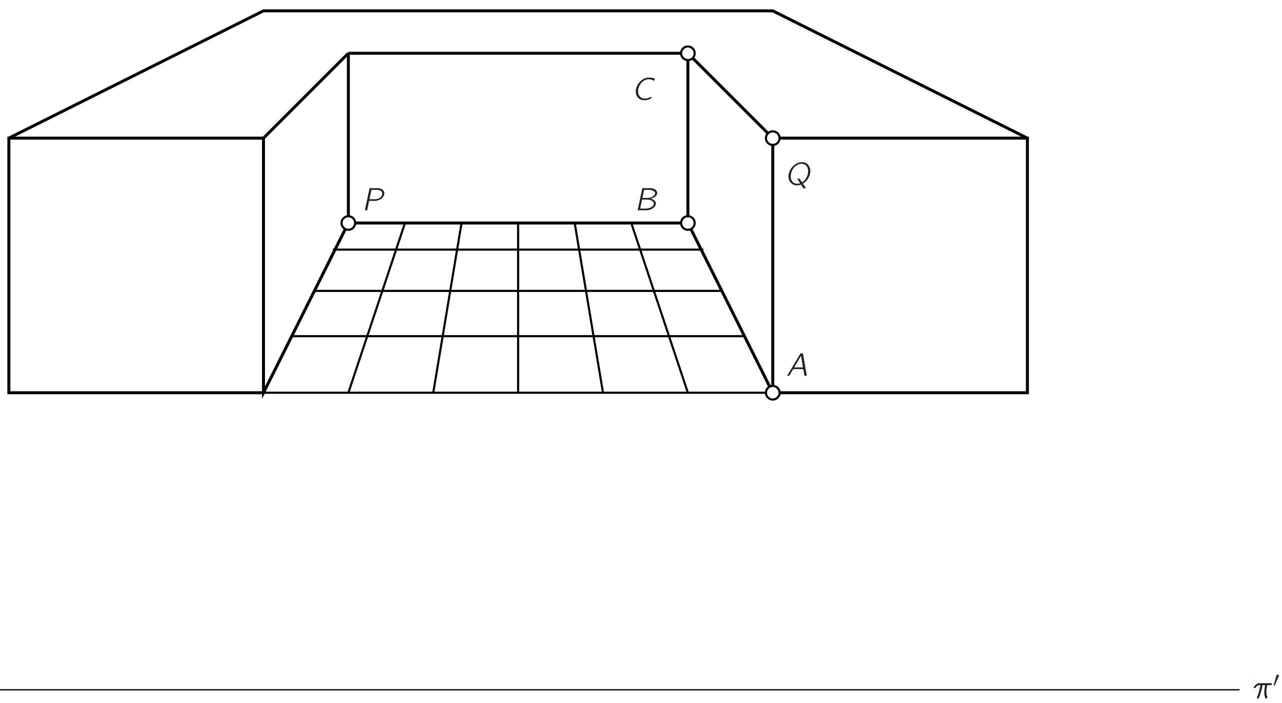


Abbildung 5.17: Rekonstruktion des Grundrisses aus einer Frontalperspektive

Die Bezeichnung *Frontalperspektive* bezieht sich auf eine Perspektive, bei der rechtwinklige Objekte mit nur einem Fluchtpunkt abgebildet werden. Dieser Fluchtpunkt ist der Hauptpunkt, und die in ihn laufenden Linien sind Tiefenlinien. Alle anderen Linien sind parallel zur Bildebene. Im Gegensatz dazu wird eine Perspektive mit zwei Fluchtpunkten auch als *Perspektive über Eck* bezeichnet. Natürlich lassen sich diese Perspektivtypen nur unterscheiden, wenn das dargestellte Objekt drei Scharen von aufeinander senkrechten Geraden besitzt.
Bei einer Frontalperspektive ist der Hauptpunkt der Fluchtpunkt. Die Distanz, also der Abstand des Augpunkts von der Bildebene π, ist damit aber noch nicht bestimmt. Dies bedeutet, dass wir das Verhältnis von Tiefen zu Breiten aus einer Frontalperspektive nicht ablesen können. Beispielsweise geht aus Abb. 5.17 das Seitenverhältnis des Innenhofes nicht hervor. Kennt man dieses aber, so kann man den Grundriss bis auf Maßstab rekonstruieren.
Oftmals enthält ein Foto Objekte, von denen man das Seitenverhältnis kennt: In Abb. 5.17 weiß man vielleicht, dass die im Innenhof angedeuteten Platten quadratisch sind; in anderen Fällen sieht man möglicherweise liegende Kreise, aus denen man ebenfalls ein Seitenverhältnis ablesen kann. Wir können dann wie im Fall von zwei Fluchtpunkten vorgehen:

