Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

18/19.12.2008

Analysis II für M, HLM, Ph

9. Übung

Gruppenübung

G 25 Differenzierbarkeit
Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{für } \ (x,y) \neq 0 \\ 0 & \text{für } \ (x,y) = 0 \end{cases}$$

gegeben. Zeige

- $\frac{\partial f}{\partial x} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\frac{\partial}{\partial y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ existieren, sind aber im Nullpunkt nicht stetig.
- f ist im Nullpunkt differenzierbar.

G 26 Partielle Differenzierbarkeit
Die Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$F(x,y) := \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{falls} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{falls} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeige, dass F überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber gilt $(D_2D_1F)(0,0) \neq (D_1D_2F)(0,0)$.

G 27 Kettenregel
Seien $X \subset \mathbb{R}^k$ offen und $Y \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Sei $f : \overline{X \times Y} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $X \times Y$ differenzierbar ist.

Berechne in jedem Punkt $x \in X$ die Ableitung der Funktion

$$m(x) = \min_{y \in \bar{Y}} f(x,y) = f(x, \xi(x)),$$

wobei $\xi : X \to \mathbb{R}^n$ mit $\mathrm{im}(\xi) \subset Y$ eine stetig differenzierbare Funktion ist.

Hausübung

H 25 Lösung der Wärmeleitungsgleichung (2 Punkte)
Zeige, dass die Funktion

$$F(x,t) := t^{\frac{-n}{2}} e^{\frac{-\|x\|^2}{4t}} \text{ für } x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}^+$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist[1], d.h. sie erfüllt

$$\Delta F - \frac{\partial F}{\partial t} = 0\ .$$

[1] $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x)$.

H 26 Kettenregel (3 Punkte)

1. Berechne die Ableitungen folgender Funktionen:
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (xy, \cosh(xy), \log(1 + x^2))$
   (b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $g(x, y, z) = (x \sin(y) \cos(z), x \sin(y) \sin(z), x \cos(y))$
2. Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

   Gebe alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, in denen h differenzierbar ist, an.

H 27 Differenzierbarkeit und Stetigkeit (4 Punkte)

Zeige, dass die Funktion $(x, y) \mapsto f(x, y)$, die stetig bezüglich x für jedes feste y ist und die beschränkte Ableitung bezüglich y hat, stetig ist.