Einführung in die Optimierung
4. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Marc Pfetsch
Dipl.-Math. Oec. Andreas Tillmann

WS 2013/14
14./15.11.2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Polyeder)
Betrachten Sie das Polyeder $\mathscr{P}$, das durch die folgenden Ungleichungen gegeben ist:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 1 \\ -x_1 &\leq 1 \\ x_1 - x_2 &\geq -3, \\ x_2 &\geq 1 \\ -2x_1 - x_2 &\leq 0. \end{aligned}$$

(a) Fertigen Sie eine Skizze von dem Polyeder an.

(b) Bestimmen Sie anhand der Skizze alle Ecken, Kanten, und Facetten des Polyeders und geben Sie die Ungleichungen an, die die jeweiligen Seitenflächen induzieren.

(c) Finden Sie eine Matrix A und einen Vektor b, sodass $\mathscr{P} = \mathscr{P}(A, b)$ gilt und das System $Ax \leq b$ irredundant ist.

(d) Finden Sie eine Matrix B und einen Vektor c, sodass $\mathscr{P}$ nach den Regeln I und II aus Bemerkung 3.6 der Vorlesung zu $\mathscr{P}^=(B, c)$ umgeformt werden kann. Gilt $\mathscr{P} = \mathscr{P}^=(B, c)$?

Aufgabe G2 (Polyeder)
Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und (A, b) habe keine Nullzeile.

(a) Zeigen Sie: *Ein Polyeder $\mathscr{P}(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ hat nur endlich viele Ecken.*
Finden Sie eine obere Schranke $\mu(m, n)$ für die Anzahl der Ecken von $\mathscr{P}(A, b)$ und geben Sie ein Beispiel eines Polyeders an, das genau $\mu(m, n)$ Ecken hat.

(b) Sei $\mathscr{P}(A, b) \subset \mathbb{R}^n$ ein Polytop, und sei x eine Ecke von $\mathscr{P}(A, b)$. x heißt nicht degeneriert, falls $|eq(\{x\})| = n$, anderenfalls heißt x degeneriert.
   i. Zeigen Sie: *Eine nicht degenerierte Ecke ist zu genau n Ecken adjazent.*
   ii. Skizzieren Sie ein Polytop, das nur nicht degenerierte Ecken hat, und ein Polytop, das nur degenerierte Ecken hat.
   iii. Diskutieren Sie den Zusammenhang zwischen degenerierten Ecken und redundanten Ungleichungen.

(c) Beweisen Sie, dass für Polyeder $\mathscr{P}$ die Definition (3.23 aus der Vorlesung) eines relativ inneren Punktes mit der folgenden Definition übereinstimmt:
x ist relativ innerer Punkt von $\mathscr{P}$, falls ein $r > 0$ existiert, so dass $\mathscr{B}_r(x) \cap \operatorname{aff}(\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{P}$.
(Erinnerung: $\mathscr{B}_r(x) = \{\, y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r \,\}$ ist die ℓ_2-Norm-Kugel um x mit Radius r und $\operatorname{aff}(\mathscr{P}) = \{\, \sum_{i=1}^n \lambda_i x^i : x^i \in \mathscr{P},\ \lambda_i \in \mathbb{R},\ \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \,\}$.)

Aufgabe G3 (Modellierung)
Ein Whisky-Importeur unterhält zwar einen unbegrenzten Markt für seine Ware, aber durch die Produktionskapazitäten der drei Hersteller werden seine monatlichen Einkaufsmengen folgendermaßen begrenzt:

Hersteller A	höchstens 2000 Liter zu 35 EUR je Liter,
Hersteller B	höchstens 2500 Liter zu 25 EUR je Liter,
Hersteller C	höchstens 1200 Liter zu 10 EUR je Liter.

Daraus stellt er drei Verschnitte *Sir Roses*, *Highland Wind* und *Old Regent* her, die er zu 34 EUR, 28.50 EUR bzw. 22.50 EUR pro Liter verkauft. Die Zusammensetzung der Verschnitte ist:

Sir Roses	wenigstens 60% von A,
	höchstens 20% von C,
Highland Wind	wenigstens 15% von A,
	höchstens 60% von C,
Old Regent	höchstens 50% von C.

Der Whisky-Importeur möchte nun wissen, wie die Mischungen aussehen und welche Mengen er jeweils herstellen sollte, um einen maximalen Gewinn zu erzielen.