Durchführung:

- Scharen von Diagonalen der Platten sind parallel. Sie besitzen daher zwei Fluchtpunkte $F_1, F_2 \in \pi$. Wir verbinden sie und erhalten den Horizont h, auf dem wir auch noch den Hauptpunkt H als Fluchtpunkt eintragen.
- Wir tragen auf π' die Punkte F_1, F_2, H ab. Weil die Diagonalen aufeinander rechtwinklig stehen, konstruieren wir O' wieder im Thaleskreis durch ${F_1}', {F_2}'$ Genausogut kann man O' als Schnitt der beiden Fluchtpunktgeraden durch ${F_1}'$, ${F_2}'$ bestimmen, die π' im Winkel 45° schneiden.
- Nun konstruieren wir den Grundriss wieder in Umkehrung des Architektenverfahrens. Wir tragen einen Punkt beliebig auf seinem Sehstrahl ab. Beispielsweise verlangen wir $P \in \pi$. Die verbleibenden Punkte finden wir dann im Schnitt ihrer Sehstrahlen mit solchen Geraden durch bereits konstruierte Punkte, die parallel oder senkrecht zu π' sind.

Beachten Sie auch, dass im vorliegenden Fall das rechtwinkelige Dreieck F_1', F_2', O' gleichschenkelig ist; daher ist der Abstand der beiden Diagonalenfluchtpunkte vom Hauptpunkt genau *die* Distanz $|\overline{HO}|$. Bei einer Frontalperspektive nennt man daher die Diagonalenfluchtpunkte auch *Distanzpunkte*.

Wie würden wir vorgehen, wenn die Platten ein anderes Seitenverhältnis haben? Wenn sich die Diagonalen im Winkel α schneiden, so müßten wir O' so bestimmen, dass von O' aus gesehen die beiden Fluchtpunkte den Winkel α einschließen.
Als Maßaufgabe wollen wir nun noch aus einem bekannten Grundriss-Maßstab die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ bestimmen. Beispielsweise sei der Maßstab so, dass die Platten $2m$ Kantenlänge haben. Wir zerlegen $\overline{PQ}$ in die horizontale Strecke $\overline{PA}$ und die vertikale Strecke $\overline{AQ}$. Die horizontale Länge liest man als $|\overline{PA}| = \sqrt{12^2 + 8^2}\, m = \sqrt{208}\, m$ aus dem Grundriss ab. Die Höhe $|\overline{AQ}|$ ermitteln wir durch Projektion nach π: $|\overline{AQ}| = |\overline{BC}|$. Weil die Strecke $\overline{BC}$ in der Perspektive in wahrer Länge erscheint, ist ihre Länge im Maßstab des Grundrisses abgebildet; sie beträgt daher $6m$. Wir erhalten insgesamt $|\overline{PQ}| = \sqrt{208 + 6^2}\, m = \sqrt{244}\, m \approx 15,6m$.

5.8 Zentralprojektion von Kurven und Flächen

Punkte und Tangenten

Gegeben: Kurve Γ in Grund– und Aufriss.
Gesucht: das perspektivische Bild von Γ.

Durchführung:
Wir bestimmen die perspektivischen Bilder einiger Punkte $P_1, P_2, \ldots$ und, soweit möglich, auch die Bilder der Tangenten in diesen Punkten. Bei genügend vielen Punkten und Tangenten kann man das perspektivische Bild der Kurve in guter Nährerung zeichnen.

