Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

15/16.01.2009

Analysis II für M, HLM, Ph

10. Übung

Gruppenübung

G 28 Jacobi-Matrix
Gegeben seien die Funktionen $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $g(x, y, z) := (x^2+y^2+z, xyz)$ bzw. $h(u, v) := (e^v, e^u)$. Bestimme die Jacobi-Matrizen J_g, J_h und $J_{h\circ g}$.

G 29 Bilineare Funktionen
Eine bilineare Funktion ist eine Abbildung

$$f\colon E \times F \to G,$$

so dass für jedes (fest gewählte) x aus E und y aus F die partiellen Abbildungen

$$f(x, \cdot) : F \to G$$

und

$$f(\cdot, y) : E \to G$$

lineare Abbildungen sind.

Es sei $\beta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine bilineare Funktion.

1. Zeige, dass die Ableitung von β im Punkt (x, y) durch $\beta'(x, y)(v, w) = \beta(x, w)+\beta(v, y)$ gegeben ist.
2. Beweise, dass $\beta' : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine lineare Abbildung ist.
3. Ist β stetig differenzierbar?

G 30 Differenzierbarkeit und Richtunsableitungen
Zeige, dass alle Richtungsableitungen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ und

$$f(x, y) = x^2y/(x^4 + y^2) \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

im $(0, 0)$ existieren aber die Funktion f trotzdem nicht differenzierbar in diesem Punkt ist. Wo liegt das Problem?

G 31 Ableitung
Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei

$$f : U \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Was heißt, f sei an der Stelle $x_0 \in U$ differenzierbar? Man gebe die Definition der Ableitung an.

Hausübung

H 28 Kettenregel in Koordinaten (3 Punkte)
Es seien $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ differenzierbare Funktionen.

1. Beschreiben sie die Kettenregel $D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \circ Dg(x)$ in den kanonischen Koordinaten, d.h. durch die Jacobimatrizen $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{i,j}$ und $(\frac{\partial g_i}{\partial x_j})_{i,j}$.
2. Es seien $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ bzw. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ durch $g(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2, x_1 x_2)$ und $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ gegeben.
   Wie lautet nach (1) die Formel für die Ableitung $D(f \circ g)$? Berechne die Richtungsableitungen von $f \circ g$ an der Stelle $(1, 1)$ in die Richtungen $(3, 0)$ und $(5, 5)$.

H 29 Die Richtungsableitung der Exponentialfunktion (2 Punkte)
Wir betrachten den Banachraum

$$V = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

wobei wir lineare Abbildungen A mit der zugehörigen Matrix bezüglich der kanonischen Basis identifizieren. Die Matrixexponentialfunktion $\exp : V \to V$ ist durch

$$\exp(A) = \sum_{k=0} \frac{1}{k!} A^k$$

gegeben. Berechne die Richtungsableitung der Matrixexponentialabbildung in Richtung A am Punkt $\mathbf{0}$ (d.h. bei der Nullabbildung).
Hinweis: Dies geschieht analog zum Beweis für die reelle Exponentialfunktion.

H 30 Homogene Funktionen (4 Punkte)
Eine Funktion auf dem k-dimensionalen reellen Vektorraum

$$\Phi : \mathbb{L}^k \to \mathbb{L}$$

heißt homogen vom Grad n genau dann, wenn für alle $\alpha, x_i \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Phi(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_k) = \alpha^n \cdot \Phi(x_1, \ldots, x_k).$$

Sei $(x, y, z) \mapsto u(x, y, z)$ eine zwei mal differenzierbare Funktion, die homogen vom Grad n ist. Beweise, dass

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = n(n-1)u.$$

Hinweise:
· Jede homogene Funktion erfüllt die Gleichheit

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = nu.$$

· $\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)^2 := \left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}\right)$.
· $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z}$ ist die Richtungsableitung von u in Richtung von (x, y, z).