(a) Modellieren Sie dieses Problem als LP.

(b) Stellen Sie das dazugehörige duale LP auf.

(c) Was muss an dem Modell aus Aufgabenteil (a) geändert werden, wenn berücksichtigt werden soll, dass der Whisky nur flaschenweise verkauft wird (Inhalt einer Flasche: 0.7 Liter)?

Hausübung

Aufgabe H1 (Träger & vollständig unimodulare Matrizen)

(a) Beweisen Sie:

Für $x \in \mathscr{P}^{=}(A,b) \subseteq \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. *x ist eine Ecke von $\mathscr{P}^{=}(A,b)$.*
2. $\operatorname{rang}(A_{\cdot\,\operatorname{supp}(x)}) = \left|\operatorname{supp}(x)\right|$.
3. *Die Spaltenvektoren $A_{\cdot j}$, $j \in \operatorname{supp}(x)$, sind linear unabhängig.*

(b) Eine Matrix $A \in \{-1,0,1\}^{m\times n}$ heißt vollständig unimodular, wenn für jede quadratische Untermatrix A' von A (d.h. A' ist durch Streichen von Zeilen und Spalten aus A hervorgegangen) gilt:

$$\det(\mathrm{A}') \in \{-1,0,1\}.$$

Sei A vollständig unimodular und $b \in \mathbb{Z}^m$. Beweisen Sie:
Ist A vollständig unimodular, dann hat das Polyeder $\mathscr{P}^{=}(A,b)$ nur ganzzahlige Ecken.

(Lösungshinweis: Verwenden Sie die Cramersche Regel.)

Aufgabe H2 (Irredundante Darstellung & Facetten)
Sei $\mathscr{P} = \mathscr{P}(A,b)$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ ein volldimensionales Polyeder.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $i \in M := \{1,\dots,m\}$ und $\tilde{\mathscr{P}} := \mathscr{P}(A_{M\setminus\{i\}}, b_{M\setminus\{i\}})$. Dann gilt

$$\mathscr{P} \neq \tilde{\mathscr{P}} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Es gibt eine nichttriviale Seitenfläche } \mathscr{F} \text{ von } \mathscr{P} \text{ mit } \operatorname{eq}(\mathscr{F}) = \{i\}.$$

(*Tipp:* Zeigen Sie, dass es im Fall $\mathscr{P} \neq \tilde{\mathscr{P}}$ einen relativ inneren Punkt der Seitenfläche $\operatorname{fa}(\{i\})$ gibt.)

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

i. Das System $Ax \leq b$ ist irredundant.
ii. Für alle $i,j \in \{1,\dots,m\}$ ist $\operatorname{fa}(\{i\})$ eine Facette, und $\operatorname{fa}(\{i\}) \neq \operatorname{fa}(\{j\})$, wenn $i \neq j$.

Aufgabe H3 (Modellierung)
Bei einer großen deutschen Fondsgesellschaft werden die Wertpapierportfolios anhand von Faktoren zusammengestellt, von denen das Fondsmanagement überzeugt ist, dass sie die jeweiligen Aktien gut beschreiben. Diese Faktoren sind Konjunkturabhängigkeit, Euro/Dollar-Wechselkursabhängigkeit, und Marktkapitalisierung (Wert aller Aktien des Unternehmens). Das Management benutzt Targets (Zielwerte, die auf langjähriger Erfahrung beruhen), die es mit dem gesuchten Portfolio möglichst gut annähern will: Die Konjunkturabhängigkeit sollte 5 sein, die Euro/Dollar-Wechselkursabhängigkeit 9 und die Marktkapitalisierung 13. Der betrachtete Marktausschnitt bestehe aus den folgenden Aktien:

Name	Konjunktur	Euro/Dollar	Marktkapitalisierung
Deutsche Bank	1	12	15
DaimlerChrysler	9	15	14
BASF	8	8	7
Eon	3	2	5

(a) Stellen Sie ein lineares Problem zur Bestimmung eines Portfolios auf, das den gegebenen Targets

i. in der Maximumsnorm bzw.
ii. in der 1-Norm

möglichst nahe kommt. Dabei soll das gesamte Kapital investiert werden.

(b) Formulieren Sie für die LPs aus (a)i. und (a)ii. jeweils das duale LP.

(c) Formulieren Sie auch das entsprechende Optimierungsproblem, das bei Verwendung der 2-Norm entsteht.