Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

27/28.11.2008

Analysis II für M, HLM, Ph

6. Übung

Gruppenübung

G 16 Stetigkeit

Wir betrachten die Funktionen

$$f_1(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R},$$

$$f_2(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}.$$

Sind f_1 und f_2 stetig? Sind f_1, f_2 in $(0,0)$ fortsetzbar?

G 17 Raum stetiger Funktionen

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen, so daß $a < b$ gilt. Auf dem Vektorraum $C([a,b],\mathbb{R})$ der stetigen reellwertigen Funktionen auf $[a,b]$ definieren wir eine Abbildung $\|\cdot\|_\infty : C([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ durch $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [a,b]\}$.

1. Warum existiert das Supremum in obiger Definition?
2. Beweise, dass die Einschränkung $\exp|_{[a,b]}$ nicht in P liegt, wobei P die Menge aller Polynomfunktionen auf $[a,b]$ ist.
3. Ist P abgeschlossen in $C([a,b],\mathbb{R})$?

G 18 Stetige Abbildungen auf Kompakta

Es sei $f : Q \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine stetige Abbildung. Weiterhin sei $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le b_i\}$. Zeige, dass f *abgeschlossen* ist, d.h., dass das Bild $f(A)$ jeder abgeschlossenen Menge $A \subset Q$ wieder abgeschlossen ist.

Hausübung

H 16 Stetigkeit (2 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \frac{\sin(x) y^2}{x^2+y^4}$$

1. Ist die Funktion f stetig?
2. Ist sie stetig auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzbar, d.h. gibt es eine stetige Funktion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $F_{|\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} = f$?

H 17 Funktionen auf dem Produkt kompakter Intervalle (3 Punkte)

Seien I und J kompakte Intervalle in $\mathbb{R}$ und $f : I \times J \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ werde definiert durch

$$F(x) := \sup\{f(x,y) \mid y \in J\}\ .$$

Zeige, dass F stetig ist.

H 18 Jordan-Nullmengen (4 Punkte)

Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Jordan-Nullmenge*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Überdeckung $\{Q_i\}_{i=1}^n$ von M durch offene (oder abgeschlossene) Intervalle Q_i[1] gibt, so dass

$$\sum_{i=1}^{n} |Q_i| < \epsilon.$$

Zeige: Wenn M eine beschränkte Menge ist, deren Abschluss nur endlich viele Häufungspunkte $x_1, \ldots, x_n$ hat und zwar so, daß für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich Punkte von M nicht in $\bigcup_{k=1}^n B_\varepsilon(x_k)$ liegen, dann ist M eine Jordan-Nullmenge.

[1] $Q_i := \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i\}$, $|Q_i| := \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.