Aufgabe 5.7 *Zeichne die Projektion einer Kurve in der Standebene (Fig. 5.18) .*

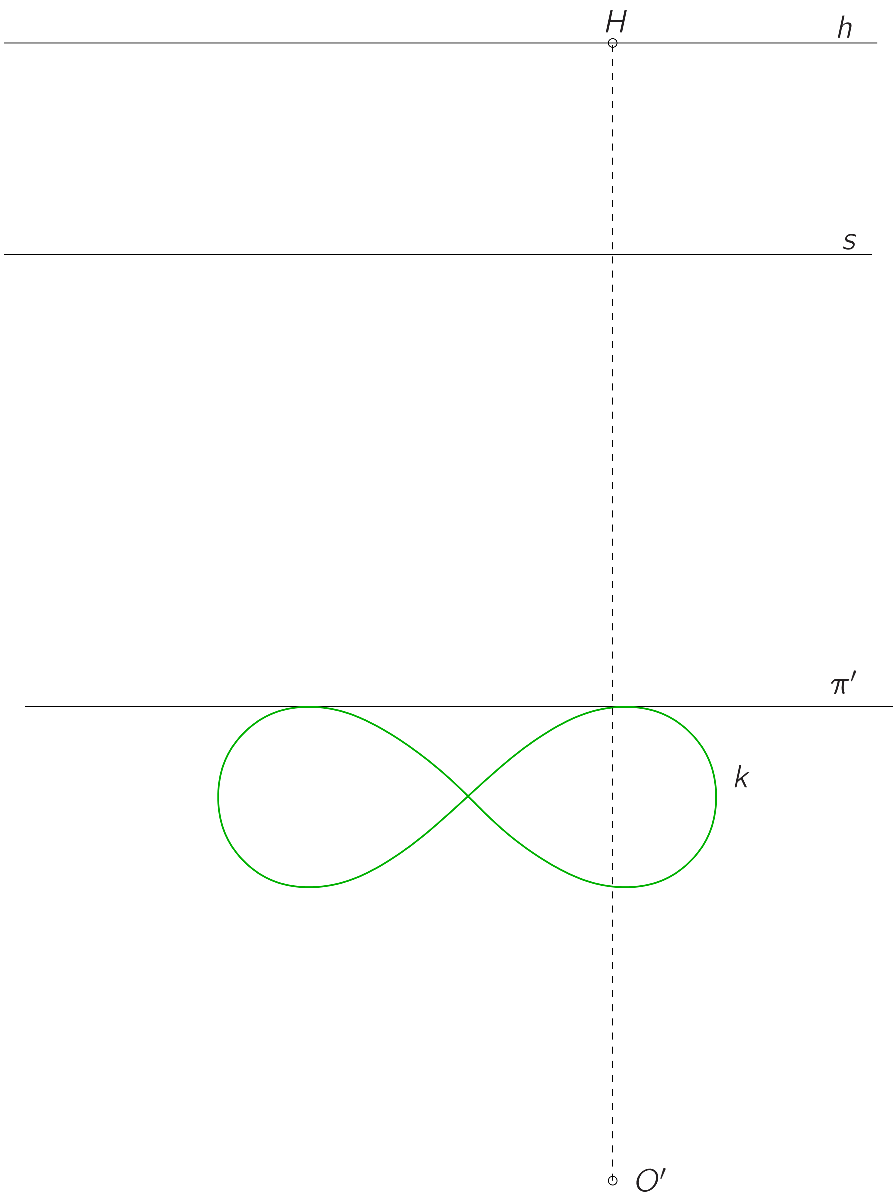


Abbildung 5.18: Zentralprojektion einer Kurve: Beispiel

Zentralprojektion von Kreis und Ellipse

Unter Parallelprojektion können Kreise auf Ellipsen projizieren. Bei der Zentralprojektion gibt es noch mehr Möglichkeiten, je nachdem ob der Kreis in die Verschwindungsebene hineinragt oder nicht: Das perspektive Bild eines Kreises kann a) eine Ellipse b) eine Parabel c) eine Hyperbel oder eine Strecke sein, siehe Abb. 5.19.

