Einführung in die Optimierung
6. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Marc Pfetsch
Dipl.-Math. Oec. Andreas Tillmann

WS 2013/14
28./29.11.2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Primal & dual)
Seien A, B, C, D Matrizen und a, b, c, d Vektoren von geeigneter Dimension. Betrachten Sie ein primales Problem (P) und ein duales Problem (D) der Form

$$(P)\quad \begin{array}{ll} \min & a^T x + b^T y \\ \text{s.t.} & Ax + Cy \geq c \\ & Bx + Dy = d \\ & x \geq 0 \end{array} \qquad\qquad (D)\quad \begin{array}{ll} \max & c^T u + d^T v \\ \text{s.t.} & A^T u + B^T v \leq a \\ & C^T u + D^T v = b \\ & u \geq 0. \end{array}$$

(a) Zeigen Sie, dass (P) das duale Problem von (D) ist.

(b) Formulieren und beweisen Sie den schwachen Dualitätssatz für (P) und (D).

Aufgabe G2 (Schwache Dualität & komplementärer Schlupf)

(a) Was ist an der folgenden Argumentation falsch? Geben Sie für jede Abschätzung an, ob und warum sie richtig oder falsch ist.

Es gilt (durch Anwendung von schwacher Dualität bzw. einfacher Abschätzungen):

$$\begin{aligned} \max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} &\leq \min\{y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0\} && (1)\\ &\leq \max\{y^T b : y^T A \geq c^T, y \geq 0\} && (2)\\ &\leq \min\{c^T x : Ax \geq b, x \leq 0\} && (3)\\ &\leq \max\{c^T x : Ax \geq b, x \leq 0\} && (4)\\ &\leq \min\{y^T b : y^T A \leq c^T, y \leq 0\} && (5)\\ &\leq \max\{y^T b : y^T A \leq c^T, y \leq 0\} && (6)\\ &\leq \min\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} && (7)\\ &\leq \max\{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\}. && (8) \end{aligned}$$

Also gilt überall Gleichheit, insbesondere zwischen den letzten beiden Zeilen, und es macht keinen Unterschied, ob man maximiert oder minimiert.

Untersuchen Sie anschließend die Gültigkeit der Abschätzungen an folgenden Problemen:

$$(\mathbf{P_1})\quad \begin{array}{ll} \max & x_1 + x_2 \\ \text{s.t.} & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

und

$$
\begin{array}{llcccl}
(\mathbf{P_2}) & \max & x_1 & + & x_2 & \\
& \text{s.t.} & x_1 & & & \leq 0 \\
& & & & x_2 & \leq 0 \\
& & & & x_1, x_2 & \geq 0.
\end{array}
$$

(b) Gegeben sei das folgende lineare Problem

$$
(P) \quad
\begin{array}{lrcrcrcrcrcl}
\max & 7x_1 & + & 6x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 3x_5 & & \\
\text{s.t.} & x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & - & 2x_4 & + & 2x_5 & \leq & 4 \\
& 4x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 3 \\
& 2x_1 & + & 4x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & + & 5x_5 & \leq & 5 \\
& 3x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & \leq & 1 \\
& & & & & & & & & x_1, \dots, x_5 & \geq & 0.
\end{array}
$$

Formulieren Sie das duale Problem zu (P) und prüfen Sie mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf, ob $\bar{x} = (0, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 0)^T$ eine Optimallösung von (P) ist.

Aufgabe G3 (KKT-Bedingungen)
Betrachten Sie die folgenden zueinander dualen Probleme:

$$
\text{(P)} \quad \begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \end{array} \qquad\qquad \text{(D)} \quad \begin{array}{ll} \min & b^T y \\ \text{s.t.} & A^T y = c \\ & y \geq 0 \end{array}
$$

und die beiden Kegel

$$
\mathcal{N}(x) = \text{cone}(A^T_{\text{eq}(\{x\})\cdot}) = \left\{ \sum_{i \in \text{eq}(\{x\})} \lambda_i A^T_{i\cdot} \mid \lambda_i \geq 0 \text{ für alle } i \in \text{eq}(\{x\}) \right\},
$$
$$
\mathcal{Z}(x) = \left\{ r \in \mathbb{R}^n \mid A_{\text{eq}(\{x\})\cdot} r \leq 0 \right\}.
$$

(a) Veranschaulichen Sie die Karush-Kuhn-Tucker-Bedingungen (Satz 4.12) anhand einer Skizze. Zeichnen Sie dazu ein zweidimensionales Polyeder, wählen Sie eine Ecke q und einen Punkt p auf einer Kante und skizzieren Sie jeweils die Kegel $\mathcal{N}$ und $\mathcal{Z}$. Für welche c ist q beziehungsweise p eine Optimallösung?

