Einführung in die Optimierung
13. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Marc Pfetsch
Dipl.-Math. Oec. Andreas Tillmann

WS 2013/14
06./07.02.2014

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Tangentialkegel)
Sei

$$\begin{aligned}\mathscr{X} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; & -2x + y - 1 \le 0, \\ & -2x - y - 1 \le 0, \\ & x + y - 1 \le 0 \\ & x - y - 1 \le 0\}.\end{aligned}$$

(a) Skizzieren Sie die Menge $\mathscr{X}$.

(b) Bestimmen Sie die Tangentialkegel von $\mathscr{X}$ in den Punkten $p_1 = (-\frac{1}{2}, 0)$, $p_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $p_3 = (0,0)$ und zeichnen Sie die Tangentialkegel von $\mathscr{X}$ in p_1 und p_2 in die Skizze ein.

(c) Bestimmen Sie anhand der Skizze alle lokalen und globalen Extrema der Funktion

$$f : \mathscr{X} \to \mathbb{R} : (x,y) \mapsto x^2 + y^2.$$

Aufgabe G2 (Tangentialkegel)
Seien $\mathscr{X}_1, \mathscr{X}_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Sei $x \in \mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_2$ und bezeichne $\mathscr{T}_1$ und $\mathscr{T}_2$ den Tangentialkegel von $\mathscr{X}_1$ bzw. $\mathscr{X}_2$ in x. Dann ist der Tangentialkegel von $\mathscr{X}_1 \cap \mathscr{X}_2$ in x die Menge $\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$.

(b) Sei $x \in \mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_2$ und bezeichne $\mathscr{T}_1$ und $\mathscr{T}_2$ den Tangentialkegel von $\mathscr{X}_1$ bzw. $\mathscr{X}_2$ in x. Dann ist der Tangentialkegel von $\mathscr{X}_1 \cup \mathscr{X}_2$ in x die Menge $\mathscr{T}_1 \cup \mathscr{T}_2$. (Für den Fall, dass $x \notin \mathscr{X}$ gilt, sei der Tangentialkegel von $\mathscr{X}$ in x als die leere Menge definiert.)

Hausübung

Aufgabe H1 (Tangentialkegel (parameterabhängig))
Gegeben sei die Optimierungsaufgabe

$$\begin{array}{ll} \min & -(x_1+1)^2 - (x_2+1)^2 \\ \text{s. t.} & x_1^2 + x_2^2 \;\le\; 2 \\ & x_1 \;\le\; \gamma\,, \end{array}$$

wobei $\gamma \ge -\sqrt{2}$ eine fest vorgegebene Zahl ist.

(a) Ermitteln Sie anhand einer Skizze die Lösung $x^* = x^*(\gamma)$ dieses Problems (in Abhängigkeit von γ).

(b) Sei mit X die durch die Nebenbedingungen definierte Menge bezeichnet. Überprüfen Sie, ob x^* die Regularitätsbedingung $\mathscr{T}_X(x^*) = \mathscr{L}_X(x^*)$ erfüllt. (Da X nicht polyedrisch ist, ist Lemma 7.7 aus der Vorlesung nicht anwendbar!)

Hinweis: Fallunterscheidung $\gamma = -\sqrt{2}$, $-\sqrt{2} < \gamma \leq 1$ und $\gamma > 1$.

Aufgabe H2 (Projektionen)
Die (Euklidische) Projektion eines Punktes $z \in \mathbb{R}^n$ auf eine konvexe abgeschlossene Menge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist definiert als

$$\Pi_X(z) = \arg\min \left\{ \frac{1}{2} \|x - z\|_2^2 \,:\, x \in X \right\}.$$

Insbesondere ist also für $z \in X$ offensichtlich $\Pi_X(z) = x$. Bestimmen Sie für folgende Mengen X jeweils den projizierten Punkt $\Pi_X(z)$ zu einem Punkt $z \notin X$.

(a) $X = \{x \in \mathbb{R}^n : \ell \leq x \leq u\}$ (wobei $\ell, u \in \mathbb{R}^n$)

(b) $X = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ (wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\operatorname{Rang}(A) = m \leq n$, $b \in \mathbb{R}^m$)

Aufgabe H3 (Spieltheorie)
Der Weihnachtsmann und der Osterhase spielen gern Stein–Schere–Papier. Wer ein Spiel gewinnt, erhält vom Verlierer einen Rollmops. Allerdings kann der Osterhase mit seinen Pfoten nur Stein und Papier, aber nicht Schere machen. Beide wissen das, reden aber nicht darüber. Der Weihnachtsmann ist also im Vorteil, weil er die Wahl zwischen Stein, Schere und Papier hat. Die Frage ist: Wie groß ist dieser Vorteil? Genauer: Wie viele Rollmöpse macht der Weihnachtsmann im Durchschnitt pro Spiel plus, wenn beide (für sich) optimal spielen?
Hinweis: Hier sind noch einmal zur Erinnerung die Spielregeln von Stein–Schere–Papier: Die beiden Spieler entscheiden sich für ein Element Stein, Schere oder Papier und bilden dies mit ihren Händen (bzw. Pfoten) nach. Der Gewinn richtet sich nach folgenden Regeln: Stein schlägt Schere, Schere schlägt Papier, und Papier schlägt Stein. Wenn beide Spieler die gleiche Figur bilden, geht diese Runde unentschieden aus.