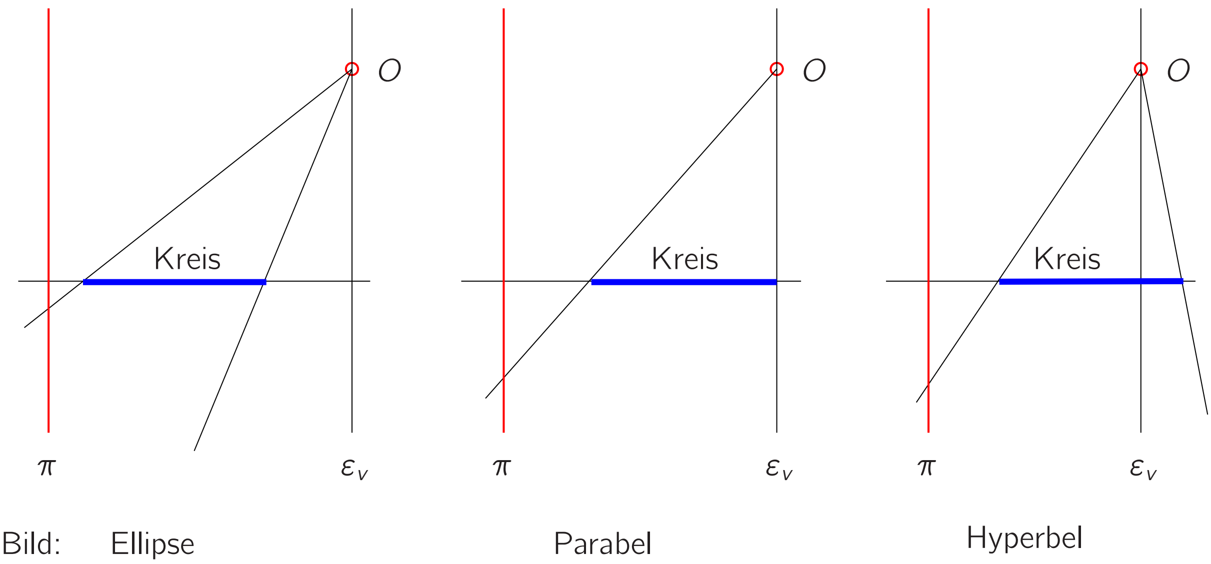


Abbildung 5.19: Zentralprojektion eines horizontalen Kreises, der die Verschwindungsebene a) meidet b) berührt c) schneidet

Beispiel 5.1 *Das Beispiel in Abb. 5.20 zeigt ein perspektives Bild einer Kugel mit dem Augpunkt* **in** *der Kugel. Bei der Projektion von Längen– und Breitenkreisen können alle drei Fälle (Ellipse, Parabel, Hyperbel) auftreten.*