(b) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen unter Verwendung von $\mathcal{N}(x)$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Lineare Programme)

(a) Seien $c, \ell, u \in \mathbb{R}^n$ und sei $\ell \leq u$. Geben Sie eine explizite Lösung (x^* mit Wert $p^* = c^T x^*$) für folgendes LP an:

$$
\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & \ell \leq x \leq u. \end{array}
$$

(b) Betrachten Sie das Polyeder $\mathcal{P} := \{x \in \mathbb{R}^n : a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$. Es soll eine möglichst große Kugel $\mathcal{B}$ mit Mittelpunkt $x_c \in \mathcal{P}$, d.h.

$$
\mathcal{B} = \{x_c + u : \|u\|_2 \leq r\},
$$

in $\mathcal{P}$ gelegt werden.
Formulieren Sie diese Problemstellung als lineares Problem in x_c und r.

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ nichtsingulär und $b, c \in \mathbb{R}^m$. Betrachten Sie das LP

$$
\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \end{array}
$$

und zeigen Sie, dass für den Optimalwert p^* gilt:

$$
p^* = \begin{cases} c^T A^{-1} b & \text{falls } A^{-T} c \geq 0 \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}
$$

Aufgabe H2 (Komplementärer Schlupf)
Seien $\mathscr{P} = \mathscr{P}(A, b)$ ein Polyeder und $\mathscr{F} = \{x \in \mathscr{P} : c^T x = \eta\}$ eine nicht-leere Seitenfläche von $\mathscr{P}$. Beweisen Sie: Dann gilt

$$\operatorname{eq}(\mathscr{F}) = \{\, i \in M : \exists y \geq 0, y_i > 0 : y^T A = c^T, y^T b = \eta \,\}.$$

Lösungshinweis: Betrachten Sie das lineare Programm $\max\{c^T x : Ax \leq b\}$. Dann ist $\mathscr{F}$ die Menge der Optimallösungen von diesem LP. Verwenden Sie die Sätze vom komplementären Schlupf.

Aufgabe H3 (Komplementärer Schlupf)
Gegeben sei das lineare Programm (P):

$$\begin{array}{lrll}
\min & x_1 - 2x_2 & & \\
\text{s.t.} & x_1 + 2x_3 & \geq 1 & \text{(P1)} \\
 & -x_2 & \geq -2 & \text{(P2)} \\
 & -x_1 + x_2 + 2x_3 & \geq 0 & \text{(P3)} \\
 & 2x_1 - x_3 & \geq 1 & \text{(P4)} \\
 & -x_3 & \geq 0. & \text{(P5)}
\end{array}$$

(a) Bestimmen Sie das dazugehörige duale lineare Programm (D).

(b) Lösen Sie (P) und (D) und verwenden Sie dazu ausschließlich die Bedingungen des komplementären Schlupfes. *Tipp:* Achten Sie auf die Nichtnegativitätsbedingungen!

(c) Gegeben seien

$$\begin{array}{lll} \text{(LP)} & \max & c^T x \\ & \text{s.t.} & Ax \leq b \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{lll} \text{(DLP)} & \min & b^T y \\ & \text{s.t.} & A^T y = c \\ & & y \geq 0 \end{array}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie ein Optimallösungspaar $(\bar{x}, \bar{y})$, in dem die Äquivalenzen des Satzes vom starken komplementären Schlupf gelten, und ein Optimallösungspaar $(\hat{x}, \hat{y})$, in dem die Äquivalenzen nicht gelten. Begründen Sie Ihre Wahl.