Einführung in die Optimierung
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik **WS 2013/14**
Prof. Dr. Marc Pfetsch **12./13.12.2013**
Dipl.-Math. Oec. Andreas Tillmann

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Basislösungen)
Gegeben sei das lineare Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array} \qquad \text{(P)}$$

Zeigen Sie: Besitzt das obige LP (P) eine nicht-degenerierte optimale Basislösung, so besitzt das dazu duale LP (D) eine eindeutige Optimallösung.

Aufgabe G2 (Primaler Simplex-Algorithmus)
Lösen Sie folgendes lineares Optimierungsproblem mit Hilfe des primalen Simplex-Algorithmus.

$$\begin{array}{rrrrcr} \max & 5x_1 & +4x_2 & +3x_3 & & \\ \text{s.t.} & 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & \leq & 5 \\ & 4x_1 & +x_2 & +2x_3 & \leq & 11 \\ & 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & \leq & 8 \\ & x_1, & x_2, & x_3 & \geq & 0 \end{array}$$

Aufgabe G3 (Modellierung)
Ein Landwirt möchte höchstens 100 Hektar [ha] Land bepflanzen, und zwar mit Kartoffeln, Weizen und/oder Rüben. Die benötigten Daten sind in folgender Tabelle zusammengefasst

	Kartoffeln	Weizen	Rüben	Zur Verfügung stehen
Anbaukosten [Euro/ha]	1 000	2 000	1 000	110 000 Euro
Arbeitstage [Tage/ha]	1	3	2	160 Arbeitstage
Reingewinn [Euro/ha]	13 000	12 000	14 000	

Wieviel Hektar soll er mit Kartoffeln, wieviel mit Weizen und wieviel mit Rüben bepflanzen, um einen optimalen Gewinn zu erzielen?
Erstellen Sie ein mathematisches Modell zu diesem Optimierungsproblem.

Hausübung

Aufgabe H1 (Ecken & Basen)
Gegeben sei das durch folgende Ungleichungen bestimmte Polyeder $\mathscr{P}$:

$$\begin{aligned} 11x_1 &\leq 35 \\ 3x_1 + 5x_2 &\leq 15 \\ 2x_1 + 7x_2 &\leq 14 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie alle Ecken des Polyeders, sowie alle dazugehörigen Basen und Basislösungen. Geben Sie außerdem an, welche Ecken entartet sind.

Aufgabe H2 (Zykeln des Simplex-Verfahrens)
Gegeben sei das folgende LP:

$$\begin{array}{rrcrcrcrcl} \max & 10x_1 & - & 57x_2 & - & 9x_3 & - & 24x_4 & & \\ \text{s.t.} & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{11}{2}x_2 & - & \frac{5}{2}x_3 & + & 9x_4 & \leq & 0 \\ & \frac{1}{2}x_1 & - & \frac{3}{2}x_2 & - & \frac{1}{2}x_3 & + & x_4 & \leq & 0 \\ & x_1 & & & & & & & \leq & 1 \\ & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 \end{array}$$

Zeigen Sie, dass der (primale) Simplex-Algorithmus mit den Auswahlregeln

- Pricing: Dantzig-Regel (“Wähle ein $j \in N$ mit minimalem Wert $\bar{z}_j < 0$”)
- Ratio-Test: kleinster Variablen-Index, d.h.
  “Wähle das i mit kleinstem B_i so, dass $\frac{\bar{x}_{B_i}}{w_i} = \min\left\{\frac{\bar{x}_{B_k}}{w_k} : w_k > 0,\, k = 1, \dots, m\right\}$”

bei diesem Beispiel zykelt. Geben Sie dazu insbesondere zu jeder Iteration die aktuelle Basis an.
Überlegen Sie sich, wie das Zykeln umgangen werden kann und bestimmen Sie sodann die Lösung des Optimierungsproblems.

Aufgabe H3 (Modellierung)

(a) Eine Nahrungsmittelfirma stellt aus Nüssen, Haferflocken und Rosinen drei Sorten Müsli (A,B,C) her. Die Mischungsverhältnisse sind wie folgt gegeben:

	A	B	C
Nüsse	3	1	2
Haferflocken	2	4	1
Rosinen	1	2	3

Beim Verkauf einer Einheit Müsli A erzielt die Firma einen Gewinn von 3 Euro, der Verkauf von B bringt 1 Euro, der Verkauf von C 2 Euro Gewinn. Die Firma kann maximal 6000 Mengeneinheiten [ME] Nüsse, 13000 ME Haferflocken und 9000 ME Rosinen beschaffen. Ein Produktionsplan mit maximalem Gewinn soll bestimmt werden.

Modellieren Sie diese Problemstellung als Optimierungsproblem.

(b) Aufgrund der Lieferverträge muss die Firma mindestens doppelt so viel Einheiten Müsli B wie Müsli A herstellen. Werden weniger als 600 ME Müsli C produziert, dann soll die Produktion von Müsli B mindestens 300 ME betragen.

Modellieren Sie diese Anforderungen als zusätzliche Nebenbedingungen des Problems aus Aufgabenteil (a).