Einführung in die Optimierung
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Marc Pfetsch
Dipl.-Math. Oec. Andreas Tillmann

WS 2013/14
23./24.01.2014

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Ellipsoide)

(a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeichnen Sie das Ellipsoid $\mathscr{E}(A,a) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1\}$.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit und $a \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass das Ellipsoid

$$\mathscr{E}(A,a) = \{x \in \mathbb{R}^n : (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1\}$$

das Bild der Einheitskugel $\mathscr{B} = \{u \in \mathbb{R}^n : \|u\|_2 \leq 1\}$ unter der affinen Transformation $f(u) = A^{\frac{1}{2}}u + a$ ist. Damit ergibt sich als äquivalente Darstellung von $\mathscr{E}$:

$$\mathscr{E}(A,a) = \{a + A^{\frac{1}{2}}u : \|u\|_2 \leq 1\}.$$

Aufgabe G2 (Größe der Ecken von Polyedern)

Seien $P = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax \leq b, x \geq 0\}$ und $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : Bx \leq d, x \geq 0\}$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sei $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine beliebige Ecke von P und sei $v_i, 1 \leq i \leq 4$, eine beliebige Koordinate von v. Geben Sie obere Schranken für den Absolutbetrag des Zählers von v_i, für den Absolutbetrag des Nenners von v_i und für $|v_i|$ an. Lösen Sie dieselbe Aufgabe für eine beliebige Ecke $q = (q_1, q_2, q_3)$ von Q. Kann man diese Schranken verbessern?

Aufgabe G3 (Die Ellipsoidmethode)

(a) Betrachte das Polyeder $\mathscr{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Wie viele Iterationen benötigt die Ellipsoidmethode höchstens, um zu entscheiden, ob $\mathscr{P}^0$ leer ist oder nicht?

(b) In der ersten Iteration der Ellipsoidmethode seien $a_1 = (0,0)^T$ und $A_1 = 2I$ gegeben. Sei $x + y \leq -1$ eine der verletzten Ungleichungen. Bestimme a_2 und A_2 und stelle die Ellipsoide $\mathscr{E}_1$ und $\mathscr{E}_2$ sowie die Geraden $g := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = -1\}$ und $g_t := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ graphisch dar.

Hausübung

Aufgabe H1 (Ellipsoide)

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit und seien $0 \neq c \in \mathbb{R}^n$ und $a \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die Lösung des Optimierungsproblems

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & (x-a)^T A^{-1}(x-a) \leq 1. \end{array}$$

(b) Zeigen Sie, dass Ellipsoide konvexe Mengen sind.

Aufgabe H2 (Der Kettenbruchalgorithmus)

Wir betrachten folgendes Problem: Gegeben sei eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ und ein $\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $0 < \varepsilon < 1$. Gesucht sind ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ mit

$$1 \leq q \leq \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{und} \quad \left| r - \frac{p}{q} \right| < \frac{\varepsilon}{q}.$$

Auf den ersten Blick ist nicht einzusehen, dass solch eine rationale Zahl p/q immer existiert, aber genau dies ist der Fall. Mehr noch, eine solche Zahl kann sogar in polynomialer Zeit bestimmt werden; dazu dient der folgende Algorithmus (vgl. Blatt 10, G2 & G3):

Input: $r \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$.

Output: $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $1 \leq q \leq \frac{1}{\varepsilon}$ und $\left| r - \frac{p}{q} \right| < \frac{\varepsilon}{q}$.

(1) Initialisierung: Setze $i := 0$, $r_0 := r$, $a_0 := \lfloor r \rfloor$, $p_{-2} := 0$, $p_{-1} := 1$, $q_{-2} := 1$ und $q_{-1} := 0$.

(2) Iteriere folgende Schritte:

(3) Setze $p_i := a_i p_{i-1} + p_{i-2}$ und $q_i := a_i q_{i-1} + q_{i-2}$

(4) Falls $q_i > \frac{1}{\varepsilon}$ **STOP** (gib $p = p_{i-1}$ und $q = q_{i-1}$ aus).

(5) Falls $r_i = a_i$ **STOP** (gib $p = p_i$ und $q = q_i$ aus).

(6) Setze $r_{i+1} := \frac{1}{r_i - a_i}$ und $a_{i+1} := \lfloor r_{i+1} \rfloor$

(7) Setze $i := i + 1$ und gehe zu (3).

Approximieren Sie den Wert $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$ mit einer Genauigkeit von $\varepsilon = 0.01$ durch eine rationale Zahl, d.h., finden Sie

$$p, q \in \mathbb{N} \text{ mit } \left| \sqrt{3} - \frac{p}{q} \right| < \frac{0.01}{q}, \quad 1 \leq q \leq 100.$$

Aufgabe H3 (Die Ellipsoidmethode)

Bestimmen Sie mit Hilfe der Ellipsoidmethode einen Punkt des Polytopes $\mathscr{P} := \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x_i \leq 2,\ i = 1, 2\}$. Beginnen Sie mit $R = 3$ für $\mathscr{E}_0$. Irrationale Zahlen sollen mit Hilfe des Algorithmus aus Aufgabe H2 gerundet werden (Genauigkeit $\varepsilon = 0.01$). Sie dürfen für diese Aufgabe annehmen, dass dies keine weiteren Auswirkungen auf die Korrektheit der Ellipsoidmethode hat.