



Analysis II für M, HLM, Ph

3. Übung

Gruppenübung

G 7 Trigonometrische Funktionen

Zeige, dass

$$\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

gilt.

G 8 Riemann-Integral

Berechne für $0 < a < b$ und $k \in \mathbb{N}$ das Integral

$$\int_a^b x^k dx,$$

indem Du den Grenzwert von Riemann-Summen bestimmst.

Hinweis: Benutze als Partition $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ mit $x_j = a(\sqrt[n]{\frac{b}{a}})^j$.

G 9 Riemann-Integral

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass $f \in \mathcal{R}([0, 1])$ und $\int_0^1 f(x) dx = 0$.

Hausübung

H 7 Integration (3 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen sind auf dem Intervall $[0, 1]$ integrierbar?

- $f_1(x) = \exp(-x^2)$,
- $f_2(x) = x$, für $x \leq 1/2$, $f_2(x) = x^2$ für $x > 1/2$,
- $f_3(x) = 0$ für $x = 0$, $f_3(x) = 1/x$ für $x > 0$.

H 8 Substitutionsregel (3 Punkte)

Berechne die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsregel:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx, \quad \int \frac{e^{2x} - 2}{2e^{-x} + 1} dx \quad \text{und} \quad \int \frac{1}{1 + \sin x} dx.$$

H 9 Gleichmäßige Konvergenz und Intergration (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktionenfolge

$$f_n = \frac{2x}{n} e^{\frac{x^2}{n}}, \quad x \in [0, 1].$$

1. Untersuche $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

2. Bestimme

$$I_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx \quad \text{und} \quad I_2 = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx.$$

und vergleiche die Ergebnisse.