Einführung in die Optimierung
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Marc Pfetsch
Dipl.-Math. Oec. Andreas Tillmann

WS 2013/14
24/25.10.2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Konvexe Mengen)
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Der Durchschnitt einer beliebigen Familie konvexer Mengen ist wieder eine konvexe Menge.

(b) Die Vereinigung einer endlichen Familie konvexer Mengen ist wieder eine konvexe Menge.

(c) Jeder von einer Hyperebene $\mathscr{H} = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \alpha\}$ erzeugte abgeschlossene Halbraum

$$\mathscr{H}^a = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \geq \alpha\}$$

ist konvex.

(d) Die Lösungsmenge eines linearen Ungleichungssystems $Ax \leq b$, mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ (das Ungleichheitszeichen ist dabei komponentenweise zu verstehen), ist konvex.

(e) Die Menge $\alpha\mathscr{C} + \beta\mathscr{D}$, wobei $\mathscr{C}, \mathscr{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ konvexe Mengen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind, ist konvex.

Aufgabe G2 (Modellierung)
Das Management eines Krankenhauses hat folgenden Bedarf an Krankenpflegern bzw. Krankenschwestern:

Zeit	benötigte Schwestern/Pfleger
0.00 bis 4.00	20
4.00 bis 8.00	70
8.00 bis 12.00	60
12.00 bis 16.00	50
16.00 bis 20.00	30
20.00 bis 24.00	25

Das Pflegepersonal arbeitet in 8-Stunden-Schichten, wobei eine Schicht um 0, 4, 8, 12, 16 oder 20 Uhr beginnt. Es soll ein Dienstplan erstellt werden, der mit der kleinstmöglichen Anzahl an Pflegern bzw. Schwestern auskommt.
Modellieren Sie diese Problemstellung als Optimierungsproblem. Ist die zulässige Menge konvex? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe G3 (Modellierung)
Ein Erzeuger von Tierfutter produziert ein Gemisch aus drei Bestandteilen: Zwei nährstoffreiche Bestandteile und ein Füllmittel. Ein Kilogramm Futter muss einen Minimalgehalt an Nährstoffen enthalten:

Nährstoff	A	B	C	D
Gramm	80	50	23	2

Die beiden nährstoffreichen Bestandteile setzen sich wie folgt zusammen:

	A	B	C	D	Kosten/kg
Bestandteil 1 in Gramm/kg	100	80	40	10	73
Bestandteil 2 in Gramm/kg	200	150	20	–	55

Das Futtergemisch soll so erzeugt werden, dass die Kosten möglichst gering sind. Formulieren Sie dies als Optimierungsproblem. Skizzieren Sie die zulässige Menge. Ist sie konvex? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Hausübung

Aufgabe H1 (Konvexe Mengen)
Beweisen Sie:

(a) Die konvexe Hülle einer Menge $\mathscr{M}$ ist die Menge aller Konvexkombinationen von Punkten aus $\mathscr{M}$.

(b) Der Abschluss $\overline{\mathscr{C}}$ einer konvexen Menge $\mathscr{C} \subset \mathbb{R}^n$ ist konvex. (Erinnerung: $\overline{\mathscr{C}}$ ist die Menge aller Grenzwerte von konvergenten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_i \in \mathscr{C}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.)

(c) Die Menge $\mathscr{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$ ist konvex.

Aufgabe H2 (Modellierung)
Zum Transport von n Kugeln mit Durchmesser d soll eine quaderförmige Kiste konstruiert werden, sodass die Oberfläche der Kiste möglichst klein ist.
Modellieren Sie diese Problemstellung als Optimierungsproblem. Ist die zulässige Menge konvex? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe H3 (Modellierung)
Ein Betrieb gewinnt durch ein Separationsverfahren aus zwei Rohstoffen R_i vier Substanzen S_j, von denen er monatlich bestimmte Mindestmengen zur Weiterverarbeitung benötigt. Jede der vier Substanzen ist in beiden Rohstoffen in unterschiedlichen Mengen vorhanden; die Ausbeute (in Tonnen $[t]$) pro Tonne des Rohstoffes ist in folgender Tabelle angegeben:

Ausbeute in t (pro t von R_i) für Substanz	R_1	R_2	Mindestmenge für S_j (t/Mon.)
S_1	0.3	0.2	100
S_2	0.12	0.2	80
S_3	0.1	0.25	75
S_4	0.02	0.1	17
Rohstoffpreise	230	420	

Gesucht ist die kostenminimale Mengenkombination (x_1, x_2) der monatlich zu beschaffenden Rohstoffe R_i, $i = 1, 2$, wobei die benötigten Mindestmengen für die Substanzen S_j, $j = 1, 2, 3, 4$, zu berücksichtigen sind. Kosten für die Separation sollen dabei unberücksichtig bleiben.

(a) Erstellen Sie ein mathematisches Modell für das genannte Problem und entscheiden Sie, ob die zulässige Menge konvex ist. Begründen Sie Ihre Entscheidung.

(b) Bestimmen Sie rechnerisch die Ecken der zulässigen Menge. (*Hinweis:* Eine Skizze kann hilfreich sein.)