Einführung in die Optimierung
12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Marc Pfetsch
Dipl.-Math. Oec. Andreas Tillmann

WS 2013/14
30./31.01.2014

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Streuung und Kodierungslänge)
Gegeben ist eine rationale Zahl $a \in \mathbb{Q}$ mit $a = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$.
Welche Werte kann a annehmen, wenn $\langle a \rangle = 5$? Schreiben Sie alle Möglichkeiten auf und sortieren Sie diese der Größe nach. Welches ist der kleinste Wert; welches der kleinste Wert, der größer als Null ist; welches ist der größte Wert?

Aufgabe G2 (Innere-Punkte-Verfahren)
Neben Simplex-und Ellipsoidmethode gibt es noch eine weitere Klasse von Verfahren zur Lösung von LPs. Anstatt wie im Simplexalgorithmus die Ecken des Zulässigkeitsbereichs abzuwandern, verfolgen diese Methoden einen „zentralen Pfad" im Inneren des Polytops, bis sie gegen einen Optimalpunkt konvergieren. Wir wollen nun ein Beispiel eines solchen zentralen Pfades betrachten.
Wir möchten das LP

$$\max c^T x \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq b,\ x \geq 0$$

lösen. Das Einführen von Schlupfvariablen liefert die Nebenbedingungen $Ax + w = b$, $x \geq 0$, $w \geq 0$. Für ein $\mu > 0$ betrachten wir das Problem

$$\max \quad c^T x + \mu \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) + \mu \sum_{i=1}^{m} \log(w_i) \quad \text{s.t.} \quad Ax + w = b. \tag{*}$$

Für jeden inneren Punkt des Polytops $\mathscr{P} := \{(x, w) : Ax + w = b, x \geq 0, w \geq 0\}$ gilt $(x, w) > 0$; diese Eigenschaft liegt im obigen Problem implizit vor, da die Logarithmusfunktion nur für positive Argumente definiert ist. Da zudem $\log(z) \to -\infty$ für $z \to 0$ ($z > 0$), wird die obige Zielfunktion immer kleiner, je näher (x, w) dem Rand (der Nichtnegativitätsbedingungen) kommt. Unter geeigneten Voraussetzungen, gibt es für jedes $\mu > 0$ eine Lösung $(x^*(\mu), w^*(\mu))$ von (*) und $\lim_{\mu \searrow 0}(x^*(\mu), w^*(\mu))$ ist in der Tat eine Lösung des ursprünglichen Problems. Wir wollen nun die Lösungen von (*) untersuchen.

(a) Sei

$$L(x, w, y) = c^T x + \mu \sum_{j=1}^{n} \log(x_j) + \mu \sum_{i=1}^{m} \log(w_i) + y^T(b - Ax - w)$$

die sogenannte Lagrangefunktion zu (*). Man kann zeigen, dass ein stationärer Punkt von $L(x, w, y)$, also ein Punkt, für den der Gradient ∇L verschwindet, das Optimierungsproblem (*) maximiert. Zeigen Sie, dass ein stationärer Punkt (x^*, w^*, y^*) von L folgende Gleichungen erfüllt (mit geeignet definiertem z):

$$\begin{aligned} Ax + w &= b, && \text{(I)} \\ A^T y - z &= c, && \text{(II)} \\ y_i w_i &= \mu,\ i = 1, \dots m, && \text{(III)} \\ x_j z_j &= \mu,\ j = 1, \dots n. && \text{(IV)} \end{aligned}$$

(b) Das System (I) beschreibt die Gleichungsrestriktionen unseres ursprünglichen LPs, das System (II) beschreibt die Gleichungsrestriktionen des dazu dualen LPs. Für $\mu = 0$ sollten Ihnen auch die Gleichungen (III) und (IV) bekannt vorkommen. Woher?

Aufgabe G3 (Notwendige Optimalitätsbedingungen)
Formulieren Sie analog zum Satz 7.3 aus der Vorlesung die notwendige Optimalitätsbedingung für den Fall, dass

(a) es sich um ein Maximierungsproblem handelt,

(b) die lokale Lösung $\bar{x}$ ein innerer Punkt von $\mathscr{X}$ ist.

Hausübung

Aufgabe H1 (Schranken an Kodierungslängen)
Sind die folgenden Abschätzungen von Kodierungslängen *scharf*? Geben Sie jeweils entweder ein Beispiel an, in dem die Ungleichung mit Gleichheit erfüllt ist, oder beweisen Sie, dass die Ungleichung nicht scharf ist (also tatsächlich immer "$<$" statt "$\leq$" gilt).

(a) Für $r \in \mathbb{Q}$ gilt $|r| \leq 2^{\langle r \rangle - 1} - 1$.

(b) Für $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq 2$ gilt $\langle z_1 + \cdots + z_n \rangle \leq \langle z_1 \rangle + \cdots + \langle z_n \rangle$.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass es ausreicht, den Fall $z_i \geq 0$ für alle $1 \leq i \leq n$ zu untersuchen. Verwenden Sie dann, dass sich jedes z_i mit einem passenden $1 \leq k_i \in \mathbb{N}$ im Intervall $2^{k_i - 1} \leq z_i < 2^{k_i}$ lokalisieren lässt.

(c) Für jedes positive $n \in \mathbb{N}$ gilt $\langle 2^n \rangle \leq n + 2$ und $\langle n \rangle \leq \log_2(n) + 3$.

Aufgabe H2 (Innere-Punkte-Verfahren)
In dieser Aufgabe widmen wir uns wieder dem Innere-Punkte-Verfahren aus Aufgabe G2. Betrachen Sie das LP

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_2 \leq 1, \\ & -x_1 \leq -1, \\ & x_1 \geq 0, \\ & x_2 \geq 0. \end{aligned}$$

(a) Sei

$$x := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 2\mu + \sqrt{1 + 4\mu^2} \\ 1 - 2\mu + \sqrt{1 + 4\mu^2} \end{pmatrix}, \quad w := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + 2\mu - \sqrt{1 + 4\mu^2} \\ -1 + 2\mu + \sqrt{1 + 4\mu^2} \end{pmatrix}.$$

und $y^T = (y_1, y_2) := (x_1, x_2)$, $z^T = (z_1, z_2) := (w_1, w_2)$. Zeigen Sie, dass (x, w, y, z) die Gleichungen (I)-(IV) aus Aufgabe G2 erfüllt.
Damit ist (x, w, y, z) ein stationärer Punkt von L und löst somit (*), weshalb die Lösungen $(x(\mu), w(\mu), y(\mu), z(\mu))$ einen zentralen Pfad bilden.

(b) Zeichnen Sie den zentralen Pfad, also die Lösungen x des Vektors (x, w, y, z) für mindestens 3 Werte von $\mu > 0$ und für $\mu = 0$ in dem Zulässigkeitsbereich des gegebenen LPs ein.

Aufgabe H3 (KKT-Bedingungen)
Gegeben sei das Optimierungsproblem

$$(P1) \qquad \begin{aligned} \max \quad & 5x_1 + 8x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Formulieren Sie die KKT-Bedingungen für (P1). Verifizieren Sie für jeden Eckpunkt (algebraisch und geometrisch), ob die KKT-Bedingungen gelten. Was ist die globale Lösung?