Einführung in die Optimierung
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Marc Pfetsch
Dipl.-Math. Oec. Andreas Tillmann

WS 2013/14
07/08.11.2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (konvexe Optimierungsprobleme)
Beweisen Sie die folgende Aussage:
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge. Dann ist $\mathrm{Argmin}(f, C)$, d.h. die Menge der Punkte, in denen f ihr Minimum über C annimmt, konvex.

Aufgabe G2 (Polyeder und Kegel)

(a) Welche der folgenden Mengen sind Polyeder? Beweisen oder widerlegen Sie:

i. $\mathcal{M}_1 := \left\{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid a_1^T X a_1 \le a_2^T X a_2\right\}$ mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^n$,

ii. $\mathcal{M}_2 := \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \ge 0,\ \mathbb{1}^T x = 1,\ \sum_{i=1}^n x_i a_i = b_1,\ \sum_{i=1}^n x_i a_i^2 = b_2\right\}$ mit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$; $\mathbb{1}$ sei der Vektor in $\mathbb{R}^n$, dessen Komponenten alle gleich 1 sind,

iii. $\mathcal{M}_3 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \ge 0,\ x^T y \le 1 \text{ für alle } y \text{ mit } \|y\|_2 = 1\}$,

iv. $\mathcal{M}_4 := \mathrm{conv}\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right)$.

(b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen.

i. Sei $\mathcal{K}$ ein Kegel. Es gilt $x + y \in \mathcal{K}$ für alle $x, y \in \mathcal{K}$ genau dann, wenn $\mathcal{K}$ konvex ist.

ii. Jeder Kegel hat höchstens einen Extrempunkt, nämlich den Ursprung.

iii. Ein polyedrischer Kegel der Form $\mathcal{K} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \le 0\}$ (mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$) hat genau einen Extrempunkt, nämlich den Ursprung.

Aufgabe G3 (Modellierung)
Ein Unternehmen stellt zwei Gürteltypen A und B her. A ist von besserer Qualität als B. Der Nettogewinn beträgt bei A 2 Geldeinheiten und bei B 1.50 Geldeinheiten. Der Zeitaufwand für die Produktion eines Gürtels vom Typ A beträgt 2 Zeiteinheiten. Für den Typ B wird 1 Zeiteinheit pro Gürtel benötigt. Täglich stehen maximal 1000 Zeiteinheiten zur Verfügung. Die Lederbelieferung erlaubt eine Produktion von 800 Gürteln pro Tag, egal um welchen Typ es sich handelt. Außerdem stehen pro Tag höchstens 400 Schnallen für den Typ A und 700 Schnallen für den Typ B zur Verfügung. Wie soll die Produktion aufgeteilt werden, damit ein maximaler Gewinn erzielt wird? Modellieren Sie diese Problemstellung als Optimierungsproblem und lösen Sie es graphisch.

Hausübung

Aufgabe H1 (Konvexe Funktionen)
Beweisen Sie:

(a) Sei $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist auch $\operatorname{conv}\mathscr{M}$ kompakt.

(b) Sei $\mathscr{M} \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, und sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex.
Dann gilt:

$$\max\{f(x) \mid x \in \mathscr{M}\} = \max\{f(x) \mid x \in \operatorname{conv}\mathscr{M}\}.$$

Aufgabe H2 (Transformation)

(a) Betrachten Sie die konvexe Funktion $f(x) = \max\{c^T x + \alpha, d^T x + \beta\}$. Formulieren Sie das Optimierungsproblem

$$\min\{f(x) : Ax = b, x \geq 0\}$$

als lineares Problem (lineare Zielfunktion und lineare Nebenbedingungen). Dabei seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, d \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

(b) Betrachten Sie das Polyeder $\mathscr{P}$, das durch die folgenden Ungleichungen gegeben ist:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 7x_3 &\leq -10 \\
3x_1 + 4x_2 + 8x_3 &\leq -20 \\
5x_1 + 6x_2 + 9x_3 &\leq -30 \\
x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq -40 \\
4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &\leq -50
\end{aligned}$$

Stellen Sie das System in der Normalform ($Ax = b, x \geq 0$) dar.

(c) Zum näherungsweisen Lösen überbestimmter Gleichungssysteme $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m > n$, wird oft ein Optimierungsproblem formuliert, in dem das Residuum bezüglich einer gegebenen Norm minimiert werden soll:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|Ax - b\|$$

Formulieren Sie dieses Problem als lineares Programm für:

i. Die Summennorm

$$\|v\|_1 := \sum_{i=1}^{m} |v_i|$$

ii. Die Maximumnorm

$$\|v\|_\infty := \max_{i=1,\dots,m} |v_i|$$

Aufgabe H3 (Modellierung)
Eine Firma hat sich auf die Fertigung zwei spezieller Computertypen spezialisiert, Computer mit Ein-Prozessor-System (1 CPU) und Computer mit Zwei-Prozessor-System (2 CPUs). Pro Woche können von den Ein-Prozessor-Systemen maximal 130 Stück hergestellt werden, von den Zwei-Prozessor-Systemen maximal 80 Stück. Insgesamt können pro Woche nur 150 Computer hergestellt werden und es stehen pro Woche höchstens 180 CPU's zur Verfügung.

(a) In welcher Weise muss produziert werden, damit der Gesamtgewinn maximal ist, wenn ein Ein-Prozessorsystem 200 Euro Gewinn einbringt und ein Zwei-Prozessor-System ebenfalls 200 Euro Gewinn einbringt? Stellen Sie das lineare Programm auf und lösen Sie es graphisch.

(b) Im folgenden Monat steigt der Gewinn für Zwei-Prozessor-Systeme von 200 auf 600 Euro. Wie ändert sich der maximale Gesamtgewinn des Betriebes?