Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

29/30.01.2009

Analysis II für M, HLM, Ph

12. Übung

Gruppenübung

G 35 Fixpunktsatz

Seien (X, d) und (Y, D) metrische Räume und $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$ Teilmengen.
Eine Funktion $f : A \to B$ erfüllt in einer Menge $M \subseteq A$ die Lipschitz-Bedingung, wenn es eine (nichtnegative) reelle Zahl L gibt, mit der die Bedingung

$$\forall x_1, x_2 \in M : D(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d(x_1, x_2)$$

erfüllt ist.

1. Ist die Exponentialfunktion $x \mapsto \exp(-x)$ auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ Lipschitz-stetig?
2. Beweisen sie, daß die Gleichung $x = \exp(-x)$ genau eine Lösung in $\mathbb{R}$ hat.

G 36 Lokale Umkehrbarkeit

Zeige, daß die Abbildung $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

für jedes $(x, y) \neq (0, 0)$ lokal umkehrbar ist. Ist F auch global umkehrbar? Bestimme das Urbild $F^{-1}(\{(a, b)\})$ eines beliebigen Punktes $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

G 37 Stetigkeit

Es sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen den metrischen Räumen X und Y. Beweise die Äquivalenz folgender Bedingungen:

1. Das Urbild $f^{-1}(A)$ einer abgeschlossenen Teilmenge A von Y ist abgeschlossen in X.
2. $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ für alle Teilmengen $A \subset X$.
3. $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$ für alle Teilmengen $B \subset Y$.

Hausübung

H 34 Picard-Iteration (3 Punkte)

Für $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ sei die Funktion

$$\Phi(x_1, x_2) \quad = \quad \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} \sin x_1 \cdot \cos x_2 + \arctan x_2 \\ \sin^2(x_1 + x_2 + 1) \end{pmatrix}$$

gegeben.

a) Zeige: Φ besitzt genau einen Fixpunkt $x^* \in \mathbf{R}^2$ und das Iterationsverfahren $x^{(k+1)} = \Phi(x^{(k)})$ konvergiert für jeden Startwert $x^{(0)} \in \mathbf{R}^2$ gegen x^*.

b) Wieviele Iterationsschritte muß man höchstens mit $x^{(0)} = (0,1)^T$ ausführen, um $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{1}{1024}$ sicherzustellen?

H 35 Umkehrfunktion (3 Punkte)
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

1. Zeigen Sie, daß f surjektiv ist. Bestimmen sie für einen Punkt $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ alle Urbilder.
2. Bestimmen sie alle Punkte $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ für die $f'(x,y)$ ein Isomorphismus ist.
3. Bestimmen sie in einer Umgebung des Punktes $(1,0)$ eine lokale Inverse zu f.

H 36 Wo liegen Maxima? (4 Punkte)
Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt und $f : \overline{D} \to \mathbb{R}^n$ stetig und auf D stetig differenzierbar, so dass $f'(x)$ für alle $x \in D$ ein Isomorphismus ist. Zeige, dass $\|f\|$ sein Maximum nicht in D annehmen kann, also dass

$$\sup_{x\in\overline{D}} \|f(x)\| = \sup_{x\in\partial D} \|f(x)\|$$

gilt.