Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

11/12.12.2008

Analysis II für M, HLM, Ph

8. Übung

Gruppenübung

G 22 Partiell aber nicht total differenzierbar

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := \sqrt{|xy|}$.

Zeige: f ist stetig und partiell differenzierbar im Punkt $(0, 0)$, aber die Funktion ist in $(0, 0)$ nicht total differenzierbar.

G 23 Partiell differenzierbar aber nicht stetig

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{für } \; x \cdot y = 0 \\ 0 & \text{für } \; x \cdot y \neq 0 \end{cases}.$$

Zeige:

- f ist im Nullpunkt partiell differenzierbar.
- f ist im Nullpunkt nicht stetig.

G 24 Richtungsableitung

Es sei $V = C([0, 1], \mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen reellen Funktionen auf dem Einheitsintervall versehen mit der Supremumsnorm. Wie lautet die Richtungsableitung der Funktion $f \mapsto f^2$ in Richtung $h \in V$ am Punkt $f \in V$?

Hausübung

H 22 $C([a, b])$: ein unendlichdimensionaler Banachraum (3 Punkte)

Zeige, dass $\big(C([a, b]), \| \cdot \|_\infty\big)$ ein Banachraum ist.

H 23 Parameterabhängige Integrale (3 Punkte)

Es sei $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Man zeige, daß für jedes $y \in \mathbb{R}$ die Integrale

$$f(y) := \int_0^1 g(x, y)dx \text{ und } f^*(y) := \int_0^1 D_2 g(x, y)dx$$

wohldefiniert sind, und daß die Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, jedoch $f'(0) \neq f^*(0)$ gilt.

H 24 Differenzierbarkeit (3 Punkte)

Vorbemerkung: Wenn nur $|| \cdot ||$ da steht, ist im Allgemeinen die euklidische Norm $|| \cdot ||_2$ gemeint!

Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x) := g(||x||)$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

Zeige: f ist genau dann im Nullpunkt differenzierbar, wenn $g'(0) = 0$ gilt. In diesem Fall ist $\operatorname{grad} f$ stetig in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$.