Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. H.-D. Alber
Dr. Sergiy Nesenenko

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

20/21.11.2008

Analysis II für M, HLM, Ph

5. Übung

Gruppenübung

G 13 Norm und Topologie

a) Zeige, daß für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$. Folgere daraus, daß $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist bezüglich $\| \|_2$ genau dann, wenn U offen ist bezüglich $\| \|_\infty$.

b) Da alle Normen auf $\mathbb{R}^n$ äquivalent sind, kann jede Norm durch $k \cdot \| \|_1$ beschränkt werden für ein geeignetes $k \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$. Bestimme ein solches k.

Hinweis: Verwende die Standardbasis von $\mathbb{R}^n$.

G 14 Rand, Abschluss, Innneres
Wir betrachten $\mathbb{R}^n$. Das *innere* $\mathring{A}$ einer Menge A ist die Menge aller Punkte $p \in A$ für die es eine offene ϵ-Kugel $U_\epsilon(p)$ gibt, welche ganz in O liegt (d.h. $\mathring{A}$ ist die Vereinigung aller offenen Teilmengen von A). Der *Rand* ∂A von A ist die Menge $\overline{A} \setminus \mathring{A}$.

1. Skizziere für die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^2$ jeweils das Innere $\mathring{A}$, den Abschluss $\overline{A}$ sowie den Rand ∂A:
   (a) $A = U_1(0)$
   (b) $A = (-1, 2] \times [1, 3)$
   (c) $A = \{(x, 0) \mid x \neq 0\}$
   (d) $A = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{Q}\}$
   (e) $A = \mathbb{Q}^2$
2. Beweise die folgenden Inklusionen:
   (a) $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$
   (b) $\mathring{A} \cap \partial A = \emptyset$
   (c) $A \cup \partial A = \overline{A}$

G 15 Integrierbarkeit
Gebe ein Beispiel von zwei Riemann-integrierbaren Funktionen f und g derart, dass $f \circ g$ nicht Riemann-integrierbar ist.

Hausübung

H 13 Minkowskische Ungleichung (2 Punkte)
Zeige:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2\Big)^{1/2} \leq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big)^{1/2}.$$

Hinweis: Verwende die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung.

H 14 Französische Eisenbahnmetrik (3 Punkte)

Definition: Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ heißt *Metrik*, wenn für beliebige Elemente x, y und z von X die folgenden axiomatischen Bedingungen erfüllt sind:

1. $d\,(x, x) = 0$ (identische Punkte haben Abstand 0),
2. $d\,(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ (nichtidentische Punkte haben nicht Abstand 0),
3. $d\,(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie),
4. $d\,(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung).

Aufgabe: Betrachte $\mathbb{R}^2$ zusammen mit folgender, oft als *französische Eisenbahnmetrik*, bezeichneten Metrik

$$d_{SNCF}\,(x,\ y) := \begin{cases} |x-y| & \text{falls } x = \lambda y \text{ für ein } \lambda > 0 \\ |x| + |y| & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Zeige, dass d_{SNCF} tatsächlich eine Metrik ist.
- Erkläre die Namensgebung? Wo liegt Paris?
- Skizziere $U_R\,(x)$ für $x \neq 0$. Welche beiden Fälle sind dabei zu unterscheiden?

H 15 Kompaktheit im $\mathbb{R}^n$ (4 Punkte)

Zeige: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Folgengliedern $a_n \in A$ eine in A konvergente Teilfolge besitzt.