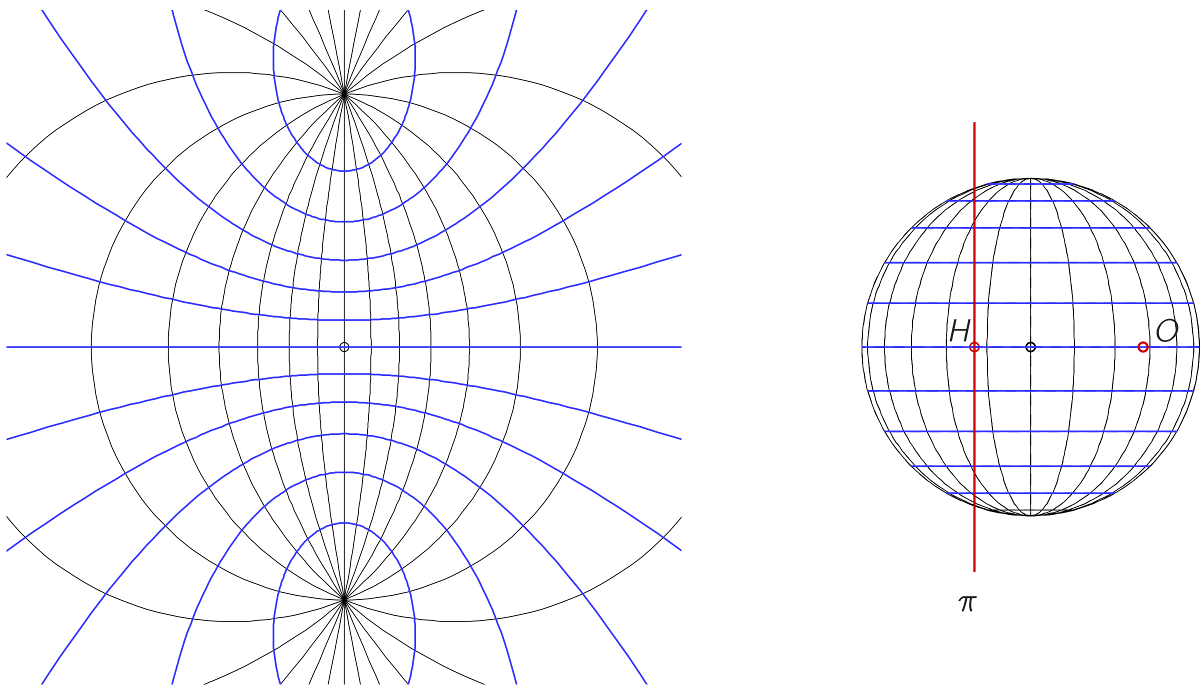


Abbildung 5.20: Zentralprojektion einer Kugel: Augpunkt **in** der Kugel

Zentralprojektion einer Kugel

Man ist es gewohnt, den Umriss einer Kugel als Kreis zu sehen. Erstaunlicherweise stimmt dieser Eindruck nicht, siehe Abb. 5.21! Wir wollen überlegen, warum das so ist.
Der Umriss der Kugel in Zentralprojektion ist der Schnitt der Bildebene mit denjenigen Sehstrahlen, die die Kugel berühren. Diese Sehstrahlen bilden einen Kreiskegel mit Spitze O; er berührt die Kugel in einem Kreis (kein Großkreis). Nur wenn Kugelmittelpunkt und Kegelachse auf dem Hauptsehstrahl liegen, schneidet der Kegel die Bildebene tatsächlich in einem *Kreis*.
In allen anderen Fällen erhält man Kegelschnitte. Wenn die Kugel ganz auf einer Seite der Verschwindungsebene liegt, projizieren sämtliche Umrisspunkte und man erhält eine *Elllipse*, siehe Abbildungen. Berührt die Kugel gerade die Verschwindungsebene in einem einzigen Punkt, so projiziert ihr Umriss auf eine *Parabel*; liegt die Kugel beiderseits der Verschwindungsebene, so projiziert ihr Umriss auf eine *Hyperbel*. Wie erscheint also der Erdhorizont von einem erhöhten Punkt aus gesehen?

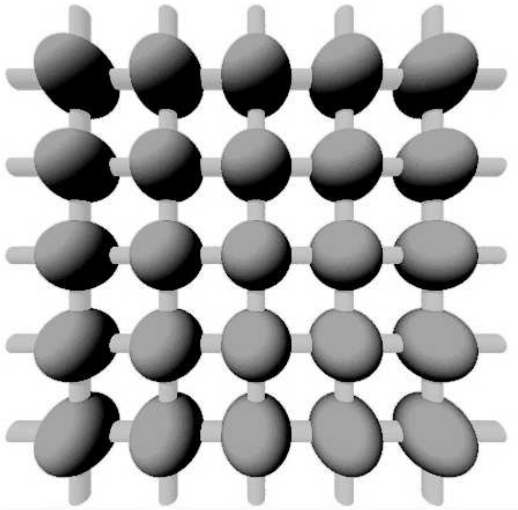


Abbildung 5.21: Perspektivisches Bild von Kugeln. Nur der Umriss der mittleren Kugel ist ein Kreis.

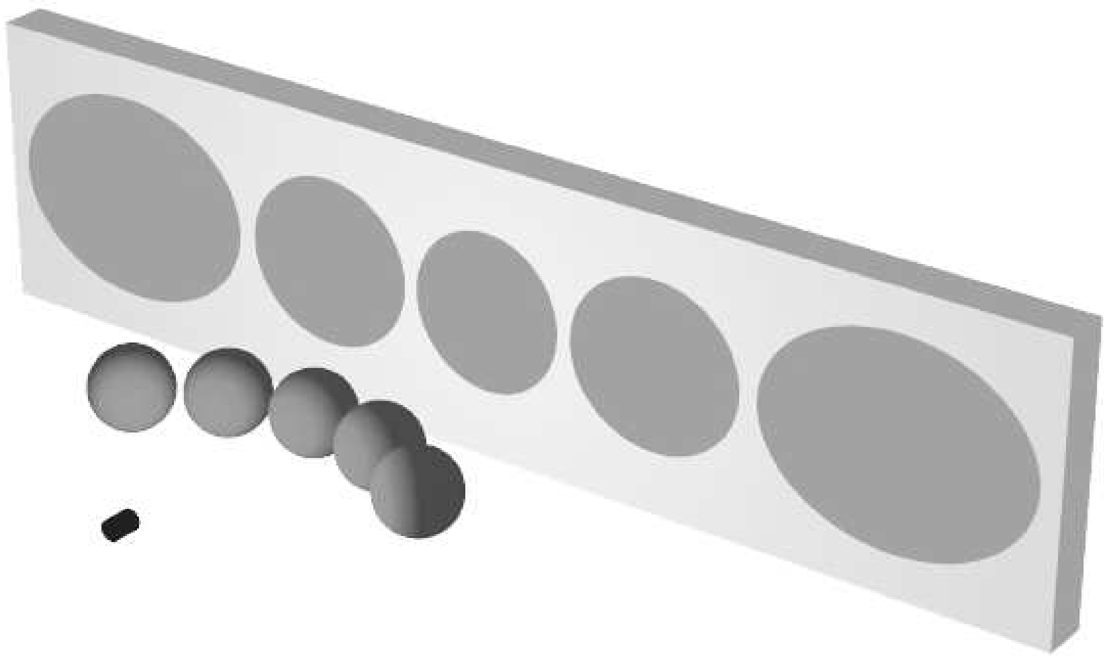


Abbildung 5.22: Perspektivische Bilder von Kugeln als Schattenwürfe unter Beleuchtung.