Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

22/23.01.2009

Analysis II für M, HLM, Ph

11. Übung

Gruppenübung

G 32 Taylor-Entwicklung

Bestimme die Taylor-Entwicklung der Funktion

$$f\colon (0,\infty)\times(0,\infty)\to\mathbb{R}, \quad f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

im Punkt $(1,1)$ bis einschließlich der Glieder 2. Ordnung.

G 33 Extremstellen

Bestimme die kritischen Punkte von

$$f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \quad f(x,y)=(x^2+y^2)((x-1)^2+y^2)$$

(d.h. die Punkte $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{grad} f(x_0,y_0)=0$) und finde heraus, welche davon lokale Extremstellen sind.

G 34 Hessematrix

Untersuche in Abhängigkeit von $n\in\mathbb{N}$, ob die Funktion $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$,

$$f(x,y)=x^n+y^n,$$

im Punkt $(0,0)$ ein lokales Minimum oder Maximum hat. Ist die Hessematrix $(\mathrm{Hess}f)(0,0)$ im Fall einer Extremstelle positiv bzw. negativ (semi-)definit? Ist die Hessematrix im Fall, dass keine lokale Extremstelle vorliegt, indefinit? Wiederspricht dies den Aussagen der Vorlesung über notwendige und hinreichende Kriterien von lokalen Extremstellen?

Hausübung

H 31 Taylorpolynom (3 Punkte)

Wir betrachten zwei Funktionen f und g, die wie folgt definiert sind:

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^2\sin(xy/2)$$

$$g:\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\backslash\{0\})\to\mathbb{R},\ g(x,y)=x^2-\cos(x/y).$$

a) Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Grades von f mit der Entwicklungsstelle $(1,\pi)$ (ohne das Restglied zu bestimmen).

b) Entwickeln Sie g um den Punkt $(\pi,1)$ mit der Taylorformel mit $m=2$ (ohne das Restglied zu bestimmen).

c) Vergleichen Sie die Funktionswerte $f(1.1,\pi)$ und $g(\pi+0.1,0.8)$ mit den entsprechenden Näherungswerten aus der Taylorentwicklung.

H 32 Der Affensattel (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$.

1. Bestimme die Ableitung Df von f.
2. Bestimme die Hessematrix $H_f = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j})_{i,j}$ an der Stelle 0.
3. Ist H_f positiv definit, indefinit oder negativ definit?
4. Hat die Funktion f an der Stelle 0 ein Extremum?

H 33 Quadriken (4 Punkte)

Es sei A eine positiv definite reelle $n \times n$-Matrix und $b \in \mathbb{R}^n$ mit $b \neq 0$.

1. Zeigen Sie, daß A invertierbar und A^{-1} positiv definit ist.
2. Es sei $Q := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T Ax = 1\}$ die sog. Kennlinie von A. Zeigen Sie, daß die Funktion $x \mapsto \langle b, x \rangle$ auf Q genau ein globales Minimum und genau ein globales Maximum hat.