Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

04/05.12.2008

Analysis II für M, HLM, Ph

7. Übung

Gruppenübung

G 19 Stetigkeit

Zeige, dass die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

stetig in $\{(0,0)\}$ ist und es

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} f(x,y)) = 0$$

gilt aber

$$\lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0} f(x,y))$$

existiert nicht.

G 20 Zusammenhängende Mengen

Die Abschließung einer zusammenhängenden Menge ist ebenfalls zusammenhängend.

G 21 Metriken oder nicht?

a) Welche der folgenden Abbildungen von $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ erfüllt die Bedingungen einer Metrik? Welche Eigenschaften einer Metrik sind gegebenenfalls nicht erfüllt?

1. $d(x,y) := |x-y|$
2. $\tilde{d}(x,y) := (x-y)^2$
3. $\hat{d}(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$

Die Metrik $\hat{d}$ läßt sich auch auf dem $\mathbb{R}^2$ definieren. Bestimme die offene Einheitskreisscheibe.

b) Zeige, daß für jeden normierten reellen Vektorraum V mit Norm $\|\cdot\|$ die Abbildung $d(x,y) := \|x-y\|$ eine Metrik definiert.

Hausübung

H 19 Stetigkeit (2 Punkte)

Ist die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^2 = 0 \end{cases}$$

stetig?

H 20 Konvergenz ist abhängig von der Metrik (2 Punkte)

Betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n := \frac{1}{n}$. Bezüglich welcher der beiden Metriken aus G21 ist die Folge konvergent? Erkläre, wie die bezüglich $\hat{d}$ konvergenten Folgen aussehen müssen.

H 21 Topologie von $\mathbb{R}^n$ (5 Punkte)
Versehe $\mathbb{R}$ mit der Metrik
$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}.$$
Gebe ein Beispiel einer Folge von bezüglich dieser Metrik abgeschlossenen beschränkten nichtleeren Mengen $A_k \subset \mathbb{R}$ mit $A_{k+1} \subset A_k$, so dass
$$\cap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset.$$

Hinweis: Welche Mengen in $\mathbb{R}$ sind beschränkt bezüglich dieser Metrik?